RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 65–86

実 2 次体上の Hilbert 保型形式の合同式と L 関数の特殊値: アナウンスメント
(Congruences of Hilbert modular forms over real quadratic fields and the special values of L-functions: announcement)

By

平野 雄一 (Yuichi Hirano)*

Abstract

本稿の目的は, 平行な重さ 2 の実 2 次体上の Hilbert カスプ形式と Hilbert Eisenstein 級数の間の合同式からそれらに伴う L 関数の特殊値の間の合同式を導いた結果 [Hi] を報告することである. この結果は, Greenberg 氏と Vatsal 氏による p 進 Galois 表現が剰余して可約となる素数 p における $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の岩澤主予想が成り立つ多くの新しい例をもたらした Vatsal 氏の結果の一般化である.

The purpose of this paper is to announce the result of [Hi] in which we obtain congruences between special values of L-functions from a congruence between a Hilbert cusp form and a Hilbert Eisenstein series of parallel weight 2 over a real quadratic field. This is a generalization of a result of Vatsal. By using the result of Vatsal, Greenberg and Vatsal give many examples of elliptic curves over $\mathbb{Q}$ satisfying the Iwasawa main conjecture when the associated p-adic Galois representations are residually reducible.

§ 1. 序論

本研究の動機は, Vatsal 氏の結果 [Vat] 及び Greenberg 氏と Vatsal 氏の結果 [Gre–Vat] を一般化し, 総実代数体 F 上の Hilbert 固有カスプ形式に伴う p 進 Galois 表現が剰余して可約となる素数 p における岩澤主予想について考察することである. この剰余可約とい

Received April 30, 2014. Revised December 19, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11F33, 11F41, 11F67, 11F75, 11R23, 11R80, 14F30.
Key Words: *Congruences of Hilbert modular forms, special values of L-functions, Iwasawa theory, Hilbert Eisenstein series, Mellin transform, congruence module, p-adic Hodge theory.*
*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan.
e-mail: `yhirano@ms.u-tokyo.ac.jp`

う希少な表現は, Ribet 氏 [Ri] や Wiles 氏 [Wil] の巧みなアイデア・議論によって総実代数体の岩澤主予想の解決をもたらした重要な研究対象である. その一方, 近年, Skinner 氏と Urban 氏 [Ski–Ur] によって多くの場合に固有カスプ形式の岩澤主予想が解決されたが, p 進 Galois 表現が剰余可約な場合は除外されている. そのため, p 進 Galois 表現が剰余可約な場合に扱える方法を構築する必要がある.

p 進 Galois 表現が剰余可約という条件は, 保型形式の言葉では, 固有カスプ形式と Eisenstein 級数の Fourier 係数の間の合同式があることに相当する. Vatsal 氏 [Vat] は $F = \mathbb{Q}$ 及び重さが 2 の場合に, この保型形式の間の合同式からそれらに伴う L 関数の特殊値の間の合同式を導いた. この結果は, Greenberg 氏と Vatsal 氏 [Gre–Vat] によって p 進 Galois 表現が剰余可約となる素数 p における $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線の岩澤主予想に応用され, 加藤氏の結果 [Kato] と合わせて, 岩澤主予想が成り立つ多くの新しい例をもたらした.

本結果 [Hi] の主定理は, 総実代数体において, ある仮定のもとで, Vatsal 氏の結果 [Vat] を一般化した (本稿の主定理 (定理 2.1)). 但し, 本手法は境界のコホモロジー及びコンパクト台付きコホモロジーが捻れ元を持たないという仮定 (主定理の仮定 $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$, $(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$) を必要とする. この仮定は総実代数体 F が実 2 次体かつ狭義類数 1 の場合, Ghate 氏の手法 [Gha], 久賀氏の手法 [Kuga], 及び Serre 氏の結果 [Se] を基に調べることができる (主定理直後の注意 (3), (4)).

本稿の構成を述べる.

§2.1 では, 本稿で用いる記号や Hilbert モジュラー多様体, Hilbert 保型形式, 及び L 関数 (Dirichlet 級数) に関する基本性質を述べる.

§2.2 では, 本稿の主定理 (定理 2.1) を述べる. また, 主定理の仮定をすべてみたす例を挙げる (例 2.2).

§3.1 では, Stevens 氏の結果 ([Ste1], [Ste2]) を一般化する. この節の主結果は, Hilbert Eisenstein 級数に伴うコホモロジー類の整性及びその mod p 非消滅性である (定理 3.3).

§3.2 では, Vatsal 氏の結果 [Vat] を一般化する. この節の主結果は, Hilbert 固有カスプ形式と Hilbert Eisenstein 級数の間の合同式 (Fourier 係数の間の合同式) からそれらに伴うコホモロジー類の間の合同式を導くことである (定理 3.7).

§3.3 では, §3.1, §3.2 で用いるコホモロジー類に伴う Mellin 変換公式を補足する. 主定理は, 定理 3.3, 定理 3.7, 及び Mellin 変換公式 (命題 3.13) から従う.

謝辞. 講演の機会を与え, お世話をして頂いた, 本研究集会の主催者及びプログラム委員の皆様に感謝致します. 本原稿作成にあたり, ドラフト版から全体的に丁寧に読み, 読者に誤解を与えないように, きめ細かく有益かつ親切な助言を頂いた, 辻雄先生に深く感謝致します. また, 全体的に丁寧に読み, 読者に誤解を与えないように, 技術的な細部にまで有益な助言を頂いた, 編集委員の皆様に感謝致します. さらに, 全体的に丁寧に読み, コメントして頂いた, 査読者に感謝致します.

§ 2. 主定理

§ 2.1. 記号・基本性質

主定理を述べるために記号を準備する. F を狭義類数 1 の総実代数体とし, $\mathfrak{o}_F$ をその整数環, $\mathfrak{o}_{F,+}^{\times}$ をその総正な単数群とする. $F/\mathbb{Q}$ の拡大次数 $[F:\mathbb{Q}]$ を n とかく. F の実埋め込み全体のなす集合 $\mathrm{Hom}(F,\mathbb{R})$ を J_F とかく. $F/\mathbb{Q}$ の共役差積を $\mathfrak{d}_F$ とかく. p を素数で $p \geq n+2$ 及び $(p, 6\mathfrak{d}_F) = 1$ をみたすものとする. $\overline{\mathbb{Q}}$, $\overline{\mathbb{Q}}_p$ を各々$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ の代数閉包とし, 2 つの埋め込み $\iota_p : \overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$, $\iota_\infty : \overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \mathbb{C}$ を固定する. K を $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大体とし, その整数環 $\mathcal{O}_K$ を $\mathcal{O}$ で表す. $\mathcal{O}$ の素元を 1 つとり ϖ とする. $\mathcal{O}$ の剰余体 $\mathcal{O}/\varpi$ を κ とかく.

以下では, 次の 5 つの内容における記号及び基本性質について各々説明する: Hilbert モジュラー多様体, Hilbert 保型形式, Hecke 作用素, (Hilbert 保型形式に伴う) Dirichlet 級数, Hilbert Eisenstein 級数.

Hilbert モジュラー多様体. $\mathfrak{H}$ を上半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ とする. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ の部分群で行列式が正なもの全体とする. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$ は $\mathfrak{H}$ に 1 次分数変換によって作用する: 各 $\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$ 及び $z \in \mathfrak{H}$ に対し,

$$\alpha z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

この作用によって $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ は $\mathfrak{H}^{J_F}$ に作用する: 各 $\alpha = \left(\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix}\right)_{\sigma \in J_F} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ 及び $z = (z_\sigma)_{\sigma \in J_F} \in \mathfrak{H}^{J_F}$ に対し,

$$\alpha z = \left(\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix} z_\sigma\right)_{\sigma \in J_F} = \left(\frac{a_\sigma z_\sigma + b_\sigma}{c_\sigma z_\sigma + d_\sigma}\right)_{\sigma \in J_F}.$$

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を j とおく. j の $\mathfrak{H}$ への作用を $\mathrm{j}z = -\overline{z}$ で定める. 行列式が負である $\alpha \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ に対し,

$$\alpha z = (\alpha \mathrm{j})\mathrm{j}z$$

とする. これにより, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+$ の $\mathfrak{H}$ への作用が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ にのびる. この作用によって, 先と同様に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{J_F}$ は $\mathfrak{H}^{J_F}$ に作用する. F の実埋め込みを用いて $\mathrm{GL}_2(F)$ を $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{J_F}$ の部分群とみなせる:

$$\mathrm{GL}_2(F) \hookrightarrow \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{J_F} : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} a^\sigma & b^\sigma \\ c^\sigma & d^\sigma \end{pmatrix}\right)_{\sigma \in J_F}.$$

特に, $\mathrm{GL}_2(F)$ が $\mathfrak{H}^{J_F}$ に作用する.

$\mathfrak{n}$ を F の整イデアルで $(\mathfrak{n}, 6\mathfrak{d}_F \cdot p) = 1$ をみたすものとする．Y をレベル Γ 構造をもつ Hilbert モジュラー多様体 $\overline{\Gamma}\backslash\mathfrak{H}^{J_F}$ とする．但し，$\mathrm{GL}_2(\mathfrak{o}_F)$ の部分群 Γ 及びその商群 $\overline{\Gamma}$ を次で定める:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \left\{ \alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} \mathfrak{o}_F & \mathfrak{o}_F \\ \mathfrak{n} & \mathfrak{o}_F \end{pmatrix} : \det(\alpha) \in \mathfrak{o}_{F,+}^{\times} \right\}, \\
\Gamma &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0 : d \equiv 1 (\bmod\ \mathfrak{n}) \right\}, \\
\overline{\Gamma} &= \Gamma/(\Gamma \cap F^{\times}).
\end{aligned}$$

Y のカスプ全体のなす集合 $\overline{\Gamma}\backslash\mathbb{P}^1(F)$ の完全代表系 (有限集合) を固定し，$C(\Gamma)$ とかく．点 $(\sqrt{-1}, \cdots, \sqrt{-1}) \in \mathfrak{H}^{J_F}$ を $\underline{\mathbf{i}}$ とかく．K_∞ (resp. $K_{\infty,+}$) を $\underline{\mathbf{i}}$ の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{J_F}$ (resp. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$) における固定部分群とする．Weyl 群 $K_\infty/K_{\infty,+}$ を W_G で表す．W_G は Y に Hecke 対応で作用する．

Hecke 作用素を定義するために Y をアデールの言葉で記述する． $\mathbb{Q}$ 上の代数群 $\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}(\mathrm{GL}_{2/F})$ を G とかく．但し，$\mathrm{Res}_{F/\mathbb{Q}}$ は Weil 制限とする．$\mathbb{Q}$ のアデール環を $\mathbb{A}$ とする．$\mathbb{A}$ の有限素点部分 $\mathbb{A}_f$ と無限素点部分 $\mathbb{R}$ により，$\mathbb{A}$ を $\mathbb{A} = \mathbb{A}_f \times \mathbb{R}$, $G(\mathbb{A})$ を $G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{J_F}$ に分解する．$K_1(\mathfrak{n})$ を $G(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群

$$K_1(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G(\widehat{\mathbb{Z}}) : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\bmod\ \mathfrak{n}) \right\}$$

とする．但し，$\widehat{\mathbb{Z}} = \prod_{\ell:\text{素数}} \mathbb{Z}_\ell$ とする．F の狭義類数が 1 なので，強近似定理より，$G(\mathbb{A}) = G(\mathbb{Q})K_1(\mathfrak{n})\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ と分解できる．この分解により次の同一視ができる:

$$G(\mathbb{Q})_+\backslash G(\mathbb{A})_+/K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+} \simeq Y : \gamma u_0 u_\infty \mapsto u_\infty \underline{\mathbf{i}}. \tag{2.1}$$

但し，$G(\mathbb{Q})_+ = G(\mathbb{Q}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$, $G(\mathbb{A})_+ = G(\mathbb{A}_f) \times \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$, $\gamma \in G(\mathbb{Q})_+$, $u_0 \in K_1(\mathfrak{n})$, $u_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ とする．

Hilbert 保型形式. 平行な重さ 2, レベル Γ をもつ正則な Hilbert 保型形式全体のなす空間

$$M_2(\Gamma, \mathbb{C})$$

を次の保型性をみたす正則関数 $h : \mathfrak{H}^{J_F} \to \mathbb{C}$ 全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする: 各 $\gamma \in \Gamma$ に対し，$h|\gamma = h$. 但し，各 $\alpha_\infty = \left(\begin{pmatrix} a_\sigma & b_\sigma \\ c_\sigma & d_\sigma \end{pmatrix} \right)_{\sigma \in J_F} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ 及び $z = (z_\sigma)_{\sigma \in J_F} \in \mathfrak{H}^{J_F}$ に対し，

$$(h|\alpha_\infty)(z) = \det(\alpha_\infty) j(\alpha_\infty, z)^{-2} h(\alpha_\infty z),$$

$$\det(\alpha_\infty) = \prod_{\sigma \in J_F} (a_\sigma d_\sigma - b_\sigma c_\sigma), \ j(\alpha_\infty, z) = \prod_{\sigma \in J_F} (c_\sigma z_\sigma + d_\sigma)$$

とする．但し，$F = \mathbb{Q}$ の場合は，h はすべてのカスプで正則とする ($F \neq \mathbb{Q}$ の場合は，Koecher 原理より，h は自動的にすべてのカスプで正則となる).

Hilbert 保型形式をアデールの言葉で述べる．平行な重さ 2, レベル $K_1(\mathfrak{n})$ をもつ正則な Hilbert 保型形式全体のなす空間

$$M_2(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$$

を次の (a), (b), (c) をみたす関数 $\mathbf{h} : G(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}$ 全体のなす $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする:
(a) 各 $u_0 \in K_1(\mathfrak{n})$ 及び $u_\infty \in K_{\infty,+}$ に対し, $\mathbf{h}|u_0u_\infty = \mathbf{h}$.
但し, 各 $\alpha_0 \in G(\mathbb{A}_f), \alpha_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$, 及び $\alpha = \alpha_0\alpha_\infty \in G(\mathbb{A})_+$ に対し, $G(\mathbb{A})$ 上の関数 $\mathbf{h}|\alpha$ を

$$(\mathbf{h}|\alpha)(x) = \det(\alpha_\infty) j(\alpha_\infty, \underline{\mathbf{i}})^{-2}\mathbf{h}(x\alpha^{-1})$$

で定める;
(b) 各 $\gamma \in G(\mathbb{Q})$ に対し, $\mathbf{h}(\gamma x) = \mathbf{h}(x)$;

各 $z \in \mathfrak{H}^{J_F}$ に対し，$u_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ を $z = u_\infty\underline{\mathbf{i}}$ にとる．関数 $h : \mathfrak{H}^{J_F} \to \mathbb{C}$ を $h(z) = \det(u_\infty)^{-1} j(u_\infty, \underline{\mathbf{i}})^2\mathbf{h}(u_\infty)$ で定める (条件 (a) より，この定義は $u_\infty \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+^{J_F}$ の取り方によらないことに注意する).
(c) h は $\mathfrak{H}^{J_F}$ 上で正則. 但し, $F = \mathbb{Q}$ の場合は, h はすべてのカスプで正則とする.

対応 $\mathbf{h} \mapsto h$ によって上記の 2 つの保型形式の空間 $M_2(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ 及び $M_2(\Gamma, \mathbb{C})$ を同一視することができる:

$$M_2(\mathfrak{n}, \mathbb{C}) \simeq M_2(\Gamma, \mathbb{C}). \tag{2.2}$$

保型性 (b) より, Hilbert 保型形式は無限カスプ ∞ において次の形の Fourier 級数展開をもつ:

$$h(z) = a_\infty(0, \mathbf{h}) + \sum_{0 \ll \xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}} a_\infty(\xi, \mathbf{h}) e_F(\xi z).$$

但し, ξ は総正な $\mathfrak{d}_F^{-1}$ の元をわたり, e_F は $F\backslash(\mathbb{A}\otimes_{\mathbb{Q}} F)$ の加法的指標で各 $x_\infty = (x_{\infty,\sigma})_{\sigma \in J_F} \in \mathbb{R}^{J_F}$ に対し, $e_F(x_\infty) = \prod_{\sigma \in J_F} \exp(2\pi\sqrt{-1}x_{\infty,\sigma})$ で特徴付けられる.

部分環 $A \subset \mathbb{C}$ に対し, $M_2(\mathfrak{n}, A)$ を平行な重さ 2, レベル $K_1(\mathfrak{n})$, 及びすべての Fourier 係数を A にもつ Hilbert 保型形式全体のなす空間とする．さらに, すべてのカスプを零点にもつ Hilbert カスプ形式全体のなす $M_2(\mathfrak{n}, A)$ の部分空間を $S_2(\mathfrak{n}, A)$ で表す.

整イデアル $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{o}_F$ に対し，$\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ を法とする狭義合同イデアル類群とする．$\chi : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{n}) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を偶指標とする，すなわち，Weyl 群 W_G と $(F\otimes\mathbb{R})^\times/(F\otimes\mathbb{R})_+^\times$ を同一視のもとで，$\chi|_{W_G} = \mathbf{1}$ とする．指標 χ をもつ Hilbert 保型形式 $\mathbf{h} \in M_2(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ を各 $b \in (\mathbb{A}\otimes F)^\times$ 及び $x \in G(\mathbb{A})$ に対し, $\mathbf{h}(bx) = \chi^{-1}(b)\mathbf{h}(x)$ をみたすものとして定める．本稿では指標 χ をもつ Hilbert 保型形式を考える.

Hecke 作用素. $M_2(\mathfrak{n},\mathbb{C})$ 及び $S_2(\mathfrak{n},\mathbb{C})$ 上の Hecke 作用素を定める．半群 $\widehat{R}(\mathfrak{n})$ 及び $R(\mathfrak{n})$ を

$$\widehat{R}(\mathfrak{n}) = G(\mathbb{A}_f) \cap \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\widehat{\mathfrak{o}}_F) : c \in \mathfrak{n}\widehat{\mathfrak{o}}_F,\ {}^\forall\mathfrak{q}_v|\mathfrak{n},\ d_v \in \mathcal{O}_v^\times \right\},$$
$$R(\mathfrak{n}) = G(\mathbb{Q}) \cap \widehat{R}(\mathfrak{n})$$

とする．但し, $\widehat{\mathfrak{o}}_F = \widehat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathfrak{o}_F$, $\mathfrak{q}_v$ を F の有限素点 v に対応する $\mathfrak{o}_F$ の素イデアル, $\mathcal{O}_v$ を F の有限素点 v における v 進完備化 F_v の整数環, d_v を $d \in \widehat{\mathfrak{o}}_F = \prod_{v:F\text{ の有限素点}} \mathcal{O}_v$ の v 成分への射影とする．$y \in \widehat{R}(\mathfrak{n})$ に対し, 両側剰余類分解

$$(K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+})\, y\, (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+}) = \coprod_i (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+})\, y_i$$

を用いて

$$\mathbf{h}|[(K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+})\, y\, (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+})](x) = \sum_i \mathbf{h}(xy_i^{-1})$$

と定める．$\mathfrak{o}_F$ の各素イデアル $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_v$ と $\mathcal{O}_v$ の素元 ϖ_v に対し, Hecke 作用素 $T(\varpi_v^e)$ ($e \in \mathbb{Z}$, $e > 0$) 及び $\mathfrak{n}$ と素な $\mathfrak{o}_F$ の各素イデアル $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_v$ に対し, $S(\varpi_v^e)$ ($e \in \mathbb{Z}$, $e > 0$) を次で各々定める:

$$T(\varpi_v^e) = (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+}) \begin{pmatrix} \varpi_v^e & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+}),$$
$$S(\varpi_v^e) = (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+}) \begin{pmatrix} \varpi_v^e & 0 \\ 0 & \varpi_v^e \end{pmatrix} (K_1(\mathfrak{n})K_{\infty,+}).$$

$\mathfrak{n}$ と素な素イデアル $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_v$ に対し, $T(\mathfrak{q}^e) = T(\varpi_v^e)$, $S(\mathfrak{q}^e) = S(\varpi_v^e)$ とおく．また, $\mathfrak{n}$ を割る素イデアル $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_v$ に対し, $U(\mathfrak{q}^e) = T(\varpi_v^e)$ とおく．これらは素元 ϖ_v の取り方によらないことに注意する．さらに, $\mathfrak{n}$ と素な $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{q}\nmid\mathfrak{n}} \mathfrak{q}^{e(\mathfrak{q})}$ に対し,

$$T(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{q}\nmid\mathfrak{n}} T(\mathfrak{q}^{e(\mathfrak{q})}), \qquad S(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{q}\nmid\mathfrak{n}} S(\mathfrak{q}^{e(\mathfrak{q})}),$$

$\mathfrak{n}$ を割る $\mathfrak{o}_F$ のイデアル $\mathfrak{m} = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}} \mathfrak{q}^{e(\mathfrak{q})}$ に対し,

$$U(\mathfrak{m}) = \prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{n}} U(\mathfrak{q}^{e(\mathfrak{q})})$$

と定める．部分環 $A \subset \mathbb{C}$ に対し, $\mathbb{H}_2(\mathfrak{n}, A)$ (resp. $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, A)$) を $T(\mathfrak{m})$, $S(\mathfrak{m})$ ($(\mathfrak{m},\mathfrak{n}) = 1$) 及び $U(\mathfrak{m})$ ($\mathfrak{m}|\mathfrak{n}$) で生成される $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(M_2(\mathfrak{n},\mathbb{C}))$ (resp. $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(S_2(\mathfrak{n},\mathbb{C}))$) の部分 A 代数とする．これらは可換 A 代数となる．

$\mathbb{T}$ を可換環, I を $\mathbb{T}$ のイデアルとする. $\mathbb{T}$ 加群 V に対し, $V[I]$ を

$$V[I] = \{v \in V : {}^{\forall}t \in I,\ tv = 0\} \tag{2.3}$$

で定める.

Dirichlet 級数. 志村氏の意味での Hilbert 保型形式に伴う Dirichlet 級数を定める ([Shi]).

$\mathbf{h} \in M_2(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ を固定する. 0 でない F の整イデアル $\mathfrak{m}$ に対し, $0 \ll \xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}$ を $\mathfrak{m} = \xi\mathfrak{d}_F$ となるようにとり,

$$C(\mathfrak{m}, \mathbf{h}) = N(\mathfrak{d}_F)a_\infty(\xi, \mathbf{h}) \tag{2.4}$$

とおく. 但し, F の整イデアル $\mathfrak{a}$ に対し, $N(\mathfrak{a})$ を $\mathfrak{a}$ のノルムとする. $\mathbf{h}$ に対応する $h \in M_2(\Gamma, \mathbb{C})$ の保型性より, (2.4) の右辺は ξ の取り方によらない. この Fourier 係数 (2.4) と Hecke 作用素の間には次の関係式がある ([Shi, (2.23)]): $V(\mathfrak{m}') = T(\mathfrak{m}')$ または $U(\mathfrak{m}')$ に対し,

$$C(\mathfrak{m}, \mathbf{h}|V(\mathfrak{m}')) = \sum_{\mathfrak{m}+\mathfrak{m}' \subset \mathfrak{c}} N(\mathfrak{c})C(\mathfrak{c}^{-2}\mathfrak{m}\mathfrak{m}', \mathbf{h}|S(\mathfrak{c})).$$

η を $\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\eta)$ 上の指標とする. 志村氏の意味での Dirichlet 級数 [Shi, (2.25)] は

$$\sum_{\mathfrak{m}} C(\mathfrak{m}, \mathbf{h})\eta(\mathfrak{m})N(\mathfrak{m})^{-s} \tag{2.5}$$

で定まる. 但し, $\mathfrak{m}$ は F の整イデアルをわたる. これは $\mathrm{Re}(s) \gg 0$ において絶対収束し, 全 s 平面に有理型関数に解析接続される. このようにして得られた有理型関数を $D(s, \mathbf{h}, \eta)$ で表す.

Hilbert Eisenstein 級数. $n = [F : \mathbb{Q}] > 1$ を仮定する. φ (resp. ψ) を $\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\varphi)$ (resp. $\mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\psi)$) の原始的指標で符号 q (resp. r) $\in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ とする. $q + r \equiv 0 \pmod 2$ を仮定する. これらの指標から定まる Hilbert Eisenstein 級数 $\mathbf{E}_2(\varphi, \psi) \in M_2(\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{m}_\psi, \mathbb{C})$ は下記で定める関数 $E_2(\varphi, \psi)(z, s)$ を全 s 平面に正則関数に解析接続して構成される ([Shi, Proposition 3.4]): U を有限指数をもつ $\mathfrak{o}_F^\times$ の部分群

$$U = \{u \in \mathfrak{o}_F^\times \mid u \equiv 1 \pmod{\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{m}_\psi}\}$$

とする. 各 $z \in \mathfrak{H}^{J_F}$ 及び $s \in \mathbb{C}$ で $\mathrm{Re}(s) > 0$ をみたすものに対し, 関数 $E_2(\varphi, \psi)(z, s)$ を次で定める:

$$\begin{aligned} E_2(\varphi, \psi)(z, s) =& [\mathfrak{o}_F^\times : U]^{-1}N(\mathfrak{m}_\psi)^{-1}\tau(\psi) \\ & \times \sum_{\mathfrak{h} \in \mathrm{Cl}_F} \sum_{a \in \mathfrak{h}/\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{h}} \sum_{t \in \mathfrak{m}_\psi^{-1}\mathfrak{h}/\mathfrak{h}} \mathrm{sgn}(a)^q\varphi(a\mathfrak{h}^{-1})\mathrm{sgn}(-t)^r\psi(-t\mathfrak{m}_\psi\mathfrak{h}^{-1})N(\mathfrak{h}) \\ & \times E_{2,U}(z, s; a, t; \mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{h}, \mathfrak{h}). \end{aligned}$$

但し, $\tau(\psi)$ を ψ に伴う Gauss 和, Cl_F を F のイデアル類群,

$$E_{2,U}(z,s;a,t;\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{h},\mathfrak{h})=\triangle_F^{1/2}N(\mathfrak{h})(2\pi\sqrt{-1})^{-2n}\sum_{(a',b')U}(a'z+b')^{-2}|a'z+b'|^{-2s},$$

$\triangle_F$ を F の判別式とする. 但し, U は $\mathfrak{h}\times\mathfrak{m}_\psi^{-1}\mathfrak{h}$ に $u\cdot(a',b')=(a'u,b'u)$ で作用し, $(a',b')U$ は, $(a',b')\neq(0,0)\in\mathfrak{h}\times\mathfrak{m}_\psi^{-1}\mathfrak{h}$, $a'-a\in\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{h}$ 及び $b'-t\in\mathfrak{h}$ をみたす U 同値類をわたる. 級数 $E_{2,U}(z,s;a,t;\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{h},\mathfrak{h})$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ において収束し, $n=[F:\mathbb{Q}]>1$ のとき, 全 s 平面に正則関数に解析接続される ([Shi, p.656]). そこで, $E_2(\varphi,\psi)(z)$ を

$$E_2(\varphi,\psi)(z)=\lim_{s\to 0}E_2(\varphi,\psi)(z,s)$$

で定める. これは, $n=[F:\mathbb{Q}]>1$ のとき, z に関して正則となる ([Shi, p.656]). $E_2(\varphi,\psi)$ は保型性をもち, (2.2) と同様の同一視のもと, $\mathbf{E}_2(\varphi,\psi)\in M_2(\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{m}_\psi,\mathbb{C})$ が定まる. これは指標 $\varphi\psi$ をもち, すべての F の整イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{m})$ 及び $U(\mathfrak{m})$ について固有関数であり, 次の性質 1, 2 によって特徴付けられる ([Shi, Proposition 3.4], [Da–Da–Po, Proposition 2.1]):

• 性質 1 (Hecke 固有値). F の各整イデアル $\mathfrak{m}$ に対し,

$$C(\mathfrak{m},\mathbf{E}_2(\varphi,\psi))=\sum_{\mathfrak{c}|\mathfrak{m}}\varphi\left(\frac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{c}}\right)\psi(\mathfrak{c})N(\mathfrak{c}).$$

• 性質 2 (Dirichlet 級数).

$$D(s,\mathbf{E}_2(\varphi,\psi))=L(s,\varphi)L(s-1,\psi).$$

但し, 指標 $\lambda=\varphi$ または ψ に対し, $L(s,\lambda)$ を λ に伴う Hecke L 関数とする.

また, $E_2(\varphi,\psi)$ のすべてのカスプでの Fourier 級数展開の定数項を直接計算することができる ([Hi]):

• 性質 3 (定数項). カスプ $x/y\in\mathbb{P}^1(F)$ に対し, $a_{x/y}(0,\mathbf{E}_2(\varphi,\psi))$ を $E_2(\varphi,\psi)$ の x/y での Fourier 級数展開における定数項とする.

$y\notin\mathfrak{m}_\psi$ 及び $\psi\neq\mathbf{1}$ のとき,

$$a_{x/y}(0,\mathbf{E}_2(\varphi,\psi))=0.$$

$y\in\mathfrak{m}_\psi$ もしくは $\psi=\mathbf{1}$ のとき,

$$\begin{aligned}&a_{x/y}(0,\mathbf{E}_2(\varphi,\psi))\\&=\frac{N(\mathfrak{d}_F)^{-1}}{2^n}\frac{\tau(\varphi\psi^{-1})}{\tau(\psi^{-1})}\left(\frac{N(\mathfrak{m}_\psi)}{N(\mathfrak{m}_{\varphi\psi^{-1}})}\right)^2\mathrm{sgn}(-y)^q\varphi(-y\mathfrak{m}_\psi^{-1})\mathrm{sgn}(-x)^r\psi^{-1}(-x)\\&\quad\times\left(\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{m}_\varphi\mathfrak{m}_\psi,\mathfrak{q}\nmid\mathfrak{m}_{\varphi\psi^{-1}}}(1-\varphi\psi^{-1}(\mathfrak{q})N(\mathfrak{q})^{-2})\right)L(-1,\varphi^{-1}\psi).\end{aligned}$$

但し, 指標 λ に対し, $\tau(\lambda)$ は λ に伴う Gauss 和とする.

§ 2.2. 主定理

原始的指標 $\varphi : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\varphi) \to \mathcal{O}^\times$ 及び $\psi : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\psi) \to \mathcal{O}^\times$ で次をみたすものを考える. $\chi = \varphi\psi$ で, 導手 $\mathfrak{m}_\varphi$ 及び $\mathfrak{m}_\psi$ が $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_\varphi \mathfrak{m}_\psi$ をみたし,

(Eis condition)

φ 及び ψ は偶指標 (resp. 奇指標), φ は非自明,

φ 及び ψ の核に対応する F の Abel 拡大体の代数的岩澤 μ 不変量がともに 0

をみたす. Weyl 群 W_G 上の指標 ϵ を $\epsilon = -\mathbf{1}$ (resp. $\epsilon = \mathbf{1}$) と定める. 但し, W_G の指標群を $\{\pm 1\}^{J_F}$ と同一視する. これらの指標 φ, ψ から誘導される Hilbert Eisenstein 級数 $\mathbf{E}_2(\varphi, \psi) \in M_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ を $\mathbf{E}$ とかく. $\mathbf{E}$ は指標 χ をもち, すべての F の整イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{m})$ 及び $U(\mathfrak{m})$ について固有関数になる.

注意. (1) $\mathbf{E}$ に伴う L 関数は Hecke L 関数の積としてかける: 指標 $\eta : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\eta) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ に対し,

$$D(s, \mathbf{E}, \eta) = L(s, \eta\varphi) L(s-1, \eta\psi).$$

これは, 本節 §2.2 の直前で述べた $\mathbf{E}$ の性質 2 より従う.

(2) $\mathbf{E}$ は無限カスプ ∞ と Γ_0 同値なすべてのカスプを零点にもつ ([Hi]). これは, 本節 §2.2 の直前で述べた $\mathbf{E}$ の性質 3 及び φ が非自明であることから従う.

$\mathbf{f} \in S_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ を正規化された Hilbert カスプ形式で, 指標 χ をもち, すべての F の整イデアル $\mathfrak{m}$ に関する Hecke 作用素 $T(\mathfrak{m})$ 及び $U(\mathfrak{m})$ について固有関数とする.

上記の記号や仮定のもとで, 主定理を述べる.

定理 2.1 (主定理). 上記の (Eis condition) 及び次の 4 条件を仮定する :

(A1) 保型形式の間の合同式 $\mathbf{f} \equiv \mathbf{E} \pmod{\varpi}$, つまり, 各 $\xi \in \mathfrak{d}_F^{-1}$ に対し,

Fourier 係数の間の合同式 $a(\xi, \mathbf{f}) \equiv a(\xi, \mathbf{E}) \pmod{\varpi}$ が成り立つ ;

$(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$ $H^n(\partial(Y^{\mathrm{BS}}), \mathcal{O})$ は捻れ元を持たない.

但し, Y^{BS} は Y の Borel–Serre コンパクト化, $\partial(Y^{\mathrm{BS}})$ をその境界とする ;

$(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$ $H_{\mathrm{c}}^{n+1}(Y, \mathcal{O})$ は捻れ元を持たない.

但し, $H_{\mathrm{c}}^*(Y, \mathcal{O})$ はコンパクト台付き Betti コホモロジーとする ;

(A3) $\mathfrak{n}$ を割る $\mathfrak{o}_F$ の素イデアル $\mathfrak{q}$ で, $C(\mathfrak{q}, \mathbf{E}) \not\equiv N(\mathfrak{q}) (\mathrm{mod}\ \varpi)$ をみたすものが存在.

但し, $C(\mathfrak{q}, \mathbf{E})$ は (2.4) で定めた $\mathbf{E}$ の $U(\mathfrak{q})$ 固有値とする.

このとき, 複素数 $\Omega_{\mathbf{f}}^{\epsilon} \in \mathbb{C}^\times$ と p 進単数 $u \in \mathcal{O}^\times$ で次をみたすものが存在する. 任意の原始的指標 $\eta : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\eta) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ で導手 $\mathfrak{m}_\eta$ が $\mathfrak{n}$ で割り切れて $\eta|_{W_G} = \epsilon$ となるものに対して, 2

つの特殊値 $\tau(\eta^{-1})D(1,\mathbf{f},\eta)/(2\pi\sqrt{-1})^n\Omega_{\mathbf{f}}^{\epsilon}$ 及び $\tau(\eta^{-1})D(1,\mathbf{E},\eta)/(2\pi\sqrt{-1})^n$ は $\mathcal{O}(\eta)$ の元であり, 次の合同式が成立する：

$$\tau(\eta^{-1})\frac{D(1,\mathbf{f},\eta)}{(2\pi\sqrt{-1})^n\Omega_{\mathbf{f}}^{\epsilon}} \equiv u\tau(\eta^{-1})\frac{D(1,\mathbf{E},\eta)}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \pmod{\varpi}.$$

但し, Weyl 群 W_G を $(F\otimes\mathbb{R})^\times/(F\otimes\mathbb{R})_+^\times$ と同一視し, $\tau(\eta^{-1})$ は η^{-1} に伴う Gauss 和, $D(1,*,\eta)$ は志村氏の意味での Dirichlet 級数 (2.5), $K(\eta)$ は K に $\mathrm{im}(\eta)$ を添加した体, 及び $\mathcal{O}(\eta)$ は $K(\eta)$ の整数環とする.

以上が主定理である. 主定理の仮定 (Eis condition), (A1), $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$, $(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$, 及び条件 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ の必要性に関して注意する.

注意. (1) (Eis condition) 内の代数的岩澤 μ 不変量についての条件は, φ 及び ψ の核に対応する体が $\mathbb{Q}$ の Abel 拡大体のとき成立する (Ferrero–Washington の定理).

(2) (A1) をみたす Hilbert カスプ形式 $\mathbf{f}$ は $L(-1,\varphi^{-1}\psi)\equiv 0 \pmod{\varpi}$ のとき存在する ([Hi]). これは, Deligne 氏及び Serre 氏の lifting lemma [Del–Se, Lemma 6.11], 仮定 $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$, $(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$, 及び (本節 §2.2 の直前で述べた) $\mathbf{E}$ の性質 3 から従う. この $\mathbf{f}$ の存在に関する結果は, $F=\mathbb{Q}$ 及び $\mathfrak{n}=\mathbb{Z}$ の場合, Ribet 氏の結果 [Ri, Proposition 3.5, Theorem 3.7] に相当する. Ribet 氏の証明の手法と本結果の証明の手法は異なる. Ribet 氏は, 保型形式の空間に直接 lifting lemma を適用している ([Ri, Proposition 3.5]). 本結果は, まず, (定理 3.3 の証明の手法を基に) Betti コホモロジー内のパラボリックコホモロジー部分に, mod ϖ すると, $\mathbf{E}$ と同じ Hecke 固有値をもつ非自明な元を構成している (定理 3.6 の証明の概略 Step 2.1 で定めるコホモロジー類 $[e_0]$). そこで, パラボリックコホモロジー部分に lifting lemma を適用している. これにより, $\mathbf{f}$ の存在は, Eichler–志村–Harder 同型 (定理 3.1) から従う.

(3) $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$ は, $[F:\mathbb{Q}]=2$, $\mathfrak{n}$ が素イデアル, 及び $(p,N(\varepsilon_+-1))=1$ のとき成立する ([Hi]). 但し, ε_+ は F の総正な基本単数とする. この証明は, Hochschild–Serre スペクトル系列に基づく. $H^n(\partial\left(Y^{\mathrm{BS}}\right),\mathcal{O})\simeq\bigoplus_{s\in C(\Gamma)}H^n(\overline{\Gamma}_s,\mathcal{O})$ に注意すると, 各カスプ $s\in C(\Gamma)$ に対し, $H^n(\overline{\Gamma}_s,\mathcal{O})$ が捻れ元を持たないことを確認すればよい. 但し, $\overline{\Gamma}_s$ は $\overline{\Gamma}$ の s における固定部分群とする. カスプ $s\in C(\Gamma)$ に対し, $\alpha\in\mathrm{SL}_2(\mathfrak{o}_F)$ を $\alpha(\infty)=s$ となるようにとると, $H^2(\overline{\Gamma}_s,\mathcal{O})=H^2(\overline{\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap B_\infty},\mathcal{O})$ とかける. 但し, $B_\infty\subset\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})^{J_F}$ を上半三角行列全体からなる標準 Borel 部分群とする. そこで, 次の自然な拡大

$$1\to\overline{\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap U_\infty}\to\overline{\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap B_\infty}\to\overline{\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap T_\infty}\to 1$$

を示し, Hochschild–Serre スペクトル系列を適用することで $H^2(\overline{\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap B_\infty},\mathcal{O})$ に捻れ元がないことが確認できる. 但し, $U_\infty\subset B_\infty$ を標準べき零根基, $T_\infty\subset B_\infty$ を標準トーラスとする. 実際,

$$\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap U_\infty\simeq\mathfrak{o}_F,\qquad\qquad \overline{\alpha^{-1}\Gamma\alpha\cap T_\infty}\simeq\mathfrak{o}_{F,+}^\times$$

となることが直接計算によってわかるので, 各 $E_2^{i,j}$ が計算できる.

$\mathfrak{n} = \mathfrak{o}_F$ の場合 (このときカスプは ∞ のみ), $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$ は Ghate 氏 [Gha, §3.4.2] によって示されていた.

(4) $(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$ は, $[F:\mathbb{Q}]=2$ 及び $(p, \sharp(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{n})^\times)=1$ のとき成立する ([Hi]). この証明は, 久賀氏の手法 [Kuga] 及び Serre 氏の結果 ([Se, Theorem 3, Corollary 3 of Theorem 2]) に基づく. 実際, Poincaré–Lefschetz 双対定理より,

$$H^3_{\mathrm{c}}(Y, \mathcal{O}) \simeq H_1(Y, \mathcal{O})$$

なので, $\overline{\Gamma}$ の最大 Abel 商が位数 p べきの捻れ元を持たないことを示せばよい. この最大 Abel 商の捻れ元については, 久賀氏によって研究されていた.

(5) 条件 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ の必要性は $\mathbf{E}$ に伴う特殊値 $\tau(\eta^{-1})D(1,\mathbf{E},\eta)/(2\pi\sqrt{-1})^n$ をコホモロジー論を用いて扱うためである. 後述するように, $\mathbf{E}$ に伴う特殊値の整性は, 条件 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ のもと, $\mathbf{E}$ の零点 ((3.4) 及びその直後の注意) を用いて, $\mathbf{E}$ に伴うコホモロジー類の整性 (定理 3.3, 命題 3.12) 及び Mellin 変換公式 (命題 3.13) から従う. これらによって, 主定理はコホモロジー類の間の合同式 (定理 3.7) から従う.

例 2.2. $F=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の場合に, 主定理の仮定をすべてみたす例を挙げる ([Hi]). F は狭義類数が 1 である. $\mathfrak{o}_F=\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, $N(\mathfrak{d}_F)=8$, 及び $\varepsilon_+=(1+\sqrt{2})^2=3+2\sqrt{2}$ に注意する. 岡崎氏による数値表 [Oka, §4, p.1137] より, 導手が素イデアル (5) である非自明な偶指標 $\chi : \mathrm{Gal}(F(\sqrt{5})/F) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ に対し,

$$L(-1,\chi)=\frac{28}{5}$$

となる. このとき, 素数 $p=7$, 素イデアル $\mathfrak{n}=(5)$ 及び Eisenstein 級数 $\mathbf{E}_2(\chi^{-1},\mathbf{1}) \in M_2((5),\mathcal{O})$ は (上記の注意より) 主定理の仮定をすべてみたすことが確認できる.

§ 3. 証明の概略

主定理の証明の鍵は主に次の 2 つである:

- 2 つの Hilbert 保型形式に伴う Betti コホモロジー類の整性及びその mod p 非消滅性を示すこと (§3.1);
- 2 つの Hilbert 保型形式の間の合同式から Betti コホモロジー類の間の合同式を導くこと (§3.2).

以下では, 各々について説明する. 最後に Betti コホモロジー類における Mellin 変換公式を補足する (§3.3).

§ 3.1. コホモロジー類の整性及びその mod p 非消滅性

Hilbert 保型形式 $\mathbf{h}$ に伴う Betti コホモロジー類を $[\omega_{\mathbf{h}}]$ とかく. これは de Rham コホモロジーと Betti コホモロジーの間の比較同型を用いて定まる. また, $[\omega_{\mathbf{h}}]$ の Weyl 群

W_G のコホモロジーへの作用に関する ϵ 固有空間への射影を $[\omega_{\mathbf{h}}]^\epsilon$ とかく. 但し, ϵ は §2.2 のはじめに定めた W_G 上の指標とする. この節では, 主定理で述べた Hilbert カスプ形式 $\mathbf{f}$ 及び Hilbert Eisenstein 級数 $\mathbf{E}$ に伴う 2 つのコホモロジー類 $[\omega_{\mathbf{f}}]^\epsilon \in H^n_{\mathrm{c}}(Y,\mathbb{C})$ 及び $[\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon \in H^n(Y,\mathbb{C})$ の整性及びその mod p 非消滅性について説明する.

(i) f に伴うコホモロジー類 $[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon$**.**

$[\omega_{\mathbf{f}}]^\epsilon$ に関しては, ある複素数 $\Omega^\epsilon_{\mathbf{f}} \in \mathbb{C}^\times$ で割ることで整にすることができる. この複素数の存在は, 下記の Eichler–志村–Harder 同型 (cf. [Hida93, Theorem 1.1], [Hida94, §2,§3]) から従う: $A=\mathbb{C}$, $\mathcal{O}$ に対し, $H^n_{\mathrm{c}}(Y,A)$ をコンパクト台付き Betti コホモロジーとし, パラボリックコホモロジー $H^n_{\mathrm{par}}(Y,A)$ を

$$H^n_{\mathrm{par}}(Y,A) = \mathrm{im}(H^n_{\mathrm{c}}(Y,A) \to H^n(Y,A))$$

で定める.

定理 3.1 (Eichler–志村–Harder 同型)**.** Hecke 加群として次の同型が存在する*:*

$$H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathbb{C})[\epsilon] \simeq S_2(\mathfrak{n},\mathbb{C}).$$

但し, W_G 上の指標 ϵ 及び W_G 上の加群 V に対し, $V[\epsilon]=\{v\in V : {}^\forall w \in W_G,\ w\cdot v = \epsilon(w)v\}$ を V の ϵ 固有部分空間とする.

注意. 上記の同型は一般の指標 ϵ では不成立である. $n=[F:\mathbb{Q}]$ が偶数の場合, $H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathbb{C})$ にはカスプ形式ではない不変微分形式から定まる部分空間があるためである. この不変微分形式への W_G の作用を調べることで, 定理で考えている ϵ 部分空間については同型になることがわかる.

この定理 3.1 を用いて Vatsal 氏の意味での標準周期の定義を一般化する.

整数環 $\mathcal{O}$ 上の Hecke 環 $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ の $T(\mathfrak{q})-C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$, $S(\mathfrak{q})-\chi^{-1}(\mathfrak{q})$ $((\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1)$ 及び $U(\mathfrak{q})-C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$ $(\mathfrak{q}|\mathfrak{n})$ で生成される素イデアルを $\mathfrak{p}_{\mathbf{f}}$ とする. 但し, $(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$ (resp. $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) に対し, $C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$ は (2.4) で定めた $\mathbf{f}$ の Hecke 作用素 $T(\mathfrak{q})$ (resp. $U(\mathfrak{q})$) に関する固有値とする. W_G の作用は Hecke 作用素 $T(\mathfrak{q})$, $U(\mathfrak{q})$, 及び $S(\mathfrak{q})$ と可換であることに注意する.

Eichler–志村–Harder 同型 (定理 3.1) と $\mathbb{C}$ 上の q 展開原理より,

$$\begin{aligned} &H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathbb{C})[\epsilon][\mathfrak{p}_{\mathbf{f}}] \text{ は } \mathbb{C} \text{ 上次元 } 1, \\ &\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O})[\epsilon][\mathfrak{p}_{\mathbf{f}}] \text{ は } \mathcal{O} \text{ 上階数 } 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

となることがわかる. 但し,

$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O}) = H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O})/(\mathcal{O} \text{ 加群 } H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O}) \text{ の捻れ部分})$$

とし, Eichler–志村–Harder 同型 (定理 3.1) より, Hecke 環 $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ を自己準同型環 $\mathrm{End}(\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O})[\epsilon])$ の部分 $\mathcal{O}$ 代数とみなし, $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ 加群 V に対し, $V[\mathfrak{p}_{\mathbf{f}}]$ を $\mathbb{T}=\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$, $I=\mathfrak{p}_{\mathbf{f}}$ として (2.3) で定めた通りとする. $V[\mathfrak{p}_{\mathbf{f}}]$ は $\mathbf{f}$ と同じ Hecke 固有値をもつ V の元全体からなる.

命題 3.2 (標準周期). $[\omega_{\mathbf{f}}]^{\epsilon} \in H^n_{\mathrm{par}}(Y, \mathbb{C})$ を $[\omega_{\mathbf{f}}]$ の ϵ 固有部分空間への射影とする. (3.1) より, ある複素数 $\Omega^{\epsilon}_{\mathbf{f}} \in \mathbb{C}^{\times}$ が存在し,

$$[\delta_{\mathbf{f}}]^{\epsilon} = \frac{[\omega_{\mathbf{f}}]^{\epsilon}}{\Omega^{\epsilon}_{\mathbf{f}}} \in \widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y, \mathcal{O}) \setminus \varpi \widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y, \mathcal{O}) \tag{3.2}$$

となる.

注意. この複素数 $\Omega^{\epsilon}_{\mathbf{f}}$ は Vatsal 氏による定義 ([Vat]) の一般化である.

(ii) E に伴う cohomology class $[\omega_{\mathbf{E}}]^{\epsilon}$.

$[\omega_{\mathbf{E}}]^{\epsilon}$ に関してはそれ自身の整性及びその mod ϖ 非消滅性を示す. ここがカスプ形式 (i) の場合と大きく異なり, 困難な点である.

定理 3.3. 主定理の仮定 (Eis condition), $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$, $(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$, (A3) のもとで,

$$[\omega_{\mathbf{E}}]^{\epsilon} \in \widetilde{H}^n(Y, \mathcal{O}) \setminus \varpi \widetilde{H}^n(Y, \mathcal{O})$$

が成り立つ. 但し,

$$\widetilde{H}^n(Y, \mathcal{O}) = H^n(Y, \mathcal{O}) / (\mathcal{O} \text{ 加群 } H^n(Y, \mathcal{O}) \text{ の捻れ部分})$$

とする.

この定理 3.3 の証明の概略を 2 段階に分けて述べる. 後述する命題 3.9 及び Mellin 変換公式 (命題 3.11) により, $[\omega_{\mathbf{E}}]^{\epsilon} = [\omega_{\mathbf{E}}]$ がわかる.

Step 1: $[\omega_{\mathbf{E}}] \in H^n(Y, K)$.

この証明には $H^n(Y, \mathbb{C})$ と群コホモロジー $H^n(\overline{\Gamma}, \mathbb{C})$ の間の比較同型を用いる. $[\omega_{\mathbf{E}}]$ の $H^n(\overline{\Gamma}, \mathbb{C})$ での像を $[\omega_{\mathbf{E}}]_{\mathrm{gp}}$ とかく. 群コホモロジーにおける制限写像 $\mathrm{res} : H^n(\Gamma, \mathbb{C}) \to \bigoplus_{s \in C(\Gamma)} H^n(\overline{\Gamma}_s, \mathbb{C})$ による $[\omega_{\mathbf{E}}]_{\mathrm{gp}}$ の像を具体的に計算することにより, 次の命題が示される. 但し, $\overline{\Gamma}_s$ はカスプ s の $\overline{\Gamma}$ における固定部分群とする.

命題 3.4. Φ_p を $\mathbb{Q}_p$ 上の有限次拡大体 $\iota_p(F^{\sigma}(\sqrt{-1})) \cdot \mathbb{Q}_p$ $(\sigma \in J_F)$ の合成体とする. K は Φ_p と $\iota_p(F')$ を含むと仮定する. 但し, $F' = F(\varepsilon^{t/2} : \varepsilon \in \mathfrak{o}^{\times}_{F,+})$ 及び $t = \sum_{\sigma \in J_F} \sigma$ とする. このとき, 次が成立する:

(1) $\mathrm{res}([\omega_{\mathbf{E}}]_{\mathrm{gp}}) \in \bigoplus_{s \in C(\Gamma)} \widetilde{H}^n(\overline{\Gamma}_s, \mathcal{O})$ と $a_s(0, \mathbf{E}) \in \mathcal{O}$ $({}^{\forall} s \in C(\Gamma))$ は同値である.

但し, $a_s(0, \mathbf{E})$ は各カスプ s における Fourier 級数展開の定数項とし,

$$\widetilde{H}^n(\overline{\Gamma}_s, \mathcal{O}) = H^n(\overline{\Gamma}_s, \mathcal{O}) / (\mathcal{O} \text{ 加群 } H^n(\overline{\Gamma}_s, \mathcal{O}) \text{ の捻れ部分})$$

とする.

(2) カスプ s に対し,
$\mathrm{res}([\omega_{\mathbf{E}}]_{\mathrm{gp}})$ の $\widetilde{H}^n(\overline{\Gamma}_s, \mathcal{O})$ 成分が 0 になることは, $a_s(0, \mathbf{E}) = 0$ と同値である.

この命題 3.4 より, $[\omega_{\mathbf{E}}] \in H^n(Y,K)$ となることは, $\mathbf{E}$ の各カスプでの定数項が整であること, Eichler–志村–Harder 同型 (定理 3.1), 及び $\mathbb{C}$ 上の q 展開原理から従う:

命題 3.5. 命題 3.4 と同じ記号及び仮定のもとで,

$$[\omega_{\mathbf{E}}] \in H^n(Y,K).$$

Step 2: $[\omega_{\mathbf{E}}]$ の整性及びその mod ϖ 非消滅性.

カスプ $s_0 \in C(\Gamma)$ を任意のカスプ $s \in C(\Gamma)$ に対し, $v_p(a_{s_0}(0,\mathbf{E})) \le v_p(a_s(0,\mathbf{E}))$ となるものとする. 但し, v_p は p 進付値とする. この定数項を用いて $\mathbf{E}$ を次のように正規化する:

$$C = a_{s_0}(0,\mathbf{E}),\ \mathbf{G} = \mathbf{E}/C.$$

命題 3.5 より, $[\omega_{\mathbf{G}}] \in H^n(Y,K)$ となる. Berger 氏 [Be, §4.1] の意味での $\mathbf{G}$ に伴う分母イデアル

$$\delta_{\mathbf{G}} = \{a \in \mathcal{O} : a[\omega_{\mathbf{G}}] \in \widetilde{H}^n(Y,\mathcal{O})\}$$

を用いると, **Step 2** で示したいことは,

$$\delta_{\mathbf{G}} = (C)$$

と言いかえられる. この等式は, Eisenstein 級数 $\mathbf{E}$ に伴う (肥田氏の意味での) 合同加群 $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})/\mathcal{I}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ の構造を決定することで得られる. ここで, $\mathcal{I}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ は $T(\mathfrak{q}) - C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$, $S(\mathfrak{q}) - \chi^{-1}(\mathfrak{q})$ ($(\mathfrak{q},\mathfrak{n}) = 1$) 及び $U(\mathfrak{q}) - C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$ ($\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) で生成される $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ のイデアルとする. 但し, $(\mathfrak{q},\mathfrak{n}) = 1$ (resp. $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) に対し, $C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$ は (2.4) で定めた $\mathbf{E}$ の Hecke 作用素 $T(\mathfrak{q})$ (resp. $U(\mathfrak{q})$) に関する固有値とする.

定理 3.6. 次の $\mathcal{O}$ 加群としての同型が存在する*:*

$$\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})/\mathcal{I}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O}) \simeq \mathcal{O}/\delta_{\mathbf{G}} \simeq \mathcal{O}/(C).$$

この定理 3.6 の証明の概略を 3 段階に分けて述べる.

Step 2.1: 全射準同型 $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})/\mathcal{I}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}/\delta_{\mathbf{G}}$ を構成する.

命題 3.4 より, $\mathrm{res}([\omega_{\mathbf{G}}]) \in \widetilde{H}^n(\partial(Y^{\mathrm{BS}}),\mathcal{O})$ である. ここで, ある $[c] \in \widetilde{H}^n(Y,\mathcal{O})[\epsilon]$ で, Betti コホモロジーにおける制限写像から誘導される写像 $\mathrm{res}: \widetilde{H}^n(Y,\mathcal{O}) \to \widetilde{H}^n(\partial(Y^{\mathrm{BS}}),\mathcal{O})$ に対し,

$$\mathrm{res}([c]) = \mathrm{res}([\omega_{\mathbf{G}}]) \tag{3.3}$$

をみたすものが存在する. 実際, $\mathrm{res}([\omega_{\mathbf{G}}]) \in \widetilde{H}^n(\partial(Y^{\mathrm{BS}}),\mathcal{O})$ の $H^n(\partial(Y^{\mathrm{BS}}),\mathcal{O})$ への持ち上げをとり, $[b]$ とかく. 仮定 $(\mathrm{A2})_{\mathrm{C}}$ より $\widetilde{H}^{n+1}_{\mathrm{c}}(Y,\mathcal{O}) = H^{n+1}_{\mathrm{c}}(Y,\mathcal{O})$ であることに注意すると, 連結準同型 $H^n(\partial(Y^{\mathrm{BS}}),\mathcal{O}) \to H^{n+1}_{\mathrm{c}}(Y,\mathcal{O})$ による $[b]$ の像は 0 になる. よって, ある $[c'] \in H^n(Y,\mathcal{O})$ で, $\mathrm{res}([c']) = [b]$ をみたすものが存在する. $[c']$ の $\widetilde{H}^n(Y,\mathcal{O})[\epsilon]$ への像を $[c]$ とかくと, (3.3) をみたす.

$d \in \delta_{\mathbf{G}}$ を $\delta_{\mathbf{G}}$ の生成元として 1 つ固定する．コホモロジー類 $[e_0]$ を $[e_0] = d([c] - [\omega_{\mathbf{G}}]) \in \widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y, \mathcal{O})[\epsilon]$ で定める．$[e_0] \neq 0$ としてよい．実際, $[e_0] = 0$ とすると, 分母イデアルの定義より, $\delta_{\mathbf{G}} = \mathcal{O}$ になる．$\mathcal{O}$ 上の自由加群 $\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y, \mathcal{O})[\epsilon]$ の基底を $[e_0]$ を含むようにとり, $[e_0], \cdots, [e_v]$ とかく．$t \in \mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ に対し, $t([e_0]) = \sum_{i=0}^{v} \lambda_i(t)[e_i]$ $(\lambda_i(t) \in \mathcal{O})$ とかく．ここで, 全射準同型 $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}/d$ を

$$\mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}/d : t \mapsto \lambda_0(t)$$

で定める．これが $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})/\mathcal{I}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ を経由することは, 保型形式とそのコホモロジー類の対応 $\mathbf{h} \mapsto [\omega_{\mathbf{h}}]$ が Hecke 作用素と可換であることから従う．

コホモロジー類 $[e_0]$ は, Ribet 氏 [Ri] や Wiles 氏 [Wil] による総実代数体の岩澤主予想の証明で Eisenstein 級数から構成されたカスプ形式をコホモロジーの言葉で解釈した元とみなすことができる．この手法は Skinner 氏と Berger 氏の手法に基づく ([Be, §4.1])．

Step 2.2: $\mathcal{O}/\delta_{\mathbf{G}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}/(C)$ を構成する．

この射は $\delta_{\mathbf{G}} \subset (C)$ を示すことで導かれる．コホモロジーの言葉で解釈された Mellin 変換公式 (命題 3.11) を用いると, 示すべきコホモロジー類 $[\omega_{\mathbf{G}}]$ の性質と Hecke L 関数の p 進的性質の間に関係を与えることができる．$[\omega_{\mathbf{E}}]$ に Mellin 変換公式を適用すると, $\mathbf{E}$ に伴う L 関数の特殊値が現れる．§2.2 のはじめに述べた注意 (1) より, $\mathbf{E}$ に伴う L 関数は Hecke L 関数の 2 つの積でかける．他方, 仮定 (Eis condition) 及び総実代数体 F 上の岩澤主予想より, φ と ψ の核に対応する体の解析的岩澤 μ 不変量が 0 になり, Hecke L 関数の p 進的性質 (Hecke L 関数の mod ϖ 非消滅性) が得られる．この 2 つのことと仮定 $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$, (A3) と合わせて $\delta_{\mathbf{G}} \subset (C)$ が従う．

Step 2.3: 上記の 2 つの射の合成 $\mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})/\mathcal{I}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}/(C)$ が同型を示す．

これを示すために, 全射 $\mathcal{O}/(C) \twoheadrightarrow \mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})/\mathcal{I}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ を構成している．この全射は, 自然な全射 $\mathbb{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O}) \twoheadrightarrow \mathcal{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ を用いて得られる．その際に, $\mathbb{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ の中に, 各カスプ s に対し, Hilbert 保型形式の s における Fourier 級数展開の定数項に対応する元を構成している．これらの元を構成するために, Andreatta 氏と Goren 氏の結果 [An–Go, §7] (有限体係数の Hilbert カスプ形式の Fourier 展開写像の核の決定) を用いて, $\mathcal{O}$ 上の Hecke 環 $\mathbb{H}_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ と $\mathcal{O}$ 上の Hilbert 保型形式の空間 $M_2(\mathfrak{n}, \mathcal{O})$ の間の双対定理を示している．

この手法は Emerton 氏の手法に基づく ([Eme, Proposition 4, Theorem 5])．

注意． すでに述べたように **Step 2** の証明は, Skinner 氏 ($F = \mathbb{Q}$ の場合) 及び Berger 氏 (虚二次体の場合 [Be]) の手法に基づくものであるが, 定理 3.3 は彼らの結果より強く $[\omega_{\mathbf{E}}]$ の整性及びその mod ϖ 非消滅性を示している．

§ 3.2. コホモロジー類の間の合同式

Mellin 変換公式 (命題 3.13) を用いると, 主定理は次の定理 3.7, つまり, コホモロジー類の間の合同式から従う．命題 3.2 及び定理 3.3 より, コホモロジー類の整性 $[\delta_{\mathbf{f}}]^{\epsilon} \in \widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y, \mathcal{O})$ 及び $[\omega_{\mathbf{E}}]^{\epsilon} \in \widetilde{H}^n(Y, \mathcal{O})$ が示されていた．$\mathcal{O}$ の剰余体 $\mathcal{O}/\varpi$ を κ とかく．それ

らの mod ϖ 写像による $\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\kappa)$ への像を $\overline{[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon}$, $\overline{[\pi_{\mathbf{E}}]^\epsilon}$ とかく. 但し, $A=\mathcal{O}$, κ に対し,

$$H^n_{\mathrm{par}}(Y,A)=\mathrm{im}(H^n_{\mathrm{c}}(Y,A)\to H^n(Y,A)),$$
$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\kappa)=H^n_{\mathrm{par}}(Y,\kappa)/(\mathcal{O}\text{ 加群 }H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O})\text{ の捻れ部分の像}).$$

注意. この mod ϖ 写像による $[\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon$ の像が $\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\kappa)$ の元を自然に定めることは仮定 $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$ から従う.

定理 3.7. 主定理と同じ仮定のもとで, ある p 進単数 $u\in\mathcal{O}^\times$ が存在して,

$$\overline{[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon}=u\overline{[\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon}.$$

この定理 3.7 の証明の概略を 3 段階に分けて述べる. 仮定 $(p,6\mathfrak{d}_F\mathfrak{n})=1$ より, Hilbert モジュラー多様体 Y の p で良い還元をもつ $\mathbb{Z}_p$ 上のモデル M 及びそのトロイダルコンパクト化 M^{tor} がとれる ([Dim–Ti, §4, §7]). そこで, 代数的 de Rham コホモロジー $\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR}}(Y,\mathcal{O})$, $\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})$, $\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)$ を次で定める:

$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR}}(Y,\mathcal{O})=H^n_{\text{log-dR}}(M^{\mathrm{tor}})_{\mathcal{O}}/(\mathcal{O}\text{ 加群 }H^n_{\text{log-dR}}(M^{\mathrm{tor}})_{\mathcal{O}}\text{ の捻れ部分}),$$
$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})=H^n_{\text{log-dR,par}}(M^{\mathrm{tor}})_{\mathcal{O}}/(\mathcal{O}\text{ 加群 }H^n_{\text{log-dR,par}}(M^{\mathrm{tor}})_{\mathcal{O}}\text{ の捻れ部分}),$$
$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)=H^n_{\text{log-dR,par}}(M^{\mathrm{tor}})_{\kappa}/(\mathcal{O}\text{ 加群 }H^n_{\text{log-dR,par}}(M^{\mathrm{tor}})_{\mathcal{O}}\text{ の捻れ部分の像}).$$

定理 3.7 の証明には, Falting 氏 [Fa], もしくは Breuil 氏 [Br] と辻氏 [Tsu] による整 p 進 Hodge 理論 (代数的 de Rham コホモロジーとエタールコホモロジーの間の比較同型), 及びエタールコホモロジーと Betti コホモロジーの間の比較同型を用いる.

Step 1: $\mathbf{f}$ に伴うコホモロジー部分.

§2.1 で述べた $T(\mathfrak{m})$, $S(\mathfrak{m})$, $U(\mathfrak{m})$ をモジュライ解釈することで, M 及び M^{tor} 上に代数的 Hecke 対応が定まる. これにより, $A=\mathcal{O},\kappa$ に対し, 上記 3 つのコホモロジーの自己準同型環の元 $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A$ ($(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$) 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A$ ($\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) が各コホモロジーの間の自然な射と可換になるように定まる. $\mathbb{H}^{\mathrm{dR}}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ (resp. $\mathcal{H}^{\mathrm{dR}}_2(\mathfrak{n},A)$) を $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_{\mathcal{O}}$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_{\mathcal{O}}$ ($(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$) 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_{\mathcal{O}}$ ($\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) (resp. $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A$ ($(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$) 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A$ ($\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$)) で生成される $\mathrm{End}(\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR}}(Y,\mathcal{O}))$ (resp. $\mathrm{End}(\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,A))$) の可換部分 A 代数とする.

$A=\mathcal{O},\kappa$ に対し, $\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{E},\mathcal{O}}$ (resp. $\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},A}$) を $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_{\mathcal{O}}-C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_{\mathcal{O}}-\chi^{-1}(\mathfrak{q})$ ($(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$) 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_{\mathcal{O}}-C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$ ($\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) (resp. $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A-C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A-\chi^{-1}(\mathfrak{q})$ ($(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$) 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{dR}}_A-C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$ ($\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$)) で生成される $\mathbb{H}^{\mathrm{dR}}_2(\mathfrak{n},\mathcal{O})$ (resp. $\mathcal{H}^{\mathrm{dR}}_2(\mathfrak{n},A)$) の素イデアルとする. 但し, $\mathbf{h}=\mathbf{E},\mathbf{f}$ 及び $(\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1$ (resp. $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) に対し, $C(\mathfrak{q},\mathbf{h})$ は (2.4) で定めた $\mathbf{h}$ の Hecke 作用素 $T(\mathfrak{q})$ (resp. $U(\mathfrak{q})$) に関する固有値とする. また, $\mathcal{H}^{\mathrm{dR}}_2(\mathfrak{n},A)$ 加群 V に対し, $V[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},A}]$ を $\mathbb{T}=\mathcal{H}^{\mathrm{dR}}_2(\mathfrak{n},A)$, $I=\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},A}$ として (2.3) で定めた通りとする.

命題 3.8.

(1) 自然な 2 つの射

$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\mathcal{O}}]/\varpi\to\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})/\varpi,$$
$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})/\varpi\to\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)\text{ は単射.}$$

特に, それらの合成は次の単射を誘導する :

$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\mathcal{O}}]/\varpi \to \widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\kappa}].$$

(2) $\mathrm{Fil}^n\left(\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\kappa}]\right)$ は κ 上次元 1.

(3) $\mathrm{Fil}^n\left(\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\mathcal{O}}]/\varpi\right) = \mathrm{Fil}^n\left(\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\kappa}]\right)$.

Step 2: $\mathbf{E}$ に伴うコホモロジー部分.

Eisenstein 級数に伴うコホモロジー部分を調べる主な道具は, カスプへの制限写像のある切断の像として定義される Eisenstein コホモロジー $H^n_{\mathrm{Eis}}(Y,\mathbb{C})$ である (cf. [Fre, Chapter III]):

$$H^n(Y,\mathbb{C}) = H^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathbb{C}) \oplus H^n_{\mathrm{Eis}}(Y,\mathbb{C}).$$

§2.1 で述べた $T(\mathfrak{m})$, $S(\mathfrak{m})$, $U(\mathfrak{m})$ により, Y 上に Hecke 対応が定まる. これにより, $? = \phi$, par 及び $A = \mathbb{C}, \mathcal{O}, \kappa$ に対し, 自己準同型環 $\mathrm{End}(\widetilde{H}^n_?(Y,A))$ の元 $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A$ $((\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1)$ 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A$ $(\mathfrak{q}|\mathfrak{n})$ が各コホモロジーの間の自然な射と可換になるように定まる. 但し, $\widetilde{H}^n_?(Y,\mathbb{C}) = H^n_?(Y,\mathbb{C})$ とする. $\mathbb{H}^{\mathrm{Be}}_2(\mathfrak{n},A)$ (resp. $\mathcal{H}^{\mathrm{Be}}_2(\mathfrak{n},A)$) を $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A$ $((\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1)$ 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A$ $(\mathfrak{q}|\mathfrak{n})$ で生成される $\mathrm{End}(\widetilde{H}^n(Y,A))$ (resp. $\mathrm{End}(\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,A))$) の可換部分 A 代数とする.

$A = \mathbb{C}, \mathcal{O}, \kappa$ に対し, $\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{E},A}$ (resp. $\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{f},A}$) を $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A - C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A - \chi^{-1}(\mathfrak{q})$ $((\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1)$ 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A - C(\mathfrak{q},\mathbf{E})$ $(\mathfrak{q}|\mathfrak{n})$ (resp. $T(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A - C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$, $S(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A - \chi^{-1}(\mathfrak{q})$ $((\mathfrak{q},\mathfrak{n})=1)$ 及び $U(\mathfrak{q})^{\mathrm{Be}}_A - C(\mathfrak{q},\mathbf{f})$ $(\mathfrak{q}|\mathfrak{n})$) で生成される $\mathbb{H}^{\mathrm{Be}}_2(\mathfrak{n},A)$ (resp. $\mathcal{H}^{\mathrm{Be}}_2(\mathfrak{n},A)$) の素イデアルとする. 但し, $\mathbf{h} = \mathbf{E}, \mathbf{f}$ 及び $(\mathfrak{q},\mathfrak{n}) = 1$ (resp. $\mathfrak{q}|\mathfrak{n}$) に対し, $C(\mathfrak{q},\mathbf{h})$ は (2.4) で定めた $\mathbf{h}$ の Hecke 作用素 $T(\mathfrak{q})$ (resp. $U(\mathfrak{q})$) に関する固有値とする. また, $\mathbb{H}^{\mathrm{Be}}_2(\mathfrak{n},A)$ 加群 V に対し, $V[\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{E},A}]$ を $\mathbb{T} = \mathbb{H}^{\mathrm{Be}}_2(\mathfrak{n},A)$, $I = \mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{E},A}$ として (2.3) で定めた通りとする.

命題 3.9. $n = [F:\mathbb{Q}] > 1$ のとき, 次が成り立つ :

(1) $H^n(Y,\mathbb{C})[\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{E},\mathbb{C}}] = H^n_{\mathrm{Eis}}(Y,\mathbb{C})[\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{E},\mathbb{C}}]$ は $\mathbb{C}$ 上次元 1.

(2) $H^n_{\mathrm{Eis}}(Y,\mathbb{C}) = \mathrm{Fil}^n H^n_{\mathrm{Eis}}(Y,\mathbb{C})$.

そこで,

$$N = \mathrm{im}\left(\mathrm{mod}\,\varpi : \widetilde{H}^n_{\mathrm{dR}}(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{E},\mathcal{O}}] \to \widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\kappa)[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\kappa}]\right)$$

とおく. 但し, $\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{E},\mathcal{O}}$ は, 命題 3.8 の直前で定義した素イデアルとする. 上記の命題 3.9 及び定理 3.3 より, 次の命題を得る:

命題 3.10. N は非自明であり, κ 上次元 1 及び $N = \mathrm{Fil}^n N$.

証明は, 整 p 進 Hodge 理論を用いる. 非自明性に関しては定理 3.3, 次元と Hodge 数に関しては命題 3.9 から従う.

Step 3: コホモロジー類の間の合同式.

命題 3.8 及び命題 3.10 より, 自然な写像

$$\mathrm{Fil}^n\left(\widetilde{H}^n_{\mathrm{dR,par}}(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{dR}}_{\mathbf{f},\mathcal{O}}]/\varpi\right)\to \mathrm{Fil}^n N = N$$

は同型となることがわかる. そこで, 整 p 進 Hodge 理論を適用することで, これをエタールコホモロジーの言葉に翻訳できる. それをさらにエタールコホモロジーと Betti コホモロジーの間の比較同型を用いて翻訳する. すると,

$$L=\mathrm{im}\left(\mathrm{mod}\,\varpi : \widetilde{H}^n(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{E},\mathcal{O}}]\to \widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\kappa)[\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{f},\kappa}]\right)$$

として, 次を得る: 自然な写像 $\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O})\to\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\kappa)$ より, 同型

$$\widetilde{H}^n_{\mathrm{par}}(Y,\mathcal{O})[\mathfrak{p}^{\mathrm{Be}}_{\mathbf{f},\mathcal{O}}]/\varpi \text{ のある 1 次元部分空間 } \xrightarrow{\simeq} L$$

を得る. 左辺の「ある 1 次元部分空間」は Eichler–志村–Harder 同型 (定理 3.1) より ϵ 固有部分空間になる. つまり, $\overline{[\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon}$ で生成される左辺が $\overline{[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon}$ で生成されることがわかる. 特に, この 2 つのコホモロジー類は p 進単数を除いて一致する.

注意. 証明の手法は, Vatsal 氏 ($F=\mathbb{Q}, k=2$) によるエタールコホモロジーにおける重複度 1 定理 [Vat, Theorem 2.7] を用いた従来の手法と異なる. 重複度 1 定理は, 一般の総実代数体 F において, 適当な仮定のもとで, Dimitrov 氏によって知られている ([Dim2, Theorem 6.7]) が, Vatsal 氏や本稿で扱っている $\mathbf{f}$ に伴う Galois 表現が剰余可約な場合は除外されている.

§ 3.3. コホモロジー類における Mellin 変換公式

この節では, カスプ形式とは限らない Hilbert 保型形式に伴う L 関数の特殊値のコホモロジー的な扱い方について説明する. この議論は, [Oda, §16], [Hida94, §7, §8], [Ochi, §3] に基づく.

無限カスプ ∞ と Γ_0 同値な $C(\Gamma)$ の元全体のなす $C(\Gamma)$ の部分集合を C_∞ で表す.

主定理で述べた原始的指標 η を 1 つ固定し, その導手を $\mathfrak{m}_\eta$ とかく. F の総正な単数群 $\mathfrak{o}^\times_{F,+}$ の部分群 $\mathfrak{o}^\times_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}$ を $\mathfrak{o}^\times_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}=\{\varepsilon\in\mathfrak{o}^\times_{F,+} : \varepsilon\equiv 1(\mathrm{mod}\ \mathfrak{m}_\eta)\}$ で定める.

以下, $\mathfrak{o}_F$ 同型 $\mathfrak{o}_F/\mathfrak{m}_\eta\simeq\mathfrak{m}_\eta^{-1}/\mathfrak{o}_F$ を 1 つ固定し, $((\mathfrak{o}_F/\mathfrak{m}_\eta)^\times$ の像$)/\mathfrak{o}^\times_{F,+}$ の完全代表系 $S\subset\mathfrak{m}_\eta^{-1}$ で次をみたすものを 1 つとる:

(3.4) 各カスプ $b\in S$ に対し, b は無限カスプ ∞ と Γ_0 同値.

§2.2 のはじめに述べた注意 (2) より, $\mathbf{E}$ は各カスプ $b\in S$ を零点にもつことに注意する.

注意. 集合 S の存在は仮定 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ から従う. 実際, $\mathfrak{m}_\eta$ の生成元 m 及び $(\mathfrak{o}_F/\mathfrak{m}_\eta)^\times$ の完全代表系 $S' \subset \mathfrak{o}_F$ で各 $x \in S'$ が m と素なものを固定する. このとき, 集合 $\{x/m \mid x \in S'\}$ は $((\mathfrak{o}_F/\mathfrak{m}_\eta)^\times$ の像$)/\mathfrak{o}_{F,+}^\times$ の完全代表系になる. 仮定 $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ より, $m \in \mathfrak{n}$ なので, $\begin{pmatrix} x & * \\ m & * \end{pmatrix}$ という形の Γ_0 の元があり (3.4) をみたす.

$b \in S$ に対し, 次の $\mathfrak{H}^{J_F}$ の部分集合 H_b を考える:

$$H_b = b + \sqrt{-1}(F \otimes \mathbb{R})_+^\times = \{b + \sqrt{-1}y \ : \ y \in (F \otimes \mathbb{R})_+^\times\}.$$

群 $\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times$ は H_b に次のように作用する:

$$\varepsilon * (z_\sigma)_{\sigma\in J_F} = (\varepsilon^\sigma z_\sigma - (\varepsilon^\sigma - 1)b)_{\sigma\in J_F} = \left(\begin{pmatrix} \varepsilon^\sigma & -(\varepsilon^\sigma - 1)b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_\sigma\right)_{\sigma\in J_F}.$$

各 $\varepsilon \in \mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times$ に対し, $(\varepsilon-1)b \in \mathfrak{o}_F$ なので, $\varepsilon*(z_\sigma)_\sigma$ は $(z_\sigma)_\sigma$ と Γ 同値になる. これより, $H_b \subset \mathfrak{H}^{J_F}$ から自然に $H_b/\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times \to Y$ が誘導される. この射は各々のコンパクト化の間の射 $H_b^{\mathrm{BS}}/\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times \to Y^{\mathrm{BS}}$ にのびる. 但し, H_b^{BS} は Hilbert 上半平面 $\mathfrak{H}^{J_F}$ の Borel–Serre コンパクト化 $(\mathfrak{H}^{J_F})^{\mathrm{BS}}$ の無限カスプ ∞ での境界 $(\mathbb{R}_+^\times \cup \{\infty\}) \times \{(\sqrt{-1}y_\sigma)_\sigma : \prod_{\sigma\in J_F} y_\sigma = 1\}$ の $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ による像 ($\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は第 1 成分に自明に作用) とし, Y^{BS} は Y の Borel–Serre コンパクト化とする. 上記の作用により $\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times$ は H_b^{BS} に自然に作用する. S についての仮定 (3.4) より, 相対 Betti コホモロジーの間の射を得る: $A = \mathbb{C}, K, \mathcal{O}, \kappa$ に対し,

$$H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; A) \to H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{b,\infty}; A) \to H_{\mathrm{c}}^n(H_b/\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times, A). \tag{3.5}$$

但し, D_s は Y^{BS} のカスプ s における境界, $D_{C_\infty} = \coprod_{s\in C_\infty} D_s$, 及び $D_{b,\infty} = D_b \sqcup D_\infty$ とする.

値写像

$$\mathrm{ev}_{b,A} : \widetilde{H}^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; A) \to A$$

を (3.5) と跡写像 $H_{\mathrm{c}}^n(H_b/\mathfrak{o}_{F,\mathfrak{m}_\eta,+}^\times, A) \to A$ を用いて定める. 但し, $A = \mathbb{C}, K, \mathcal{O}$ に対し,

$$\widetilde{H}^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; A) = H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; A)/(A \text{ 加群 } H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; A) \text{ の捻れ部分}),$$
$$\widetilde{H}^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \kappa) = H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \kappa)/(\mathcal{O} \text{ 加群 } H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \mathcal{O}) \text{ の捻れ部分の像}).$$

2 つの保型形式 $\mathbf{f}$ 及び $\mathbf{E}$ に対し, §2.2 のはじめに述べた注意 (2) 及び S の条件 (3.4) より, 相対 Betti コホモロジー類 $[\delta_{\mathbf{f}}]_{\mathrm{rel}}^\epsilon, [\omega_{\mathbf{E}}]_{\mathrm{rel}}^\epsilon \in H^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \mathbb{C})$ が自然に定まる. これは, 相対 de Rham コホモロジーと相対 Betti コホモロジーの間の比較同型 [Bo, Theorem 5.2] (及びその証明) によって得られる. これらのコホモロジー類を用いることで, 古典的な Mellin 変換公式を次のように言いかえることができる:

命題 3.11. $\eta : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\eta) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を原始的指標で導手 $\mathfrak{m}_\eta$ が $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ 及び $\eta|_{W_G} = \epsilon$ をみたすとする. このとき,

$$\sum_{b\in S} \eta(\bar{b})^{-1}\mathrm{ev}_{b,\mathbb{C}}([\omega_{\mathbf{f}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}}) = \tau(\eta^{-1})\frac{D(1,\mathbf{f},\eta)}{(-2\pi\sqrt{-1})^n},$$
$$\sum_{b\in S} \eta(\bar{b})^{-1}\mathrm{ev}_{b,\mathbb{C}}([\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}}) = \tau(\eta^{-1})\frac{D(1,\mathbf{E},\eta)}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}$$

が成り立つ.

この命題 3.11 の整版を考える.

命題 3.12. 主定理の仮定 (A3) 及び命題 3.4 と同じ記号のもとで,

$$[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}} \in \widetilde{H}^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \mathcal{O}),$$
$$[\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}} \in \widetilde{H}^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \mathcal{O}).$$

この証明は, Greenberg 氏及び Stevens 氏による議論 [Gre–Ste, Lemma 6.9.b] に基づく. 実際, 仮定 $(\mathrm{A2})_{\mathrm{B}}$ 及び (A3) のもとで, $\widetilde{H}^n(Y^{\mathrm{BS}}, D_{C_\infty}; \mathcal{O}) \to \widetilde{H}^n(Y, \mathcal{O})$ の核を (より厳密には適当な Hecke 環の極大イデアルで局所化することで) Hecke 作用素で消すことができる. そのため, 相対コホモロジー類と通常のコホモロジー類の間のずれがなくなり, $[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon, [\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon$ の整性 (命題 3.2, 定理 3.3) から導ける.

コホモロジー類における Mellin 変換公式は次の通りである:

命題 3.13. $\eta : \mathrm{Cl}_F^+(\mathfrak{m}_\eta) \to \overline{\mathbb{Q}}^\times$ を原始的指標で導手 $\mathfrak{m}_\eta$ が $\mathfrak{n}|\mathfrak{m}_\eta$ 及び $\eta|_{W_G} = \epsilon$ をみたすとする. このとき, $A = K$, $\mathcal{O}$, κ に対し,

$$\sum_{b\in S} \eta(\bar{b})^{-1}\mathrm{ev}_{b,A}([\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}}) = \tau(\eta^{-1})\frac{D(1,\mathbf{f},\eta)}{(-2\pi\sqrt{-1})^n\Omega^\epsilon_{\mathbf{f}}} \in A(\eta),$$
$$\sum_{b\in S} \eta(\bar{b})^{-1}\mathrm{ev}_{b,A}([\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}}) = \tau(\eta^{-1})\frac{D(1,\mathbf{E},\eta)}{(-2\pi\sqrt{-1})^n} \in A(\eta).$$

主定理は, この命題 3.13 及び定理 3.7 から得られる. 実際, 命題 3.13 より, 主定理は相対コホモロジー類 $[\delta_{\mathbf{f}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}}$, $[\omega_{\mathbf{E}}]^\epsilon_{\mathrm{rel}}$ の間の合同式を導くことに帰着される. その合同式は, 定理 3.7 から Hecke 固有値に関する仮定 (A3) を用いて命題 3.12 の証明と同様にして得られる.

References

[An–Go] F. Andreatta, E. Z. Goren, *Hilbert modular forms: mod p and p-adic aspects*, Mem. Amer. Math. Soc. **173** (2005) no. 819.

[Be] T. Berger, *On the Eisenstein ideal for imaginary quadratic fields*, Compos. Math. **145** (2009) no. 3, 603–632.

[Bo] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups. II*, Manifolds and Lie groups (Notre Dame, Ind., 1980), pp. 21–55, Progr. Math., **14**, Birkhäuser, Boston, Mass., (1981).

[Br] C. Breuil, *Cohomologie étale de p-torsion et cohomologie cristalline en réduction semi-stable*, Duke Math. J. **95** (1998), no. 3, 523–620.

[Da–Da–Po] S. Dasgupta, H. Darmon, R. Pollack, *Hilbert modular forms and the Gross-Stark conjecture*, Ann. of Math. (2) **174** (2011), no. 1, 439–484.

[Del–Se] P. Deligne, J-P. Serre, *Formes modulaires de poids* 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530.

[Dim2] M. Dimitrov, *Galois representations modulo p and cohomology of Hilbert modular varieties*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **38** (2005) no. 4, 505–551.

[Dim–Ti] M. Dimitrov, J. Tilouine, *Variétés et formes modulaires de Hilbert arithmétiques pour* $\Gamma_1(\mathfrak{c}, \mathfrak{n})$, Geometric aspects of Dwork theory. Vol. I, II, 555–614, Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, Berlin, (2004).

[Eme] M. Emerton, *The Eisenstein ideal in Hida's ordinary Hecke algebra*, Internat. Math. Res. Notices (1999), no. 15, 793–802.

[Fa] G. Faltings, *Crystalline cohomology and p-adic Galois-representations*, Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988), 25–80, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, MD, (1989).

[Fre] E. Freitag, *Hilbert modular forms*, Springer-Verlag, Berlin, (1990).

[Gha] E. Ghate, *Adjoint L-values and primes of congruence for Hilbert modular forms*, Compositio Math. **132** (2002), no. 3, 243–281.

[Gre–Ste] R. Greenberg, G. Stevens, *p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms*, Invent. Math. 111 (1993), no. 2, 407–447.

[Gre–Vat] R. Greenberg, V. Vatsal, *On the Iwasawa invariants of elliptic curves*, Invent. Math., **142** (2000) no. 1, 17–63.

[Hida93] H. Hida, *p-ordinary cohomology groups for* $\mathrm{SL}(2)$ *over number fields*, Duke Math. J. **69** (1993) no. 2, 259–314.

[Hida94] H. Hida, *On the critical values of L-functions of* $\mathrm{GL}(2)$ *and* $\mathrm{GL}(2) \times \mathrm{GL}(2)$, Duke Math. J. **74** (1994) no. 2, 431–529.

[Hi] Y. Hirano, *Congruences of Hilbert modular forms over real quadratic fields and the special values of L-functions*, submitted.

[Kato] K. Kato, *p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms*, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III, Astérisque No. **295** (2004), ix, 117–290.

[Kuga] M. Kuga, *Group cohomology and Hecke operators. II. Hilbert modular surface case*, Automorphic forms and number theory, Sendai, (1983), 113–148, Adv. Stud. Pure Math., **7**, North-Holland, Amsterdam, (1985).

[Ochi] T. Ochiai, *Several variables p-adic L-functions for Hida families of Hilbert modular forms*, Doc. Math. **17** (2012), 807–849.

[Oda] T. Oda, *Periods of Hilbert modular surfaces*, Progress in Mathematics, **19**. Birkhäuser, Boston, Mass., (1982).

[Oka] R. Okazaki, *On evaluation of L-functions over real quadratic fields*, J. Math. Kyoto Univ. **31** (1991), no. 4, 1125–1153.

[Ri] K. A. Ribet, *A modular construction of unramified p-extensions of* $\mathbb{Q}(\mu_p)$, Invent. Math. **34** (1976), no. 3, 151–162.

[Se] J-P. Serre, *Le problème des groupes de congruence pour* SL_2, Ann. of Math. (2) **92**. (1970), 489–527.

[Shi] G. Shimura, *The special values of the zeta functions associated with Hilbert modular forms*, Duke Math. J. **45** (1978), no. 3, 637–679.

[Ski–Ur] C. Skinner, E. Urban, *The Iwasawa main conjectures for* GL_2, Invent. Math. **195** (2014), no. 1, 1–277.

[Ste1] G. Stevens, *Arithmetic on modular curves*, Progress in Mathematics, **20** Birkhäuser Boston, Inc., Boston, (1982).

[Ste2] G. Stevens, *The cuspidal group and special values of L-functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985) no. 2, 519–550.

[Tsu] T. Tsuji, *On p-adic nearby cycles of log smooth families*, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), no. 4, 529–575.

[Vat] V. Vatsal, *Canonical periods and congruence formulae*, Duke Math. J. **98** (1999) no. 2, 397–419.

[Wil] A. Wiles, *The Iwasawa conjecture for totally real fields*, Ann. of Math. (2) **131** (1990) no. 3, 493–540.