解　説

塑性加工解析に必要な FEM　④プレス加工の解法

浜　孝之*

1. はじめに

プレス成形は，“（主として）弾塑性体”である板材が“工具との接触”を伴いながら“大きな変形やひずみ”を受けるプロセスである．上記の“”で括られた非線形性の強い現象を有限要素法（FEM）で解析するためには，非線形連続体力学と高度な数値解析技術が必要であり，そのため弾性 FEM に比べて理論が格段に難しい．それに加えてプレス成形解析では，ビードやしわ押さえといった特有の加工技術も合理的にモデル化する必要があり，問題をさらに複雑にしている．これらの解析理論については多くの教科書[1)~4)]や解説[5)~14)]で説明されているが，内容が高度でハードルが高く感じている方もおられよう．そこで本稿では，プレス成形の弾塑性 FEM について厳密な理論よりも概念的な考え方を優先して解説することで，上掲の教科書や解説への橋渡しとすることを目的とする．以下では静解析を想定し，また板材には弾塑性体を仮定する．なお本稿では概念的な説明に重きをおいているため，理論的には必ずしも厳密ではない部分もある点をご了解いただきたい．

2. 弾塑性 FEM の考え方

解説 3[15)]で説明されたように，弾性 FEM における要素剛性方程式は次式で与えられる．

$$\int_{v_e}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\,\mathrm{d}v_e\{u_e\}=[K_e]\{u_e\}=\{f_e\} \qquad (1)$$

式(1)は物体に負荷された外力と物体内で生じた内力が釣り合っていることを表す．また解説 3 の式(3)，(4)を用いると，上式(1)は以下のように変形できる．

$$\{p_e\}=\{f_e\} \quad \text{ただし} \quad \{p_e\}=[K_e]\{u_e\}=\int_{v_e}[B]^{\mathrm{T}}\{\sigma\}\,\mathrm{d}v_e \qquad (2)$$

さて弾性（線形）FEM では，**Fig.1** に示すように外力ベクトル $\{f\}$ と変位ベクトル $\{u\}$ の関係は常に線形である．言い換えれば，剛性マトリクス$[K]$および境界条件は変形中に変化しないことを前提とする．一方弾塑性（非線形）FEM では，後述するように剛性マトリクスおよび境界条件が変形の進行に伴って変化するため，$\{f\}$ と $\{u\}$ は非線形な関係になる（Fig.1）．ただし解析前の時点ではいつどのように剛性マトリクスや境界条件が変化するかわからない．そのため Fig.1 に示される $\{f\}$ と $\{u\}$ の模式的な関係はあくまでも解析結果として得られる情報であり，解析する前には決して知ることができない．

プレス成形の FEM では，この非線形性は主として次の 3 つの要因によってもたらされる．第一は，変形が大きいこ

原稿受付　平成　26　年　2　月　　　日
*京都大学大学院エネルギー科学研究科
〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町

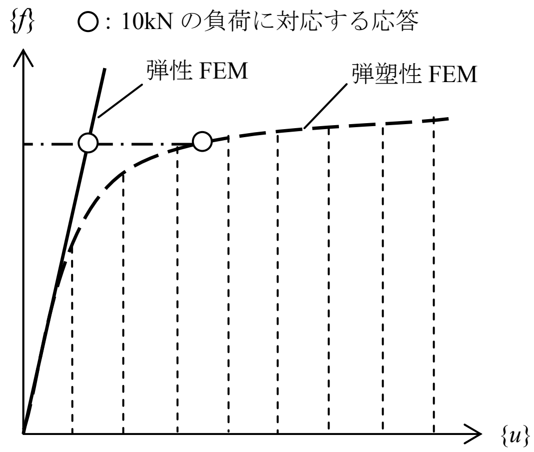


Fig.1　弾性 FEM と弾塑性 FEM の違い

とに起因する非線形性（幾何学非線形）である．例えば式(1)における$[B]$マトリクスは幾何学的な形状だけから決定されるので，変形が大きくなると変形前後で$[B]$マトリクスの変化が無視できない．その結果剛性マトリクスが変化する．第二は，弾塑性体であることに起因する非線形性（材料非線形）である．弾性域から塑性域へ移行すると構成式が替わるため[2), 3), 4), 15)]，式(1)における$[D]$マトリクスが変化し，結果として剛性マトリクスが変化する．そして第三は板材と工具の接触に起因する非線形性（接触非線形）である．FEM では通常，工具との接触状況は板材モデルへ与える境界条件によって再現される．そのため，板材と工具の接触状態が変化すると，それに伴って境界条件や摩擦状態が変化し，結果として剛性方程式が変化する．このようにプレス成形解析は，様々な非線形性が複雑に絡み合った非常に難易度の高い解析であると言える．

続いて計算の進め方を考える．例として片持ち梁に 10kN を負荷した時の変形の解析を考えよう．梁が弾性体であり変形も十分小さいと仮定すれば，弾性 FEM が適用できて $\{f\}$ と $\{u\}$ の関係が線形になる．したがって，10kN を負荷する計算を一回行えば対応する変形が精確に計算できる（Fig.1）．一方梁が弾塑性体である場合，弾塑性 FEM を用いる必要があり $\{f\}$ と $\{u\}$ の関係は非線形になる．そのため，弾性 FEM のように 10kN を負荷する計算を一回行うだけでは剛性マトリクスの変化を考慮できず応答を精確に計算することができない．そこで弾塑性 FEM では，例えば変形過程を 10 回に分けて 1kN ずつ負荷するように，工程を細かく分割して解析を進める．その様子を模式的に Fig.1 中の点線で示す．このように変形過程を多区間に分割して少しずつ計算を進める方法を増分解析などと呼ぶ．そして各区間をステップやインクリメントなどと呼ぶ．

各ステップ内の計算には，陽解法と陰解法と呼ばれる二

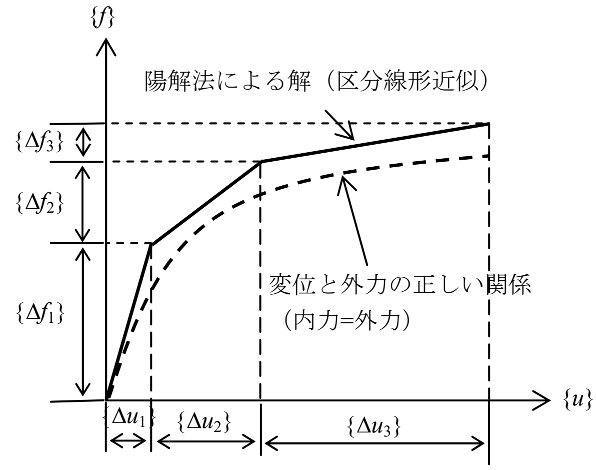
つの手法が用いられる．陽解法は，各ステップを線形近似して（剛性マトリクスが変わらないと仮定して）解く方法である．その様子を **Fig.2**(a)に示す．前述の梁の例で言えば，1kN を負荷して剛性方程式を解く作業を 10 回行えば良い．この考え方は｛f｝と｛u｝の関係を区分線形近似することに他ならないが，ステップ数を多くすれば誤差は小さいとの仮定に基づく．この場合，剛性方程式を解くことで得られるのはあくまでも各ステップでの変化量(増分)なので，式(1)に代わって増分間の関係を表す次式が用いられる．

$$\int_{v_e}[B]^{\mathrm{T}}[D][B]\mathrm{d}v_e\{\Delta u_e\}=[K_e]\{\Delta u_e\}=\{\Delta f_e\} \tag{3}$$

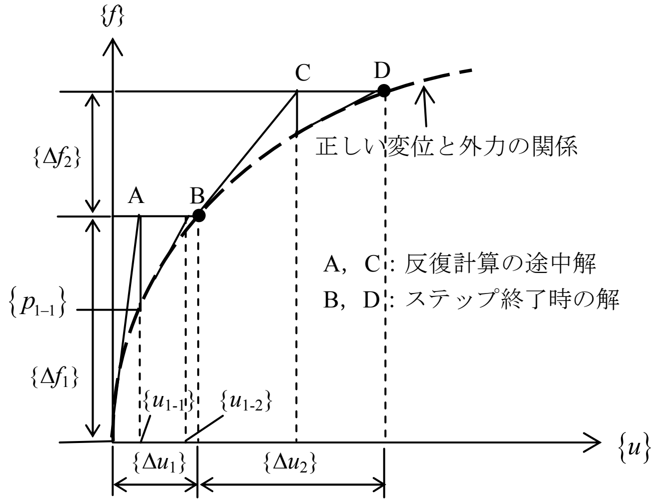
ここで｛Δu_e｝および｛Δf_e｝は各ステップで生じる（要素内）変位増分ベクトルおよび外力増分ベクトルである．その時点までに蓄積された外力｛f｝や変位｛u｝などの物理量は，次式のように増分の積み重ねによって計算される．

$$\{f\}=\sum_i^n\{\Delta f_i\},\quad \{u\}=\sum_i^n\{\Delta u_i\} \tag{4}$$

ただし n はステップ数である．式(3)の剛性マトリクスは，｛f_e｝と｛u_e｝の関係を表す曲線の”接線”に相当することから，正しくは要素接線剛性マトリクスなどと呼ばれる．



(a)　陽解法の考え方（3 ステップ分を表示）



(b)　陰解法の考え方（2 ステップ分を表示）

Fig.2　陽解法および陰解法における増分計算の考え方

さて，陽解法では各ステップでの非線形性を無視しているため，式(3)と(4)で求められた物理量は力の釣り合い，すなわち式(2)（を全ての要素で重ね合わせたもの）を満たす保証はない．言い換えれば，Fig.2(a)のように陽解法では解が変位と外力の正しい関係から逸脱する可能性がある．それに対して陰解法は，この不釣り合い力を無視せずに各ステップでの非線形性を考慮して計算を進める方法である．この場合各ステップでは，Fig.2(b)のように反復計算を用いることで力の釣り合いを満足させながら計算が進められる．例として，図中の一ステップ目における解析の流れを以下に示す．

(a)　外力増分{Δf_1}を与えて剛性方程式を解くことにより，点 A の外力{f} = {Δf_1}および変位{u} = {$u_{1\text{-}1}$}を得る．（ここまでは陽解法と同じ計算である．）

(b)　式(2)により{$u_{1\text{-}1}$}に対応する内力{$p_{1\text{-}1}$}を求め，{$p_{1\text{-}1}$} = {f}（内力=外力）が満たされているか調べる．

(c)　内力≠外力の場合，再び剛性マトリクスを組み立てて不釣り合い力{f} - {$p_{1\text{-}1}$}を外力増分として剛性方程式を解く．（初期の剛性マトリクスを引き続き用いる場合もある）

(d)　以上の作業を不釣り合い力が十分小さくなるまで（点 B に至るまで）繰り返す．

以上のように陰解法では，各ステップで接線剛性方程式を何度も解くことで力の釣り合いを満たしつつ計算を進める．したがって式(3)から得られる変位増分は必ずしもそのステップで生じる変位増分{Δu_1}とは一致しない．なお以下では，”増分”は式(3)を解くことで生じる増分を，また”ステップ幅”はそのステップ全体で生じる増分を表すこととする．陽解法ではステップ幅と増分が一致する．

陰解法は，場合によっては反復計算がなかなか終わらない(釣り合いが取れない)などのトラブルがつきものだが，解析精度の観点からは陽解法に比べて高い．なお，最近では陽解法でも線形近似が成り立つ範囲内で不釣り合いを補正することで，解析精度を向上させる試みも提案されている(文献 4，P.114)．

以上が弾塑性 FEM における基本的な計算の進め方である．次章以降では，3 つの非線形性の具体的な取り扱い方法について考える．

3.　材料非線形の取り扱い

前章で示したように，接線剛性方程式を解く際は解法によらず剛性マトリクスが変わらないことを前提とする．そのため仮に増分中にある積分点で降伏条件が満たされても，途中で[D]マトリクスの更新はできない．一方で[D]マトリクスを適切に更新しないと，解析精度の大きな低下を招く．そこで以下ではこの問題の対処法について考える．

まず，陽解法の場合を考える．各ステップの線形性を満たしつつ[D]マトリクスを適切に更新するには，降伏する瞬間とステップ終了のタイミングが一致するようにステップ幅を適宜調整すればよい．つまり，**Fig.3** に示すように降伏条件が満たされた時点（点 a）でステップ 1 の計算を打ち切り，その上で新しい[D]マトリクスと[B]マトリクスを用いて剛性マトリクスを組み立てて，次ステップの計算を行う．これにより増分中の弾塑性状態変化の発生を回避する

ことができる．図中では，初めのステップ幅に対応する増分を“試験的な増分”，降伏条件が満たされる瞬間までの増分を“本来の増分”と呼んでおり，本来の増分が実際に各ステップで採用される増分である．本手法では，変形に応じてステップ幅が順応的に変わるため，最終的なステップ数は当初設定したステップ数とは異なるという特徴がある．

Fig.3 における r は試験的な増分と本来の増分の比であり，これが求まれば本来の増分を決定できる．以下では，比 r の計算方法を考える．**Fig.4** に応力平面と降伏曲線を模式的に示す．ステップ開始時に点 A の応力状態 $\{\sigma_\mathrm{A}\}$ にある積分点において，試験的な増分により応力増分 $\{\Delta\sigma_\mathrm{AB}\}$ が発生したとする．このとき，$\{\Delta\sigma_\mathrm{AB}\}$ が降伏曲線を横切る瞬間，つまり応力増分が点 C に達する瞬間に降伏条件が満たされる．そこで点 C に達するまでを本来の増分と考えると，$\{\Delta\sigma_\mathrm{AB}\}$ と $\{\Delta\sigma_\mathrm{AC}\}$ の（各成分同士の）比が r に相当する．点 B，C の応力 $\{\sigma_\mathrm{B}\}$，$\{\sigma_\mathrm{C}\}$ はそれぞれ次式で与えられる．

$$\begin{aligned}\{\sigma_\mathrm{B}\} &= \{\sigma_\mathrm{A}\} + \{\Delta\sigma_\mathrm{AB}\},\\ \{\sigma_\mathrm{C}\} &= \{\sigma_\mathrm{A}\} + \{\Delta\sigma_\mathrm{AC}\} = \{\sigma_\mathrm{A}\} + r\{\Delta\sigma_\mathrm{AB}\}\end{aligned} \tag{5}$$

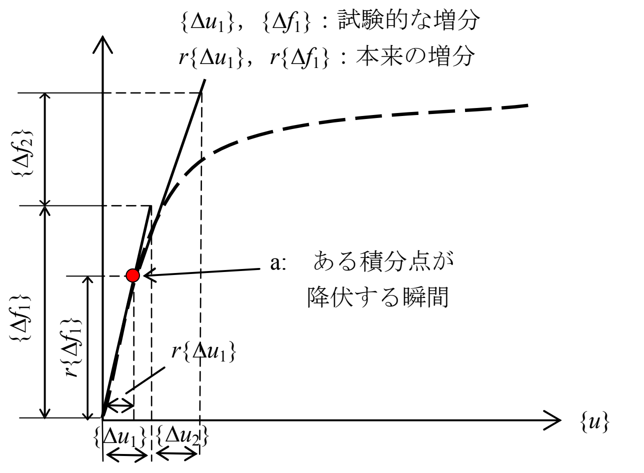
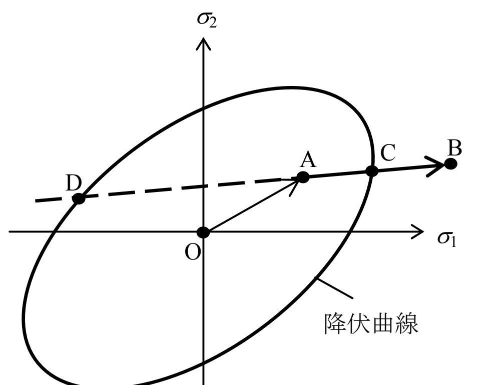


Fig.3　陽解法における材料非線形の取り扱い（r_min 法）



A：増分前の応力
B：試験的な増分後の応力
C：応力増分と降伏曲線の正側の交点
D：応力増分と降伏曲線の負側の交点

Fig.4　応力増分と降伏曲線の模式図

例えば Mises の降伏条件を仮定すると，式(5)第 2 式を降伏条件式に代入して r について解くことで次式が得られる．

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{6}$$

ただし

$$a = \frac{3}{2}\left\{\left(\Delta\sigma_x'\right)^2 + \left(\Delta\sigma_y'\right)^2 + \left(\Delta\sigma_z'\right)^2 + 2\left(\Delta\tau_{xy}{}^2 + \Delta\tau_{yz}{}^2 + \Delta\tau_{zx}{}^2\right)\right\}$$

$$b = 3\left(\sigma_x'\Delta\sigma_x' + \sigma_y'\Delta\sigma_y' + \sigma_z'\Delta\sigma_z' + 2\left(\tau_{xy}\Delta\tau_{xy} + \tau_{yz}\Delta\tau_{yz} + \tau_{zx}\Delta\tau_{zx}\right)\right)$$

$$c = \frac{3}{2}\left\{\left(\sigma_x'\right)^2 + \left(\sigma_y'\right)^2 + \left(\sigma_z'\right)^2 + 2\left(\tau_{xy}{}^2 + \tau_{yz}{}^2 + \tau_{zx}{}^2\right)\right\} - \left(\sigma_Y\right)^2$$

である．また $\{\sigma_\mathrm{A}\}$ の偏差成分を（σ_x'　σ_y'　σ_z'　…），$\{\Delta\sigma_\mathrm{AB}\}$ の偏差成分を（$\Delta\sigma_x'$　$\Delta\sigma_y'$　$\Delta\sigma_z'$　…）などと表記している．σ_Y は降伏応力である．

式(6)から求まった r を用いることで，点 C における各物理量は以下のように計算できる．

$$\begin{aligned}\{f_\mathrm{C}\} &= \{f_\mathrm{A}\} + r\{\Delta f_\mathrm{AB}\}\\ \{u_\mathrm{C}\} &= \{u_\mathrm{A}\} + r\{\Delta u_\mathrm{AB}\}\end{aligned} \tag{7}$$

そして次ステップでは，この積分点は塑性域へ移行したと定義した上で剛性方程式を組み立てる．

なお式(6)から明らかなように，r には二つの解が存在する．これは Fig.4 に示すように応力増分ベクトルは点 C と点 D の二点で降伏曲線を横切るためである．このとき，点 D は応力増分の向きとは反対方向に延長したときの交点であり，物理的に無意味である．したがって二つの解のうち，負の解は無視して正の解を r として採用すれば良い．

式(6)の正の解が $r > 1$ となる場合は点 C が点 A と点 B の間にない場合であり，そのステップ中には降伏しないことを示す．したがってこの場合は $r = 1$（試験的な増分=本来の増分）とする．以上の関係より，r が計算上で有意なのは $0 \le r \le 1$ の範囲内にある場合である．

実際の成形解析では，一ステップ中に複数の積分点が同時に降伏する場合がある．そこで実際には，上記の計算を全ての積分点に対して行いその中で最も小さい r を選んで本来の増分を決定する．このような計算方法を r ミニマム（r_min）法と呼ぶ[3), 4)]．r_min 法は「区間内での線形性を保つ」ことを目的とした増分幅制限法であるので，実用的にはこの方法は後述の幾何学的非線形性や接触非線形性などにも拡張して用いられている．このように各種の非線形性に r_min 法を拡張した手法を，「一般化された r_min 法」と呼ぶこともある．

一方陰解法の枠組みで計算する場合は，Fig.2(b)で示した反復計算の中で処理する方法が一般的である．詳細な定式化は省略するが，おおむね以下のような考えに基づく．

(a)増分前の状態に基づいて，試験的な増分を計算する．（ここまでは陽解法と同じである．）

(b)増分中に降伏条件が満たされた場合，弾塑性状態変化を無視しているため応力は実際よりも高くなる．そこで適切に状態変化させた場合を想定して応力値を再調整する．

(c)その結果内力と外力の不釣り合いが発生するので，それを反復計算により消去する．

以上の考え方を採用した手法として，Radial return 法や Return mapping 法などがよく用いられる[2), 3), 4)]．

なお，弾塑性体の変形はひずみ経路に大きく依存する．したがって FEM 解析においてもその再現が重要である．陰解法では反復計算により力の釣り合いを満足しながら計算を進めるため，ステップ幅を大きく設定できるとしばしば言われる．しかしながら，反復計算中のひずみ経路が実際のひずみ経路を再現している保証はなく，むやみにステップ幅を大きくすることは避けるべきである．例えばプレス成形解析において，ダイ肩半径が5mm の問題に対して一ステップあたりでパンチを5mm 押し込んだとする．この場合，部位によってはフランジ部から縦壁へ一ステップで移動し，ダイ肩部での曲げ曲げ戻し変形を経ない可能性がある．これは当然解析精度の低下につながる．したがって弾塑性 FEM では，解法によらずひずみ経路を適切に再現しうるステップ幅を選択することが重要である．

4. 幾何学非線形の取り扱い

4. 1　配置と剛体回転

変形が微小であることを前提とした理論を微小変形理論，幾何学非線形を考慮した理論を有限変形理論などと呼ぶ．微小変形理論と有限変形理論の違いは主として，“配置の区別”と“剛体回転”の有無に集約できる．以下にそれぞれの考え方を概説する．

配置とは，簡単に言えばある瞬間での物体の形状である．例として，一辺の長さが D の正方形断面を持つ弾性棒が一軸引張を受ける時の変形を考える．微小変形に基づく材料力学では，荷重 P と伸びΔl の関係は次式で与えられる．

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P}{DD} = E\frac{\Delta l}{L} \quad \Leftrightarrow \quad P = \frac{DDE}{L}\Delta l \tag{8}$$

ただし E，L はそれぞれ棒のヤング率，初期長さを表す．式(8)では，変形に伴う断面積変化は無視できる（真応力≈公称応力）と仮定することで断面積を DD としている．この仮定は，変形前後での配置の変化を無視することに相当する．一方変形が大きくなると 断面積変化は無視できない（真応力≠公称応力）．そこで断面積変化を考慮して荷重 P と伸びΔl の関係を求めると，次式のようになる．

$$\sigma = E\varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{P}{dd} = E\frac{\Delta l}{L} \quad \Leftrightarrow \quad P = DDE\left(1 - \nu\frac{\Delta l}{L}\right)^2 \frac{\Delta l}{L} \tag{9}$$

ただし ν はポアソン比である．また d は変形後の一辺の長さであり，次式で与えている．

$$d = D(1 - \nu\varepsilon) = D\left(1 - \nu\frac{\Delta l}{L}\right) \tag{10}$$

変形が大きくなると $\nu\Delta l/L$ が無視できないため，荷重と伸びの関係は微小変形の場合とは大きく異なる．

一方剛体回転とは，変形を伴わない回転のことである．例として，**Fig.5** のように回転する棒を考えてみよう．棒は伸縮しない（$l = L$）として微小変形理論に基づくひずみ[16)]によりこの変形を評価すると，次式のようになる．

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{l\cos(\theta) - L}{L} = \cos(\theta) - 1 \tag{11}$$

回転が十分小さければひずみはゼロと近似できるが，回転が大きいと伸縮しなくてもひずみが発生してしまう．この不整合は，微小変形理論では剛体回転も微小と仮定している[16)]ことに起因する．そこで大きな回転を伴う問題では，次式のように有限変形理論に基づくひずみを用いる必要がある（詳細な導出は省略する）．

$$e_x = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\} + \frac{\partial u}{\partial x} \tag{12}$$

式(12)は変形前の配置を基準とした微分であり，Green – Lagrange ひずみと呼ばれる．式(12)を用いて Fig.5 の様子を評価すると，次式のように棒がどれだけ回転してもひずみは発生しない．

$$e_x = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{l\cos(\theta) - L}{L}\right)^2 + \left(\frac{l}{L}\sin(\theta)\right)^2\right\} + \frac{l\cos(\theta) - L}{L} = 0 \tag{13}$$

以上のように，変形や回転が大きい問題では微小変形理論では無視されてきた配置の変化および剛体回転を考慮することが極めて重要である．

ところで，多くの有限変形理論の教科書では冒頭で次式の変形勾配テンソル $\boldsymbol{F}$ とその（右）極分解が説明される．

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{X}}, \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}\boldsymbol{U} \tag{14}$$

ただし $\boldsymbol{X}$ および $\boldsymbol{x}$ はそれぞれ変形前後の配置に関する位置ベクトル，また $\boldsymbol{R}$ および $\boldsymbol{U}$ は直交テンソルおよび正値対称テンソルである．第一式は変形前後で配置を厳密に区別することを示し，また第二式は物体の変形は剛体回転（$\boldsymbol{R}$）と伸縮（$\boldsymbol{U}$）に分解できることを示す．このように有限変形理論では，配置と剛体回転の考え方が冒頭で導入された上で理論が展開される．冒頭でこのような厳密な定義があるか否かが，微小変形理論と有限変形理論の決定的な違いと考えて良い．

4. 2　剛体回転が応力に及ぼす影響

前節で示した剛体回転の議論は，ひずみだけでなく応力にも当てはまる．例として，Fig.5 において回転前の棒が x 方向に引張荷重を受けて次の応力が発生しているとする．

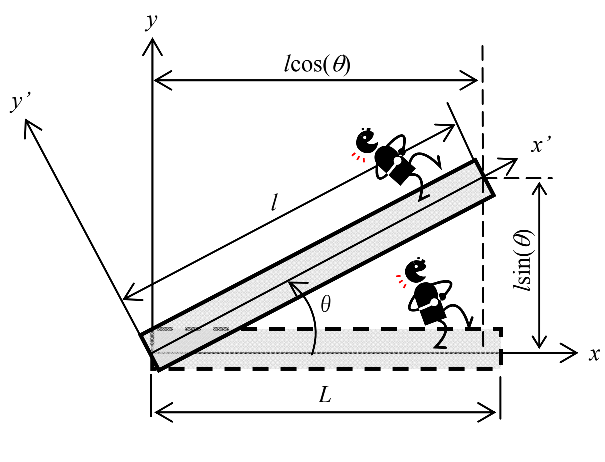


Fig.5　回転を受ける棒

$$\left.\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\right|_{\text{回転前}} = \begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{15}$$

この状態を保ったまま棒が 90° 剛体回転したとすると，回転後は引張方向が y 方向になるので回転後の応力成分は次のようになるはずである．

$$\left.\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \sigma_{xy}\\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy}\end{bmatrix}\right|_{\text{回転後}} = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \sigma\end{bmatrix} \tag{16}$$

一方，回転中に棒は変形しないのでひずみは発生しない．したがって当然回転中に発生する応力増分もゼロなので，回転後（増分後）の応力は回転前（式(15)）と変わらないはずである．この考察は明らかに式(16)と矛盾する．

このパラドクスの原因は，応力を観測する“視点”（厳密には“基準枠”）にある．式(16)を導く際には，回転する棒を固定された視点（簡単に言えば，空間固定された xy 座標系）から眺め，かつ応力成分を記述していた．一方応力成分が変わらないとした後者の考え方は，Fig.5 のように棒に乗って棒とともに回転する人（棒とともに回転する $x'y'$ 座標系）から観測した場合に相当する．我々が地球の回転を感知できないように，この人には棒の回転が感知できないので，$x'y'$ 座標系で記述された応力成分は次式のように回転前後で変わらない．

$$\left.\begin{bmatrix}\sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'}\\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'}\end{bmatrix}\right|_{\text{回転前}} = \left.\begin{bmatrix}\sigma_{x'x'} & \sigma_{x'y'}\\ \sigma_{y'x'} & \sigma_{y'y'}\end{bmatrix}\right|_{\text{回転後}} = \begin{bmatrix}\sigma & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} \tag{17}$$

このように，物体とともに回転する人の視点から観測した応力を共回転応力と呼ぶ．また，その応力速度 $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ は客観性のある応力速度とも呼ばれ，その具体形として次式の Jaumann 応力速度が用いられることが多い．

$$\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{W}\cdot\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{W} \tag{18}$$

ただし $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は空間固定された視点から観測した応力速度，$\boldsymbol{W}$ はスピンテンソルである．有限変形理論における弾塑性構成式では，応力速度として $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ ではなく $\overset{\circ}{\boldsymbol{\sigma}}$ を用いることで剛体回転が応力に影響しないように工夫している．

式(18)は，物体はスピンテンソル $\boldsymbol{W}$ とともに回転することを仮定している．しかしながら物体が”何とともに回転するか？”については様々な解釈があり，$\boldsymbol{W}$ 以外にも様々なテンソルを用いた応力速度が提案されている [1), 8)]．一方板材成形では，材質の異方性が成形性に大きく影響することが知られている．異方性主軸の回転は物体の回転と密接に関連するため，客観性のある応力速度の選択にはその観点からの考察も重要である．しかしながら未だ解明されていない問題が多く，現在でも研究が続けられている．

5.　接触非線形の取り扱い

5.1　接触のモデル化

FEM では，板材だけでなく工具面形状も **Fig.6**(a)のように要素分割して表現するのが一般的である．そして，Fig.6(b)に示すように板材の節点（材料節点）が幾何学的に工具面の要素（工具要素）に接触したときに，工具と板材が接触したと判定される．工具要素と接触した材料節点は，工具内部に潜り込まないように変位の工具面法線方向（Fig.6(b)の x' 方向）成分が拘束される．接触中の材料節点はその後節点力（工具反力に相当）が監視され，節点力が生じている間は接触状態が持続，節点力がゼロになったときに材料節点は工具から離脱すると判定される．そして離脱後には変位拘束は与えられない．以上が接触解析の大まかな流れである．

工具と接触した材料節点に変位境界条件を与える方法は，例えば片持ち梁の固定端を拘束する場合などと全く同じである．拘束する方向（x' 方向）が成分表示に用いられる座標軸（xy 座標軸）とは必ずしも一致しないので，変位拘束は一見煩雑そうである．しかしこの問題は，接触した材料節点に関する成分を xy 座標系から $x'y'$ 座標系へ変換した上で剛性方程式を組み立てれば，変位の x' 成分のみを拘束すればよくなるので容易に解決できる．

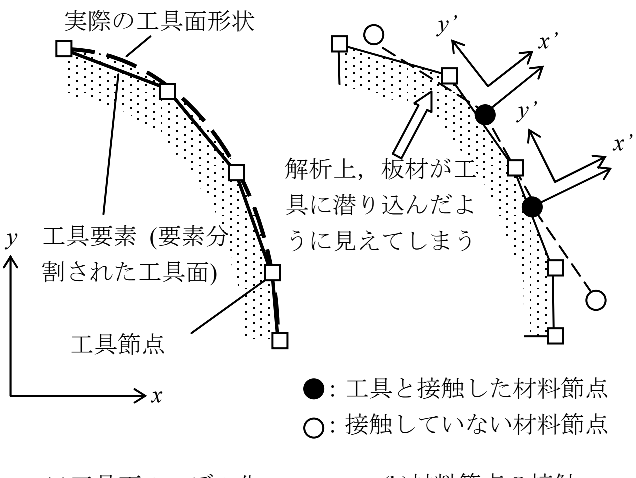
ところで汎用ソフトウェアでは，接触による変位拘束の導入にペナルティ法やラグランジュ未定乗数法が用いられる場合が多い [2), 3), 4)]．ペナルティ法とは簡単に言えば，変位境界条件を与える代わりに工具内部に潜り込もうとする変位成分に対して非常に大きな抵抗力を加える方法である．ペナルティ法は，変位拘束の条件を剛性方程式へ導入する際の計算処理を簡略化できるという特徴がある．一方でペナルティ法では，ペナルティ数と呼ばれるパラメータにより抵抗力を決めており，これは解析前に予め設定する必要がある．ペナルティ数は解析結果に大きな影響を及ぼす場合があり，その設定には注意を要する．それに対してラグランジュ未定乗数法は，接触による拘束を付帯条件として方程式を解く数学的手法である．この手法は計算処理が少し煩雑でありまたペナルティ法に比べて計算時間が余分にかかってしまう一方で，境界条件を厳密に満たすことができる利点がある．

なお以上のように，接触による非線形性は境界条件からもたらされる場合が多いため，境界条件非線形などと呼ばれる場合もある．ただし，摩擦のように境界条件が変化しなくても非線形性をもたらす現象もあり，境界条件はあくまで数ある因子の一つであることを付記しておく．

5.2　接触に関する特筆事項

本節では接触に関連したいくつかの特筆事項を紹介する．

(1)　要素分割後の工具面は，当然実際の滑らかな工具面形状とは異なる（Fig.6(a)）．そのため，解析において工具面



(a)工具面のモデル化　　(b)材料節点の接触

Fig.6　2 次元問題を例とした接触のモデル化

上を移動する材料節点は実際とは異なる経路を辿る可能性があり，またそれが解析結果に影響する場合がある[17), 18)]．したがって工具モデルについても，できるだけ細かく要素分割したり何らかの形状補間を行うなど，可能な限り高精度にモデル化することが重要である．

また，板材モデルにも同様の指摘ができる．例えばハット曲げのようにダイ肩に板材がなじむ過程を解析するとき，板材の要素サイズが大きいと滑らかな曲がりを表現できず，また Fig.6(b)のようにあたかも板材が工具に潜り込んだように解析される．したがって，もちろんできるだけ細かく分割することが大前提だが，大きな曲げ変形が想定される部位では特に留意して要素分割することが重要である．

(2)　剛体回転は工具反力ベクトルにも大きな影響を及ぼす．**Fig.7** のように材料節点がダイ肩上を移動する場合を考えよう．ダイ肩部では曲率の影響で部位によって工具面法線ベクトルの向きが異なるため，材料節点の移動に伴って変位拘束する向きも x'^{t} から $x'^{t+\Delta t}$ へと変化する．摩擦がない場合は工具反力ベクトルの向きは $\boldsymbol{f}^{t}$ および $\boldsymbol{f}^{t+\Delta t}$ のように工具面法線ベクトルの向きと一致するはずなので，たとえ工具反力ベクトルの大きさが変わらなくてもその向きは工具曲率に応じて $\boldsymbol{f}^{t}$ から $\boldsymbol{f}^{t+\Delta t}$ へと回転させる必要がある．しかしながら回転角は工具形状から決まるため，例えば以下のような方法によりその情報を剛性方程式に組み込む必要がある．まず工具反力 $\boldsymbol{f}$ の速度を以下のように与える．

$$\dot{\boldsymbol{f}} = \left(\sum_{i}^{3} f_i \boldsymbol{e}_i\right)^{\cdot} = \sum_{i}^{3}\left(\dot{f}_i \boldsymbol{e}_i + f_i \dot{\boldsymbol{e}}_i\right) \tag{19}$$

ただし $\boldsymbol{e}_i$ は工具面法線ベクトルとともに回転する $x'y'$ 座標系（Fig.7）の基底ベクトル，f_i は $x'y'$ 座標系を参照した成分である．$\boldsymbol{e}_i$ が工具面法線ベクトルの変化を表すので，工具曲率を考慮した上でこれを変位の関数として定式化し，剛性方程式に組み込めばよい[17)]．

(3)　板成形解析でよく用いられるシェル要素は板厚中央面にしか節点を持たず，また板厚方向応力成分も無視されている．さらに板厚も仮想的にしか持たない．これらの仮定は接触解析上次のような欠点となる．第一に，例えばダイとブランクホルダ（BF）で挟まれたフランジ部では，各材料節点にはダイか BF のいずれかとの接触に関する境界条件しか与えられない．第二に，BF 力や決め押しを与えてもそれによる応力上昇は原理的に再現できない．このように，実はプレス成形解析には不向きな特徴を有しているといえる．最近ではこの問題を解決するため，ソリッド要素の特徴を兼ね備えたシェル要素（ソリッド–シェル要素）[例えば 19)]の開発が進められている．今後の研究に期待したい．

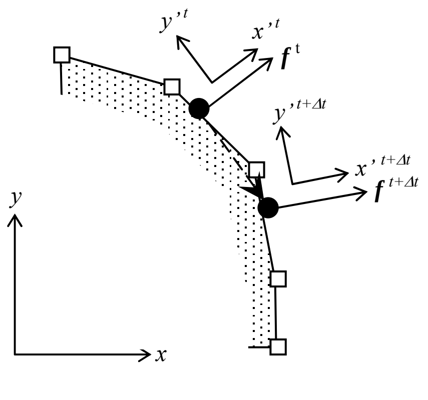


Fig.7　ダイ肩上を移動する材料節点

6.　さいごに

本稿では，プレス成形解析そのものよりもその解析を支える基礎理論の考え方に焦点を当てて解説した．本稿で述べた内容は必ずしもプレス成形特有の理論ではなく，弾塑性 FEM による塑性加工解析全般の理論と考えていただいて差し支えない．本稿では紙面の都合上詳細な式導出は割愛した．参考文献には本誌をはじめ比較的入手しやすい文献を中心に挙げているので，式導出の詳細についてはこれらの文献を参照いただきたい．なお冒頭でも述べたように，本稿では概念的な説明を重視したため理論的には必ずしも厳密ではない部分もある．その点はご了承いただきたい．本稿が，参考文献で挙げたより厳密な解説を理解する上で足がかりとなれば本望である．

一方で，筆者に与えられた“プレス加工の解法”というテーマを考えると，静解析と動解析の違い[3), 11), 18)]，ビードやしわ押さえ，摩擦のモデル化[4)]，材料モデルの導入法[4)]などについて言及することができず，物足りない内容となってしまった．別途解説する機会があれば幸いである．最後になるが，筆者の不勉強により記述の誤りを恐れる．読者諸賢のご批判を仰ぎたい．

参　考　文　献

1)　久田俊明：非線形有限要素法のためのテンソル解析の基礎，(1992)，丸善.

2)　久田俊明・野口裕久： 非線形有限要素法の基礎と応用，(1996)，丸善.

3)　日本塑性加工学会編：非線形有限要素法，（1994），コロナ社.

4)　日本塑性加工学会編：加工プロセスシミュレーションシリーズ 1 板成形, (2004)，コロナ社.

5)　牧野内昭武：塑性と加工，**23**-256（1982），375-384.

6)　川井謙一：塑性と加工，**24**-267（1983），332-342.

7)　牧野内昭武：塑性と加工，**24**-267（1983），343-351.

8)　後藤学：塑性と加工，**27**-300（1986），25-33.

9)　仲町英治：塑性と加工，**31**-351（1990），456-461.

10)　今谷勝次・高橋進：塑性と加工, **37**-421（1996）, 160-165.

11)　牧野内昭武：塑性と加工，**39**-445（1998），111-116.

12)　浜孝之・牧野内昭武：塑性と加工，**46**-529（2005），124-129.

13)　麻寧緒・杉友宣彦：塑性と加工，**47**-540（2006），29-34.

14)　吹春寛：塑性と加工，**48**-558（2007），610-614.

15)　吉村英徳：塑性と加工，**55**-636（2014），117-124.

16)　瀧澤英男：塑性と加工，**54**-634（2013），967-971.

17)　浜孝之・高村正人・牧野内昭武・Cristian Teodosiu・宅田裕彦：塑性と加工，**48**-552（2007），61-65.

18)　浜孝之：塑性と加工，**51**-598(2010)，1017-1022.

19)　Cardoso, R.P.R., Yoon, J.W., Mahardika, M., Choudhry, S., Alves de Sousa, R.J., & Fontes Valente, R.A.: Int. J. Numer. Meth. Eng., **75**(2008), 156-187.