RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 33–46

p 進簡約群の法 p 放物型誘導表現の構造について (On a structure of modulo p parabolically induced representations of p-adic reductive groups)

By

阿部 紀行 (Noriyuki ABE)*

Abstract

Henniart，Herzig，Vignéras との共同研究により得られた，p 進簡約群の法 p 放物型誘導表現の構造定理について報告する．

This is an announcement of a joint work with Henniart, Herzig and Vignéras. We give a structure theorem of modulo p parabolically induced representations of p-adic reductive groups.

§1. はじめに

p を素数，F を p 進体，$\overline{F}$ をその代数閉包，ℓ を p と異なる素数とし，同型 $\mathbb{C} \simeq \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ を固定する．局所 Langlands 対応 [HT01, Hen00, Sch13] は

$$\bigcup_n \{\, \mathrm{Gal}(\overline{F}/F) \text{ の } \overline{\mathbb{Q}_\ell} \text{ 上の Frobenius 半単純な } n \text{ 次元連続表現の同型類} \,\}$$

と

$$\bigcup_n \{\, \mathrm{GL}_n(F) \text{ の } \mathbb{C} \text{ 上の既約スムーズ表現の同型類} \,\}$$

との自然な一対一対応を主張する．前者の集合にはその一部分として既約表現の集合があり，一般の表現はその拡大として得られる．これに対応して，後者の集合にはその一部分として超尖点表現があり，一般の既約スムーズ表現はそこからの放物型誘導表現の部分商として得られる．なお，スムーズ表現の定義は以下の通りである．

Received March 31, 2014. Revised November 15, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 22E50.
Key Words: *modulo p representations, supersingular, parabolic induction.*
*北海道大学創成研究機構，Creative Research Institution (CRIS), Hokkaido University, North 21, West 10, Kita-ku, Sapporo 001-0021, Japan.

© 2015 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

定義 1.1. 一般に G を F 上の簡約群の F 有理点からなる群とする．（これには完全不連結な位相を持つ位相群の構造が入る．）G の表現 (π, V) がスムーズであるとは，任意の $v \in V$ に対して v の固定部分群 $\{g \in G \mid \pi(g)v = v\}$ が開であることである．

注意 1.2. V に離散位相を入れて考える．このとき，(π, V) がスムーズであることと連続表現である，つまり $(g, v) \mapsto \pi(g)v$ により定義される $G \times V \to V$ が連続であることは同値である．

なお，G の既約スムーズ表現を考えている時は，主に無限次元表現を念頭に置いている．これは実際に現れる表現の多くが無限次元であるためであり，たとえば $\mathrm{GL}_n(F)$ の有限次元既約スムーズ表現は全て $\det\colon \mathrm{GL}_n(F) \to F^\times$ を経由する．

以下，単に表現と言えばスムーズ表現を指すこととする．また，(π, V) と組では書かず，π のみで表現を表すことにする．たとえば，$v \in V$ の代わりに $v \in \pi$ などと書く．

$G = \mathrm{GL}_n(F)$ とおく．G の部分群 P は，そのある共役が上三角元からなる部分群 $B = \{(g_{ij}) \in \mathrm{GL}_n(F) \mid g_{ij} = 0\ (i > j)\}$ を含むとき放物型部分群と呼ばれる．また共役をとらずに B を含むとき，標準放物型部分群と呼ばれる．標準放物型部分群は有限個しかなく，$n = n_1 + \cdots + n_r$ を満たす組 $(n_1, \ldots, n_r)$ によりパラメトライズされる．具体的には，$M = \mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(F)$ を対角に $\mathrm{GL}_n(F)$ に埋め込んだ時，B と M が生成する部分群を考えることで対応が得られる．このとき，N を「M の外」のみからなる部分群，つまり

$$N = \left\{ (g_{ij}) \in B \;\middle|\; \begin{array}{l} n_{ii} = 1\ (1 \le i \le n), \\ n_{ij} = 0\ (\text{ある } k \text{ に対して } n_1 + \cdots + n_{k-1} \le i < j \le n_1 + \cdots + n_k) \end{array} \right\}$$

とすると，$P = M \ltimes N$ となる．よって，M の表現が与えられれば，$P \to P/N \simeq M$ と合成することで P の表現を得ることができる．

σ を M の表現とし，上のようにして P の表現と見なす．このとき放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ を，空間

$$\{f\colon G \to \sigma \mid f \text{ は局所定数，} f(pg) = \sigma(p)f(g)\ (g \in G, p \in P)\}$$

に対して $g \in G$ を $(gf)(x) = f(xg)$ と作用させることで定める．

G の表現 π が許容であるとは，任意の開部分群 $K \subset G$ に対してその固定部分 π^K が有限次元であることである．

定義 1.3. G の既約許容表現 π が超尖点であるとは，任意の真の放物型部分群 $P = MN \subsetneq G$ と M の既約許容表現 σ に対して，π が $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の部分商として現れないことである．

注意 1.4. 超尖点性の定義には，π 及び σ に許容性を課さないのが普通である．$\mathbb{C}$ 係数の表現に対しては，既約ならば許容であることを示すことができるため，両者の間に差異はない．$\overline{\mathbb{F}_p}$ 上の場合も，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合は同じことが成り立つが，一般の場合には知られていない．後で述べる定理では，超尖点性の定義を上記のようにしておかないと（少なくとも現在では）証明をすることができない．

$\sigma_1, \dots, \sigma_r$ をそれぞれ $\mathrm{GL}_{n_1}(F), \dots, \mathrm{GL}_{n_r}(F)$ の既約表現とする．このとき，ベクトル空間としてのテンソル積 $\sigma = \sigma_1 \otimes \cdots \otimes \sigma_r$ に $\mathrm{GL}_{n_1}(F) \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}(F)$ の表現の構造を

$$\sigma(g_1, \dots, g_r) = \sigma_1(g_1) \otimes \cdots \otimes \sigma_r(g_r) \quad (g_i \in \mathrm{GL}_{n_i}(F))$$

により与えることができる．（この表現を外部テンソル積表現と呼び，$\sigma_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_r$ と書く．）すると σ に対して放物型誘導表現 $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ を考えることができる．Galois 表現の側では，それぞれ $n_1, \dots, n_r$ 次元の与えられた既約表現を組成列に持つ n 次元表現を考えていることになる．もちろんそのような n 次元表現は一意にあるわけではない．対応して $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ も既約な表現を与えるわけではなく，その部分商がどのくらいあるかが，そのような n 次元 Galois 表現がいくつあるかに対応する．

以上は Galois 群及び $\mathrm{GL}_n(F)$ の標数 0 の体（$\mathbb{C}$ または $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$）係数の表現についてである．一方，これらを標数 p の体で考える，法 p Langlands 対応が考えられており，$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合にはかなりのことがわかりつつある [Bre10]．残念ながら一般の場合はその定式化すら不明な状態であるが，以上のような標数 0 の場合における類似から，放物型誘導表現の既約部分商を知ることが有用であることが推察される．

以下では，Hanniart，Herzig，Vignéras との共同研究 [AHHV14] に基づき，一般の連結 p 進簡約群 G に対して，その放物型誘導表現の構造について述べる．

§ 2. 記号と主定理

F を非アルキメデス的局所体，$\mathcal{O}$ をその整数環，κ を剰余体とし，素元 $\varpi \in \mathcal{O}$ を固定する．また p を κ の標数，q を κ の元の数とする．G を F 上の連結簡約群として，その F 有理点からなる群も同じ記号 G で書く．G の極小放物型部分群 B 及びその Levi 成分 Z を固定し，以下単に放物型部分群と言えば，B を含むものを考えることにする．また，B を含む放物型部分群 P に対して，しばしば「$P = MN$ を Levi 分解とする」と述べるが，このときには常に N は冪単根基であり，M は Z を含む簡約部分群であるとする．（Levi 分解であることすら断らず $P = MN$ と書くこともあるが，同様である．）また，以下表現と言えば常に $\overline{\mathbb{F}_p}$ 上のスムーズ表現を指すことにする．[AHHV14] の主定理は次の通りである．

定理 2.1. 以下が成り立つ．

1. 長さが有限かつ許容な表現の放物型誘導表現は長さが有限かつ許容である．
2. 任意の既約許容表現 π に対して，ある放物型部分群 $P = MN$ と M の超尖点表現 σ が同型を除き一意的に存在して，π は $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の部分商となる．
3. 放物型部分群 $P = MN$ と M の超尖点表現 σ に対して，$\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の組成因子は重複を持たず，その組成因子を具体的に記述することができる．

既約法 p 表現に対して超特異であるという概念が定義され（次節で定義する），[AHHV14] において定理 2.1 は次の二つの定理の帰結として得られている．

定理 2.2. 定理 2.1 において，超尖点を超特異に変えた定理が成り立つ．

定理 2.3. 既約許容表現に対して，超尖点表現であることと超特異表現であることは同値である．

定理 2.1，2.2，2.3 の間には導出関係があり，結論から言えば定理 2.2 の 2 の存在および 3（番号は定理 2.1 のもの）を示せば定理 2.1，2.2，2.3 がすべて導かれる．

- 定理 2.1 は定理 2.2 および定理 2.3 から得られる（明らか），
- 定理 2.2 における 1 は定理 2.2 の 2，3 から得られる．
- 定理 2.3 は定理 2.2 の帰結として得られる．
- 定理 2.2 の 2 の一意性は定理 2.2 の 3 から得られる．

定理 2.2，2.3 に関しては（よって定理 2.1 も）以下のような先行研究がある．$G = \mathrm{GL}_2$ の場合に Barthel-Livné [BL94, BL95] により，$G = \mathrm{GL}_n$ の場合に Herzig [Her11a] により，分裂型の場合に筆者 [Abe13] により，また D を F 上の中心単純環としたとき，$G = \mathrm{GL}_n(D)$，ただし $n \le 3$ の場合に Ly [Ly] により示されている．

定理 2.2 の 3 における記述を具体的に一般の G に対して与える．（後で GL_n の場合に具体的に記述する．）$S \subset Z$ を極大な分裂部分トーラスとし，$(X^*(S), \Phi, X_*(S), \check{\Phi})$ をそれに付随するルートデータとする．極小放物型部分群 B を固定しているので，正ルート系 $\Phi^+ \subset \Phi$ 及び単純ルートの集合 $\Delta \subset \Phi^+$ が定まる．Z は S の G における中心化群となる．放物型部分群は B を含むと仮定していたので，そのような放物型部分群は Δ の部分集合と一対一に対応する．Δ_P を P に対応する Δ の部分集合とする．これは，P の Levi 成分 M の単純ルートの集合と一致する．

σ を M の既約超特異表現とし，N を自明に作用させることで P の表現と見なす．このとき，P を含み，P の表現 σ が拡張される最大の放物型部分群 $P(\sigma)$ が存在する．対応する Δ の部分集合 $\Delta_{P(\sigma)}$ は次のように具体的に与えられる．$\alpha \in \Phi$ に対して，$U_\alpha \subset G$ を対応するルート部分群とし，G'_α を $U_\alpha, U_{-\alpha}$ から位相群として生成される部分群とする．（代数群として生成されたものとは一般に異なる．）このとき，

$$\Delta_{P(\sigma)} = \{\alpha \in \Delta \mid \langle \check{\alpha}, \Delta_P \rangle = 0,\ \sigma \text{ は } G'_\alpha \cap Z \text{ 上自明 }\} \cup \Delta_P$$

となる．この準備のもとで，定理 2.2 の 3 を精密に述べることができる．

定理 2.4. $P = MN$ を放物型部分群，σ を M の既約超特異表現とすると，$\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の既約部分商の集合と $P(\sigma) \supset Q \supset P$ を満たす放物型部分群 Q の集合との間には一対一対応が存在する．対応は，

$$Q \mapsto \mathrm{Ind}_Q^G \sigma / \sum_{Q' \supsetneq Q} \mathrm{Ind}_{Q'}^G \sigma$$

で与えられる．特に $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ が既約であることと，$P(\sigma) = P$ は同値である．

注意 2.5. この定理で述べられている法 p 表現の現象は，標数 0 の体係数の表現を考えているときと比べて大きく異なる点が多い．なお，標数 0 の体を係数とする表現に超特異表現の概念は存在しないため，以下では超尖点表現に関する定理を比較する．

1. $\mathrm{Ind}_{P(\sigma)}^G \sigma$ は $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の 0 でない部分表現であるので，$P(\sigma) \neq P$ ならば $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ が可約になることは明らかである．定理は，この「当たり前」の場合にのみ放物型誘導表現が可約になることを主張している．標数 0 の体を係数とする表現に対しては，このような事実は成り立たない．たとえば，$G = \mathrm{GL}_2$，$P = B$ を上三角元からなる部分群，$S = Z$ を対角行列からなる部分群とし，$\sigma_1, \sigma_2 \colon F^\times \to \mathbb{C}^\times$ をスムーズな指標とする．$\sigma \colon Z \to \mathbb{C}^\times$ を $\sigma(\mathrm{diag}(t_1, t_2)) = \sigma_1(t_1)\sigma_2(t_2)$ と定めたとき，$\mathrm{Ind}_B^G \sigma$ が可約であるための必要十分条件は $\sigma_1 = \sigma_2$ または $\sigma_1(t) = \sigma_2(t)|t|^2$ である [BH06, Chapter 3, 9.6., Irreducibility Criterion]．一方，$P(\sigma) = B$ または G であり，$P(\sigma) = G$ であるための必要十分条件は $\sigma_1 = \sigma_2$ となる．

2. 定理 2.1 の 2 における一意性も標数 p における特殊事情である．上記の GL_2 の例において，$\sigma'(\mathrm{diag}(t_1, t_2)) = \sigma_1(t_2)\sigma_2(t_1)|t_1 t_2^{-1}|$ と定めると，$\mathrm{Ind}_B^G \sigma$ と $\mathrm{Ind}_B^G \sigma'$ は同じ組成列を持つ [BH06, Chapter 3, 9.10]．よって $\sigma \neq \sigma'$ となるような σ に対して，$\mathrm{Ind}_B^G \sigma$ の既約部分商は 2 の一意性を満たさない．

   超尖点表現の定義から，任意の許容表現 π に対して，ある放物型部分群 P とその Levi 成分 M の超尖点既約表現 σ が存在し，π は $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の部分商として現れる．定理 2.1 の 2 はこの (P, σ) が共役を除き一意的になることを主張している．（なお，ここでは標準放物型部分群ではない P も考えることにした．）標数 0 の体を係数とする場合は，(P, σ) ではなく，(M, σ) の共役類が一意となることが知られている [BZ77, Therem 2.9]．（証明は法 p 表現の場合と異なり，既約表現の分類を必要としない．）

3. 定理 2.4 によれば，超尖点表現からの放物型誘導表現の組成因子は重複を持たないが，標数 0 の体係数においてはやはり反例がある [Zel80, 11.4 Proposition].

4. 定理 2.1 及び定理 2.4 により，一般の既約許容表現の分類を既約超尖点表現の分類に帰着させることができる．標数 0 の体を係数とする場合，$G = \mathrm{GL}_n$ の場合には Zelevinsky [Zel80] により同様の分類が与えられているが，一般の簡約群に対しては得られていないようである．

5. これらの現象の違いには，$\overline{\mathbb{F}_p}$ に値をとるような Haar 測度が存在しないことが大きな理由であると思われる．このことは技術的な困難をもたらし，事実複素係数の表現論を扱う際に強力な手段であった調和解析を用いることができず，たとえば指標の理論が存在しない．また，コンパクト群の表現の完全可約性が成り立たないため，反傾表現がうまく振る舞わない．そのため，定理の証明は，たとえば上記 Zelevinsky の証明と比べても大きく異なる．

$G = \mathrm{GL}_n$ の場合に $\Delta_{P(\sigma)}$ を具体的に書き下すと以下のようになる．S を対角行列からなる部分群とし，B を上三角元からなる部分群とする．$Z = S$ であり，標準的な記号を用いて，

$\Delta = \{e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n\}$ とかける．P を放物型部分群とすると，さきほどのようにその Levi 成分 M は適当な $n = n_1 + \cdots + n_r$ を満たす $n_1, \dots, n_r$ に対して $\mathrm{GL}_{n_1} \times \cdots \times \mathrm{GL}_{n_r}$ とかける．この分解に応じて，$\sigma = \sigma_1 \boxtimes \cdots \boxtimes \sigma_r$ と分解する．このとき，$\Delta_{P(\sigma)}$ は

$$\Delta_{P(\sigma)} = \{e_{n_1+\cdots+n_i} - e_{n_1+\cdots+n_i+1} \mid n_i = n_{i+1} = 1,\ \sigma_i = \sigma_{i+1}\} \cup \Delta_P$$

とかける．$1 \le i \le r$ が $n_i = n_{i+1} = 1$ を満たす時，その部分を一つにまとめることで，より大きな部分群を作ることができる．さらに，$\sigma_i = \sigma_{i+1}$ の場合はこの部分の表現を $\sigma_i \circ \det$ に取り替えることにより，σ をこの大きな放物型部分群に伸ばすことができる．このようにして，σ は $P(\sigma)$ に伸びる．

例えば，$n = 4$，$n_1 = 2$，$n_2 = n_3 = 1$ とし，$\sigma = \sigma_1 \boxtimes \sigma_2 \boxtimes \sigma_3$ は $\sigma_2 = \sigma_3$ を満たすとする．$n_2 = n_3 = 1$ であるので，σ_2 と σ_3 はともに指標であることに注意する．このとき $n_i = n_{i+1} = 1$，$\sigma_i = \sigma_{i+1}$ を満たす i は 2 のみであり，$P(\sigma)$ はこの n_2 と n_3 の部分をあわせた，$\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ を Levi 成分とする放物型部分群となる．上の記号では，$\Delta_{P(\sigma)} = \{e_1 - e_2, e_3 - e_4\}$．更に，$P(\sigma)$ の Levi 成分 $\mathrm{GL}_2 \times \mathrm{GL}_2$ の表現を $\sigma_1 \boxtimes (\sigma_2 \circ \det)$ と定めると，これは σ の $P(\sigma)$ への拡張を与える．

§ 3.　法 p 佐武変換と超特異表現

定理の主張を完全なものとするために，Herzig [Her11b] 及び Henniart-Vignéras [HV15] に基づき超特異表現の定義を与える．おおざっぱに言えば，既約許容表現はその佐武パラメータが 0 である時に超特異表現であると言われる．佐武パラメータを定義するために，法 p 佐武変換を定義する．

前節の通り，F 上の連結簡約群 G の極小放物型部分群 B とその Levi 成分 $Z \subset B$，Z の極大分裂部分トーラス S を固定し，$B = ZU$ を Levi 分解とする．S に対応するアパートからスペシャルな点をとり固定し，対応するスペシャルパラホリック部分群 K を考える．K は岩澤分解 $G = BK$ や B を含む放物型部分群 P の Levi 分解 $P = MN$ との整合性 $P \cap K = (M \cap K)(N \cap K)$ のような良い性質を満たす開かつコンパクトな部分群となっている [1]．V を K の既約表現とし，コンパクト台誘導表現 $\text{c-Ind}_K^G(V)$ を

$$\text{c-Ind}_K^G(V) = \{f\colon G \to V \mid \operatorname{supp} f \text{ はコンパクト，} f(kg) = kf(g)\ (k \in K, g \in G)\}$$

により定義すると，$\text{c-Ind}_K^G V$ は Frobenius 相互律 $\mathrm{Hom}_K(V, \pi) \simeq \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G V, \pi)$ を満たす．$\mathcal{H}_G(V) = \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_K^G(V))$ とおくと，よく知られているとおり $\mathcal{H}_G(V)$ は

$$\text{(1)}\quad \mathcal{H}_G(V) = \left\{ \varphi\colon G \to \mathrm{End}_{\overline{\mathbb{F}_p}}(V) \;\middle|\; \begin{array}{l} \operatorname{supp}\varphi \text{ はコンパクト，} \\ \varphi(k_1 g k_2) = k_1 \varphi(g) k_2\ (k_1, k_2 \in K, g \in G) \end{array} \right\}$$

という記述を持つ．

[1] 一般には極大コンパクト部分群ではない．

K はコンパクト群であり，その最大副 p 正規部分群による商 G_κ は F の剰余体 κ 上のある連結簡約群の κ 有理点のなす群となる．K の V への作用は $K \to G_\kappa$ を経由し [2]，よって有限体上の簡約群の表現論という古典的な対象に帰着される．$P = MN$ を放物型誘導表現の Levi 分解とし，$V_{N\cap K}$ を V の $N \cap K$ に関する余不変部分とする．古典的な理論により次が知られている（たとえば [HV15] の 5 節を参照）．

補題 3.1. $V_{N\cap K}$ は $M \cap K$ の既約表現．

よって，(G, K, V) を $(M, M\cap K, V_{N\cap K})$ に取り替えて，同様に $\mathcal{H}_M(V_{N\cap K})$ が定義される．

定義 3.2. 式 (1) による $\mathcal{H}_G(V)$ の記述を用いて，$S_G^M \colon \mathcal{H}_G(V) \to \mathcal{H}_M(V_{N\cap K})$ を

$$S_G^M(\varphi)(m) = \sum_{u\in(N\cap K)\backslash N} \varphi(um)$$

と定義する．S_G^M を法 p 佐武変換という．

定義から，S_G^M が環準同型を与えることはすぐに確認することができる．古典的な佐武対応（$\mathbb{C}$ 係数の場合）は，V が自明表現 $\mathbf{1}$ および $P = B$ の場合に

$$S_G(\varphi)(m) = \delta(m)^{-1/2} \int_N \varphi(um)du$$

と定義された．ただし δ は B のモジュラー関数であり，N 上の Haar 測度 dn は $\mathrm{vol}(N\cap K) = 1$ と正規化されている．モジュラー関数の値は p の整数冪であり，よって法 p では定義ができない．また $\overline{\mathbb{F}_p}$ に値をとる Haar 測度も存在せず，積分もできないのであるが，この場合は φ が左 $N \cap K$ 不変であるため，積分を $(N\cap K)\backslash N$ 上の和に変えることができる．このようにして法 p 佐武変換が得られる．

例 3.3. $G = \mathrm{PGL}_2$, $P = B = ZU$ を上三角元からなる部分群, $K = \mathrm{PGL}_2(\mathcal{O})$, $V = \mathbf{1}$ とする．$t = \mathrm{diag}(\varpi, 1)$，$\varphi \in \mathcal{H}_G(\mathbf{1})$ を $\operatorname{supp}\varphi = KtK$，$\varphi(t) = 1$ により定まるものとし，$n \in \mathbb{Z}$ に対して $\tau_{t^n} \in \mathcal{H}_Z(\mathbf{1})$ を $\operatorname{supp}\tau_{t^n} = (Z\cap K)t^n$，$\tau_{t^n}(t^n) = 1$ を満たすものとする．このとき，$S_G^Z(\varphi) = \tau_t + q\tau_{t^{-1}}$ となり，法 p 還元のもとでは，$S_G^Z(\varphi) = \tau_t$ となる．一方，$\mathbb{C}$ 係数で考えると $\delta(t)^{-1/2}\tau_t + q\delta(t^{-1})^{-1/2}\tau_{t^{-1}} = q^{1/2}\tau_t + q^{1/2}\tau_{t^{-1}}$ となり，これは PGL_2 の Weyl 群 S_2 に関する不変性を持つ（古典的な佐武対応）．

この場合，S_G^M は単射であり，$\operatorname{Im} S_G^M = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}} \overline{\mathbb{F}_p}\tau_{t^n} = \overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t]$ となる．一方 $\mathcal{H}_Z(\mathbf{1}) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}_p}\tau_{t^n} = \overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t^{\pm 1}]$ であり，S_G^M は $\overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t] \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t^{\pm 1}]$ と同一視される．

この例の一般化として，次が成り立つ．$z \in Z$ が支配的であるとは，$z(U\cap K)z^{-1} \subset U \cap K$ となることである．$G = \mathrm{GL}_n$，$K = \mathrm{GL}_n(\mathcal{O})$ の場合は，$z = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n)$ が支配的であることと $\mathrm{val}(t_1) \geq \cdots \geq \mathrm{val}(t_n)$ を満たすことと同値となる．（$\mathrm{val}\colon F^\times \to \mathbb{R}$ は付値.）

[2] 副 p 群の 0 でない法 p スムーズ表現は自明表現を含むことから従う．

定理 3.4 (Herzig [Her11b, Theorem 1.2], Henniart-Vignéras [HV15, 1.5 Theorem]).
S_G^M は単射であり，これにより $\mathcal{H}_M(V_{N\cap K})$ は $\mathcal{H}_G(V)$ の分数環となる．また $P=B$ の時 $\operatorname{Im} S_G^Z$ は支配的な元に台を持つものの集合と一致する．

G の表現 π と K の既約表現 V に対して $\mathrm{Hom}_K(V,\pi)\simeq\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G(V),\pi)$ は自然に右 $\mathcal{H}_G(V)$ 加群となる．

定義 3.5. 既約許容表現 π が超特異であるとは，任意の真の放物型部分群 $P=MN\subsetneq G$ および K の既約表現 V に対して，

$$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)\otimes_{\mathcal{H}_G(V)}\mathcal{H}_M(V_{N\cap K})=0$$

となることである．

注意 3.6. 法 p 佐武変換 S_G^M は (K,B,S) の取り方に依存しているため，超特異性に関しても正確には (K,B,S) に関して超特異であるというべきである．これに応じて，定理 2.3 も超尖点性と (K,B,S) に関する超特異性が同値であるという主張となるが，超尖点性は (K,B,S) によらないので，定理 2.3 から超特異性も (K,B,S) にはよらないことがわかる．

$\mathcal{Z}_G(V)$ を $\mathcal{H}_G(V)$ の中心とする．

定義 3.7. π を既約許容表現とする．$\chi\colon\mathcal{Z}_G(V)\to\overline{\mathbb{F}_p}$ が π の佐武パラメータであるとは，ある 0 でない $\psi\in\mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_K^G V,\pi)\simeq\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ が存在して，任意の $\varphi\in\mathcal{Z}_G(V)$ に対して $\psi\circ\varphi=\chi(\varphi)\psi$ を満たすことである．

定義から次がわかる．$\chi\colon\mathcal{Z}_G(V)\to\overline{\mathbb{F}_p}$ が π の佐武パラメータであるとし，定義にあるような $\psi\colon\text{c-Ind}_K^G V\to\pi$ をとると，任意の $\varphi\in\mathcal{Z}_G(V)$ に対して $\psi\circ\varphi=\chi(\varphi)\psi$ を満たすことから ψ は $\text{c-Ind}_K^G V\to\chi\otimes_{\mathcal{Z}_G(V)}\text{c-Ind}_K^G V$ を経由する．つまり，χ が π の佐武パラメータであるための必要十分条件は，π が $\chi\otimes_{\mathcal{Z}_G(V)}\text{c-Ind}_K^G(V)$ の商となることである．

$G=\mathrm{PGL}_2$，$V=\mathbf{1}$ の場合には，$\mathcal{H}_G(V)$ は可換であり，$\mathcal{Z}_G(V)=\mathcal{H}_G(V)\simeq\overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t]\hookrightarrow\overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t^{\pm1}]=\mathcal{Z}_Z(V_{N\cap K})$ であった．一方 π は許容であるので，$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)$ は有限次元であり，よって τ_t に関する一般固有空間への直和分解を持つ．$\otimes_{\overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t]}\overline{\mathbb{F}_p}[\tau_t^{\pm1}]$ は固有値 0 の一般固有空間のみを消すので，超特異表現であることは，τ_t の固有値が全て 0 であることと同値である．これが，本節の最初に述べた「佐武パラメータが 0」の意味である．

一般には $\mathcal{H}_G(V)$ は可換ではなく [HV15, 4.4]，$\mathcal{H}_G(V)$ と $\mathcal{Z}_G(V)$ は一致しないが，しかし次の意味で $\mathcal{Z}_G(V)$ は十分大きく，超特異性を議論するには $\mathcal{Z}_G(V)$ 加群として考えれば十分である．

補題 3.8. $S_G^M(\mathcal{Z}_G(V))\subset\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ であり，

$$\mathrm{Hom}_K(V,\pi)\otimes_{\mathcal{H}_G(V)}\mathcal{H}_M(V_{N\cap K})\simeq\mathrm{Hom}_K(V,\pi)\otimes_{\mathcal{Z}_G(V)}\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}).$$

である．よって，π が超特異表現であるための必要十分条件は，任意の π の佐武パラメータ χ が任意の放物型部分群 $P=MN\subsetneq G$ に対して $\mathcal{Z}_G(V)\xrightarrow{S_G^M}\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ を経由しないこ

とである．または，任意の放物型部分群 $P = MN \subsetneq G$ および $\mathcal{Z}_G(V) \xrightarrow{S_G^M} \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ を経由する $\chi\colon \mathcal{Z}_G(V) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して，π が $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ の商とならないことである．

§4. 放物型誘導表現とコンパクト台誘導表現の比較

引き続き前節の記号を用いる．補題 3.8 で見たとおり，超特異表現であることは，

> 任意の放物型部分群 $P = MN \subsetneq G$ および $\mathcal{Z}_G(V) \xrightarrow{S_G^M} \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ を経由する $\chi\colon \mathcal{Z}_G(V) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して，$\chi \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ の商とならない

ことと同値である．一方，定義から超尖点表現とは

> 任意の放物型部分群 $P = MN \subsetneq G$ と M の既約許容表現 σ に対して，$\text{Ind}_P^G \sigma$ の部分商とならない

ような表現であった．両者は (商か部分商かの差があるものの) コンパクト誘導表現と放物型誘導表現の違いを無視すればほぼ同様の特徴付けとなっている．よって，定理 2.3 を示すには，コンパクト誘導表現と放物型誘導表現を比較する必要がある．具体的には，$\chi\colon \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して，

$$\chi \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \quad \text{と} \quad \text{Ind}_P^G(\chi \otimes_{\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})} \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})) \tag{2}$$

とを比較する．

自然な G 準同型 $\text{c-Ind}_K^G(V) \to \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$ が存在し（Frobenius 相互律を何度か用いる)，更にこれは $\mathcal{Z}_G(V)$ 準同型であることもわかる．よって準同型

$$\Phi\colon \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \to \text{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$$

を得，$\chi\colon \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して，

$$\chi \otimes \Phi\colon \chi \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V) \to \text{Ind}_P^G(\chi \otimes_{\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})} \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$$

を得る．(2) の比較は，次の三段階で述べることができる．

定理 4.1. $\overline{P} = M\overline{N}$ を P の反対の位置にある放物型部分群とする．次が成り立つ．

1. V が「$\overline{P}$ 正則」ならば Φ は同型 [HV12, Theorem 1.2].
2. 殆どの $\chi\colon \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して (条件は正確に書くことができる)，$\chi \otimes \Phi$ は同型．
3. 全ての $\chi\colon \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して，「組成因子は一致する」．正確には，(2) の両者にフィルトレーションが入り，隣接商が順番を入れ替えて一致する [3]．

[3] 両者の長さは一般には無限である．

正則の定義はここでは述べない [HV12, Section 1]．$P \neq G$ の時，正則でない表現の代表例が 1 次元表現である．

定理 4.1 の 3 から，超尖点表現ならば超特異表現となることが従う．実際超特異表現でなければ，ある放物型部分群 $P = MN \subsetneq G$ と S_G^M を経由する $\chi\colon \mathcal{Z}_G(V) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して，π は $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ の商となる．よって定理 4.1 の 3 から $\mathrm{Ind}_P^G(\chi \otimes_{\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})} \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$ の部分商となる．従って超尖点ではない [4]．

実は，定理 4.1 は定理 2.1，2.2，2.3 を導く．すでに述べたとおり，そのためには定理 2.2 の 2 の存在と，定理 2.4 を示せば良い．まず，定理 4.1 により，定理 2.4 の証明は $P = B$，$\sigma = \mathbf{1}$ の場合に帰着される（[Her11a, Proof of Theorem 8.1] における議論を用いる）．$\mathrm{Ind}_B^G \mathbf{1}$ の組成列の決定は Große-Klönne [GK14]，Herzig [Her11a, Corollary 7.3]（分裂型の場合）及び Ly [Ly]（一般の場合）により得られており，このようにして定理 4.1 から定理 2.4 が得られる．

定理 2.2 の 2 の存在を示すために，π を既約許容表現，χ をその佐武パラメータとし，$P = MN$ を χ が S_G^M を経由するような最小の放物型部分群とする．佐武パラメータの定義から π は $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G V$ の商であり，よって定理 4.1 の 3 から $\mathrm{Ind}_P^G(\chi \otimes_{\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})} \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$ の部分商となる．従って適当な $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})} \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ の既約部分商 σ に対して π は $\mathrm{Ind}_P^G \sigma$ の部分商となり，さらに P の最小性から σ は超特異表現となる [5]．

さて，定理 4.1 の証明について述べよう．法 p 佐武変換を用いた議論により，Φ は常に単射となることが示される [HV12, Proposition 2.4]．よって全射性を示せば同型になる．$\overline{B} = Z\overline{U}$ を B の反対の位置にある極小放物型部分群とし，$V^{\overline{U}\cap K} = \{v \in V \mid uv = v \ (u \in \overline{U} \cap K)\}$ とおく．このとき $\dim V^{\overline{U}\cap K} = 1$ であることが知られている（[HV15] の 5 節を参照）．$v \in V^{\overline{U}\cap K}$ を 0 でない元として固定し，自然な準同型 $V \to \text{c-Ind}_K^G(V)$ により $v \in \text{c-Ind}_K^G(V)$ と見なして，$f = \Phi(v)$ とおく．$\mathrm{red}\colon K \to G_\kappa$ を自然な準同型とし，$\overline{I}_1 = \mathrm{red}^{-1}(\mathrm{red}(\overline{U} \cap K))$ とおく．（$\mathrm{red}(\overline{U} \cap K)$ は G_κ の Borel 部分の冪単根基である．）Φ の定義から次が計算できる．$V^{\overline{U}\cap K} \hookrightarrow V \to V_{N\cap K} \to \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ による v の像を同じく v と書くことにする．v は $\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ を生成する．

補題 4.2. V が $\overline{P}$ 正則ならば $\operatorname{supp} f = P\overline{I}_1$ であり，$f(1) = v$．

f は $\overline{I}_1$ 不変な放物型誘導表現の元であることを用いると，この補題の条件から f は決定される．補題から $\operatorname{supp} f \subset P\overline{I}_1 \subset P\overline{U}$．また台は P を法としてコンパクトであるので，Z の作用を用いることで，その台をいくらでも小さくすることができる．このような小さな台を持つ関数を複数取り，G の元で平行移動を行い足し合わせることで，任意の $\mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$ の元を作ることができる．従って，f は $\mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{K\cap M}^M V_{N\cap K})$ を生成し，Φ は全射となる．よって Φ は同型となり，定理 4.1 の 1 が示された．

[4] $\chi \otimes_{\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})} \text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})$ の長さは有限とは限らないので，この議論は完全ではない．証明を完成させるためには，3 のフィルトレーションに関するもう少し詳しい記述が必要となる．

[5] この議論は技術的な理由により完全ではなく，やはり 3 におけるフィルトレーションのもう少し詳しい情報が必要となる

V の正則性なしでは補題 4.2 は成り立たない．最も正則でない場合として，V が指標の場合を考えよう．このとき f の台は G 全体となり，上のような議論は行えない．定理 4.1 の 2 を示すには，$\overline{I}_1$ に関する Hecke 環を用いる．

$v \in V^{\overline{U}\cap K}$ であるので，f は $\overline{I}_1$ で不変である．一方，$\mathcal{H}$ を G 上のコンパクト台関数であって，両側 $\overline{I}_1$ 不変なものからなる $\overline{\mathbb{F}_p}$ ベクトル空間とし，たたみ込み積により $\overline{\mathbb{F}_p}$ 代数の構造をいれる（$\overline{I}_1$ に関する Hecke 環）．同型 $\mathcal{H} \simeq \mathrm{End}_G(\text{c-Ind}_{\overline{I}_1}^G \mathbf{1})$ があり，よって $\mathcal{H}$ は $(\mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})))^{\overline{I}_1} \simeq \mathrm{Hom}_G(\text{c-Ind}_{\overline{I}_1}^G \mathbf{1}, \mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K})))$ に右から作用する．このとき，次を示すことができる．w_0 を Weyl 群の最長元とし，その K における代表系を同じ記号 w_0 で表す．$f_0 \in \mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$ を $\overline{I}_1$ 不変であって，$\mathrm{supp}\, f_0 = Pw_0\overline{I}_1$ かつ $f_0(w_0) = v$ となるものとする．

補題 4.3. V を指標とする．ある $X \in \mathcal{H}_M(V_{N\cap K}) \otimes \mathcal{H}$ および各 $\alpha \in \Delta \setminus \Delta_P$ に対して $E_\alpha, F_\alpha \in \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ が存在して，$fX = \prod_{\alpha\in\Delta\setminus\Delta_P}(E_\alpha - F_\alpha)f_0$ が成り立つ．

E_α, F_α は具体的に計算をすることができる．このことから，$\chi\colon \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ に対して $\chi(\prod_{\alpha\in\Delta\setminus\Delta_P}(E_\alpha - F_\alpha)) \neq 0$ ならば $f_0 \in \mathrm{Im}\,\chi\otimes\Phi$ となる．一方補題 4.2 の後の議論と同様にして，f_0 は $\mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M(V_{N\cap K}))$ を生成し，よって $\chi\otimes\Phi$ は全射，従って同型となり，定理 4.1 の 2 を得る．

$\mathcal{H}$ はアフィン Hecke 環によく似た構造論を持ち，Vignéras [Vig] によりその具体的な記述が得られている．補題 4.3 の証明はこの構造論を用いて，具体的な X に対して fX を計算することで得られる．

$G = \mathrm{PGL}_2$ の場合にはこの計算は以下のようになる．P を上三角元のなす部分群とし，M を対角行列からなる部分群とする．この場合は $\mathcal{H}_G(V)$，$\mathcal{H}_M(V_{N\cap K})$ は可換であるので，$\mathcal{H}_G(V) = \mathcal{Z}_G(V)$，$\mathcal{H}_M(V_{N\cap K}) = \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ である．簡単のため V を自明表現として，$\overline{I}$ を $\mathrm{red}(\overline{B}\cap K)$（$\mathrm{PGL}_2(\kappa)$ 内の下三角元からなる部分群）の逆像とする（岩堀部分群）．V を自明表現としたことにより，$\mathcal{H}$ を両側 $\overline{I}$ 不変な G 上のコンパクト台関数からなる $\overline{\mathbb{F}_p}$ 代数（アフィン Hecke 環）に取り替えて補題 4.3 を示すことができる．（f が $\overline{I}$ 不変となるため．）以下，$\mathcal{H}$ はアフィン Hecke 環であるとする．例 3.3 の記号を用いる．

$$s = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおき，また $S, \Omega \in \mathcal{H}$ をそれぞれ $\overline{I}s\overline{I}, \overline{I}ts\overline{I}$ 上の特性関数とする．このとき，$\{S, \Omega\}$ は $\mathcal{H}$ を生成し，$S(S+1) = 0$，$\Omega^2 = 1$ を満たす [6]．例 3.3 の記号を用いて，$T = \tau_t$ とおくと，$\mathcal{H}_G(V) = \overline{\mathbb{F}_p}[T] \hookrightarrow \overline{\mathbb{F}_p}[T^{\pm 1}] = \mathcal{H}_M(V_{N\cap K})$ である．$\mathcal{H}$ の作用の定義から次を確認することができる．

補題 4.4. $f = f_0(1+S)$ および $f_0 S\Omega = T^{-1} f_0$ が成り立つ．

[6] $S(S+1) = 0$ はアフィン Hecke 環の二次関係式から得られる．$\Omega^2 = 1$ は $(ts)^2 = 1$ であることと ts が $\overline{I}$ を正規化することの帰結である．

以上を用いることで，

$$f\Omega = f_0\Omega + f_0S\Omega = f_0\Omega + T^{-1}f_0$$

となるが，$f_0\Omega = Tf_0S\Omega^2 = Tf_0S = Tf - Tf_0$ であるので，

$$f\Omega = Tf - Tf_0 + T^{-1}f_0$$

である．よって $f\Omega - Tf = (T^{-1} - T)f_0$ を得るので，$\chi\colon \mathcal{H}_M(V_{N\cap K}) \to \overline{\mathbb{F}_p}$ が $\chi(T)^2 \neq 1$ を満たすならば，$\chi \otimes \mathrm{Ind}_P^G(\text{c-Ind}_{M\cap K}^M V_{N\cap K})$ において f_0 は f の生成する部分加群の中に入り，従って Φ は同型となる．

このように f に Ω をかけて計算を行うことで，定理 4.1 の 2 が示される．この Ω は次のように得られている．$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ を G 上のコンパクト台を持つ両側 $\overline{I}$ 不変な $\mathbb{Q}$ 値関数のなす $\mathbb{Q}$ 代数とし，$g \in G$ に対して $T_g \in \mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ を $\overline{I}g\overline{I}$ 上の特性関数とする．$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{g\in\overline{I}\backslash G/\overline{I}} \mathbb{Q}T_g$ であり，$\mathcal{H}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{g\in\overline{I}\backslash G/\overline{I}} \mathbb{Z}T_g$ とおけばこれは部分環で，$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \overline{\mathbb{F}_p}$ である．また，$S = T_s$，$\Omega = T_{ts}$ は $(S-q)(S+1) = 0$，$\Omega^2 = 1$ を $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ において満たす．

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して，$\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}$ において $(T_{t^{-n}})^{-1}T_s$ を考える．具体的に計算を行うと，$T_{t^{-n}} = T_{t^{-1}}^n = (S\Omega)^n$ が成り立ち，よって $(T_{t^{-n}})^{-1}T_s = (\Omega^{-1}S^{-1})^nS = (S^{-1}\Omega^{-1})^{n-1}\Omega^{-1} = q^{-(n-1)}((S-(q-1))\Omega)^{n-1}\Omega$ である．これは $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ には入らないので，分母の q を払うように q^{n-1} をかけて $E = q^{n-1}(T_{t^{-n}})^{-1}T_s = ((S-(q-1)\Omega)^{n-1}\Omega$ を考えると，これは $\mathcal{H}_{\mathbb{Z}}$ の元を与え，よって $\mathcal{H}$ の元を与える．これに対して fE を考え計算を行うと，補題 4.3 が得られる．先ほどの計算は $n=1$ の場合である．

このようにして得られる E は，一般の場合における整 Bernstein 基底の一例である．一般の場合に上のような計算を行うには，Bernstein 基底同士をかけた場合にどうなるかという関係式（Bernstein 関係式）が必要であり，これが Vignéras [Vig] により得られている．

定理 4.1 の 3 を示すには，$\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K}) \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ が $\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ 加群として自由であることを示せば十分である [BL95, Lemma 31]．ただし，この事実を直接示すことは（すくなくとも現在では）できず，その代わりに $\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ をある商 R_M に変えて自由であることを示す．R_M は $\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ よりは小さいものの，定理 4.1 の 3 を示すには十分な大きさを持っている．

例 4.5. $G = \mathrm{PGL}_2$ の時，$R_G = \overline{\mathbb{F}_p}$ であり，$\mathcal{Z}_G(V) = \overline{\mathbb{F}_p}[T] \to \overline{\mathbb{F}_p}$ は $T \mapsto 0$ により与えられる．よってこの場合 $R_G \otimes_{\mathcal{Z}_G(V)} \text{c-Ind}_K^G(V)$ が R_G 上自由なことは自明である．$P = G$ の場合には Φ は恒等写像となるため，定理 4.1 も自明となる．$G = \mathrm{PGL}_2$ の場合には $\text{c-Ind}_K^G(V)$ 自身が $\mathcal{Z}_G(V)$ 上自由となるが [BL95, Theorem 10]，一般に同様のことが成り立つかは知られていない．なお，$P = B$ の時 $R_M = \mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ である．

自由であることの証明は，Bruhat 分解に応じたフィルトレーションを考えることで示される．$G = \mathrm{PGL}_2$，$P = B$ が上三角元からなる部分群の時は次のようになる，$X = \{f \in \mathrm{Ind}_B^G(\text{c-Ind}_{Z\cap K}^Z(V_{N\cap K})) \mid \operatorname{supp} f \subset BsB\}$ とおく．$G = B \amalg BsB$ であるので，$f \mapsto f(1)$ は $\mathrm{Ind}_B^G(\text{c-Ind}_{Z\cap K}^Z(V_{N\cap K}))/X \simeq \text{c-Ind}_{Z\cap K}^Z(V_{N\cap K})$ を導く．$Y = X \cap \operatorname{Im}\Phi$ とおくと次が成り立つ．

補題 4.6. $Y = (T - T^{-1})X$, $\mathrm{Im}\,\Phi/Y = \mathrm{Ind}_B^G(\text{c-Ind}_{Z\cap K}^Z(V_{N\cap K}))/X$.

$Z\cap K$ が Z の正規部分群であることから, $\text{c-Ind}_{Z\cap K}^Z(V_{N\cap K})$ は (階数 1 の) 自由 $\mathcal{Z}_M(V_{N\cap K})$ 加群となり，このことから X も自由となることがわかる．よって補題から $\mathrm{Im}\,\Phi/Y$ および Y は自由であり，従って $\mathrm{Im}\,\Phi$ も自由となる．

References

[Abe13] N. Abe, *On a classification of irreducible admissible modulo p representations of a p-adic split reductive group*, Compos. Math. **149** (2013), no. 12, 2139–2168.

[AHHV14] N. Abe, G. Henniart, F. Herzig, and M.-F. Vigneras, *A classification of irreducible admissible mod p representations of p-adic reductive groups*, arXiv:1412.0737.

[BH06] C. J. Bushnell and G. Henniart, *The local Langlands conjecture for* GL(2), Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 335, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[BL94] L. Barthel and R. Livné, *Irreducible modular representations of* GL_2 *of a local field*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 2, 261–292.

[BL95] L. Barthel and R. Livné, *Modular representations of* GL_2 *of a local field: the ordinary, unramified case*, J. Number Theory **55** (1995), no. 1, 1–27.

[Bre10] C. Breuil, *The emerging p-adic Langlands programme*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Volume II (New Delhi), Hindustan Book Agency, 2010, pp. 203–230.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive* $\mathfrak{p}$*-adic groups. I*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **10** (1977), no. 4, 441–472.

[GK14] E. Große-Klönne, *On special representations of p-adic reductive groups*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 12, 2179–2216.

[Hen00] G. Henniart, *Une preuve simple des conjectures de Langlands pour* GL(n) *sur un corps p-adique*, Invent. Math. **139** (2000), no. 2, 439–455.

[Her11a] F. Herzig, *The classification of irreducible admissible mod p representations of a p-adic* GL_n, Invent. Math. **186** (2011), no. 2, 373–434.

[Her11b] F. Herzig, *A Satake isomorphism in characteristic p*, Compos. Math. **147** (2011), no. 1, 263–283.

[HT01] M. Harris and R. Taylor, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Annals of Mathematics Studies, vol. 151, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001, With an appendix by Vladimir G. Berkovich.

[HV12] G. Henniart and M.-F. Vignéras, *Comparison of compact induction with parabolic induction*, Pacific J. Math. **260** (2012), no. 2, 457–495.

[HV15] G. Henniart and M.-F. Vignéras, *A Satake isomorphism for representations modulo p of reductive groups over local fields*, J. Reine Angew. Math. **701** (2015), 33–75.

[Ly] T. Ly, *Représentations modulo p de* GL(m, D)*, D algèbre à division sur un corps local*, Thesis, Institut de mathématiques de Jussieu, arXiv:1409.4686.

[Sch13] P. Scholze, *The local Langlands correspondence for* GL_n *over p-adic fields*, Invent. Math. **192** (2013), no. 3, 663–715.

[Vig] M.-F. Vignéras, *The pro-p-Iwahori Hecke algebra of a p-adic group I*, to appear in Compos. Math.

[Zel80] A. V. Zelevinsky, *Induced representations of reductive* $\mathfrak{p}$*-adic groups. II. On irreducible representations of* $\mathrm{GL}(n)$, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **13** (1980), no. 2, 165–210.