RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 95–102

K3 曲面の良い還元の判定法について：アナウンスメント (Good reduction criterion for K3 surfaces: an announcement)

By

松本 雄也 (Yuya Matsumoto)*

Abstract

This is an announcement of another paper by the author (published in Math. Z.). We prove that whether a K3 surface has potential good reduction can be determined from the Galois representation defined from the l-adic or p-adic étale cohomology groups of the K3 surface. This is an analogue of the Néron–Ogg–Shafarevich criterion for abelian varieties. We also have an application to the period map of K3 surfaces in mixed characteristics.

§ 1. Introduction

本稿は著者による論文 [14] の結果の紹介である．

K は完備離散付値体で，剰余体 k が標数 $p \geq 0$ の完全体であるものとする．K の整数環を $\mathcal{O}_K$ で表す．K 上定義された固有滑らかな代数多様体 X が**良い還元をもつ**とは，X がある $\mathcal{O}_K$ 上固有滑らかなスキーム $\mathcal{X}$ の生成ファイバーとなることをいう．また，ある有限次拡大 K'/K に対して $X_{K'}$ が良い還元をもつとき X は**潜在的に良い還元をもつ**という．

多様体 X が良い還元を（もしくは潜在的に良い還元を）もつか否かを，X の l 進ないし p 進のエタールコホモロジーが定めるガロア表現（K の絶対ガロア群 $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ の表現）の性質から判定することを考える（p 進コホモロジーについては K が混標数，すなわち K が標数 0 で k が正標数である場合にのみ考える）．アーベル多様体の場合がモデルケースであり次の判定法が成り立つ．

Received March 27, 2014. Revised December 11, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): Primary 14J28; Secondary 11G25 and 14G20.
Key Words: *K3 surfaces, good reduction, Galois representations, period maps.*
Supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows Grant Number 12J08397.
*Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba Meguro-ku Tokyo 153-8914, Japan.
e-mail: ymatsu@ms.u-tokyo.ac.jp

定理 1.1. A を K 上のアーベル多様体とすると，次が成り立つ．

(1) (Serre–Tate [28, Theorem 1]) l を p と異なる素数とする．A が良い還元をもつことと，$H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ が G_K の不分岐表現になることとは同値である．

(2) (Coleman–Iovita [3, Theorem II.4.7], また Breuil [2, Corollaire 1.6] + Kisin [7, Theorem 0.3]) K は混標数であるとする．A が良い還元をもつことと，$H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ が G_K のクリスタリン表現になることとは同値である．

一般の多様体に対して同様の判定法が成り立つか考えてみると，H^1 だけでなくすべての次数の l 進コホモロジー群が不分岐になることは，良い還元をもつための必要条件にはなる（これはエタールコホモロジーの一般論から従う）が，一般には十分条件にならない．p 進の場合も（不分岐をクリスタリンで言い換えて）同様である．したがって，この種の判定法が成立する多様体のクラスは（もしあれば）アーベル多様体に近いものであると考えられる．

（ちなみに，不分岐性が良い還元の十分条件にならない例は代数曲線の場合に既に存在する．C を K 上の曲線とし，$\mathrm{Jac}\, C$ をそのヤコビアン多様体とすると，$\mathrm{Jac}\, C$ の H^1 は C の H^1 に自然に同型になり，したがって H^1 が不分岐ならば $\mathrm{Jac}\, C$ は良い還元をもつが，そのことから C が良い還元をもつことは導かれない．種数 $0, 1$ の場合でさえ，C が K 有理点をもたない場合には成り立たない．）

本稿では K3 曲面に対するこの種の判定法を調べる．(念のため定義を復習すると，体 κ 上の K3 曲面とは，κ 上の射影的滑らかな 2 次元多様体 X であって，$\Omega^2_{X/\kappa} \cong \mathcal{O}_X$ および $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ を満たすものをさす．)

伊藤 [5] はクンマー曲面に対し類似の判定法が成立することを示した（クンマー曲面は K3 曲面の一種である）．これを参考にして，私はまた別の種類の K3 曲面について類似の判定法が成立することを示した（以前の本集会の講究録 [12] および論文 [13] を参照）．いずれも K3 曲面のうち特殊なものに対する結果であったが，今回私は多くの K3 曲面について類似の判定法が成り立つことを示した．それが次の定理である．

定理 1.2 ([14]). X を K 上の K3 曲面とする．$p > 0$ のときは，X は豊富な線束 L であって不等式 $p > L^2 + 4$ を満たすものをもつと仮定する．次のうち少なくとも一方が成り立つと仮定する：

(1) ある素数 $l \neq p$ に対し，$H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ は G_K の不分岐表現になる．

(2) K は混標数であり，$H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)$ は G_K のクリスタリン表現になる．

このとき，ある有限次拡大 K'/K に対し，$\mathcal{O}_{K'}$ 上固有滑らかな代数空間 $\mathcal{X}$ であって生成ファイバーが $X_{K'}$ に同型なものが存在する．(すなわち，X は《代数空間の範疇で》潜在的に良い還元をもつ．)

この定理の主張中の「代数空間」を「スキーム」で置き換えると反例が存在するので，代数空間を考えることはある種不可欠である．代数空間だと証明ができる（スキームの範囲ではできない）理由については次節で触れる．

$p > 0$ のときの $p > L^2 + 4$ の仮定については，後述の証明を見ると分かるように，半

安定還元予想が X については成り立つ（X が潜在的に半安定還元をもつ）ことを認めれば $p \geq 5$ という条件に弱めることができる．

「潜在的」の条件は外せない（基礎体の拡大が必要となる例が存在する）のではないかと予想しているが，まだ完全な証明は得られていない[1]．一方，おそらく体拡大の次数を具体的な定数で上から評価できるとも予想している．

なお，複素 K3 曲面の退化については Kulikov [8] および Persson–Pinkham [23] により（言葉遣いは異なるものの）この定理と同等の結果が既に知られていることに注意する．また，最近 Perez Buendia [22] が，混標数の場合の p 進コホモロジーを用いた判定法について，（極小半安定モデルがスキームの範囲でとれる場合に限定してはいるが）関連する結果を発表している．

次節でこの定理の証明の方針を説明し，その次の節でこの定理の K3 曲面の周期写像への応用を解説する．

§2. 証明の方針

定理 1.2 の証明は，（K を適宜拡大して）K3 曲面 X の $\mathcal{O}_K$ 上のうまいモデル $\mathcal{X}$ を構成する部分（これにはガロア表現に関する仮定は必要ない）と，ガロア表現の情報を用いて $\mathcal{X}$ の特殊ファイバーの形状を決定する部分との大きく 2 つに分かれる．

まずモデルの構成について述べる．この方法は Maulik の最近の論文 [15] によるものである．なお以下たびたび K を有限次拡大で置き換えるが，記号を簡略化するため同じ文字 K で表すことにする．

簡単のため定理の仮定にある L が非常に豊富である場合の構成のみを述べる．線形系 $|L|$ を用いて，X と双有理同値である固有滑らかな曲面 X' であって $\mathbb{P}^1$ 上の種数 $g = L^2/2+1$ の曲線の族になっているものがとれる．斎藤 [27, Corollary 1.9] の半安定還元の結果を用いると，（K を拡大して）X' の強半安定モデル $\mathcal{X}'$ がとれる（$p > 0$ のときは，ここで $p > 2g+2 = L^2+4$ であるという仮定が必要になる）．L が非常に豊富でない場合にもやはり，X と双有理同値である固有滑らかな曲面 X' の強半安定モデル $\mathcal{X}'$ がとれる．半安定還元予想を仮定する場合は，この段落の議論は不要になり，$p > L^2+4$ なる L が存在するという仮定を外すことができる．

川又 [6] による，$\mathcal{O}_K$ 上相対 2 次元半安定スキームに対する（相対的）極小モデルプログラム（ここで $p \neq 2,3$ が必要となる）をこの $\mathcal{X}'$ に適用することで，（K を拡大して）次の条件を満たす $\mathcal{O}_K$ 上固有なスキーム $\mathcal{X}''$ を得る：$\mathcal{X}''$ の生成ファイバーは X に一致し，$\mathcal{X}''$ の特殊ファイバーは有理二重点を除いて強半安定であり，さらに $\mathcal{X}'' \to \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ の相対標準因子は自明である．

固有な射 $\mathcal{X}''' \to \mathcal{X}''$ であって生成ファイバー上は同型であり特殊ファイバーの既約成分上は有理二重点の最小特異点解消になっているものがとれればよいが，スキームの範

[1] 追記（2014 年 11 月）：私は最近 Christian Liedtke 氏と共同で定理 1.2 を改良した：体拡大 K'/K は不分岐拡大にとれることと，$K' = K$ とできない例が存在すること [10, Theorems 5.1, 6.2] を示した．

囲ではこれは一般には存在しない．しかし Artin [1, Theorem 2] の結果によれば，（K を拡大して）代数空間 $\mathcal{X}'''$ からの射であって上記の条件を満たすものがとれる．スキームの範囲でこの種の解消ができない例は Artin [ibid.] に挙げられている．また私の論文でも例を挙げた（この例は定理がスキームの範囲で成り立たないことを示す例にもなっている）．

本節の冒頭で述べた「X のうまいモデル」とはこの $\mathcal{X}'''$（以下単に $\mathcal{X}$ と書く）である．$\mathcal{X}$ は $\mathcal{O}_K$ 上強半安定であり，その生成ファイバーは X であり，特殊ファイバー X_k は SNC（＝単純正規交差）対数的 K3 曲面とよばれるものになっている（なお，$\mathcal{X}$ がスキームでない場合でも X_k はスキームになり，さらに対数的スキームの構造が入る）．

次に，ガロア表現の情報から X_k の形状を決定する方法について述べる．X_k の既約成分を Z_i で表し，非負整数 m に対して，$Z_{i_0} \cap \cdots \cap Z_{i_m}$（$i_j$ たちはすべて相異なる）の形の部分スキームたちの非交差和を $X_k^{(m)}$ と書く．

$\mathcal{X}$ がスキームになっている場合をまず考える．

まず l 進コホモロジーについて考える．Rapoport–Zink [24] による，モノドロミー作用素 N と可換な重さスペクトル系列

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq \max\{0,-p\}} H_{\text{ét}}^{q-2i}(X_{\overline{k}}^{(p+2i)}, \mathbb{Q}_l(-i)) \Rightarrow H_{\text{ét}}^{p+q}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$$

により，$\mathcal{X}$ の生成ファイバー X のコホモロジーと特殊ファイバー X_k（の既約成分たちの共通部分たち）のコホモロジーが結びつく．このスペクトル系列は E_2 退化し（中山 [17] による），また（2 次元なので）重さモノドロミー予想の同型

$$N^e \colon E_2^{-e,i+e} \xrightarrow{\sim} E_2^{e,i-e}(-e)$$

が成立する（Rapoport–Zink [ibid.] により証明されている）．生成ファイバーの H^2 が不分岐であることから $N = 0$ が従うが，SNC 対数的 K3 曲面の分類（Kulikov [ibid.]，中島 [18] による）および各場合の N のベキ零指数の記述（$E_2^{p,q}$ の計算から求まる）とあわせて，X_k が滑らかな場合以外にないことが従う（この場合，X_k は K3 曲面になる）．

p 進コホモロジーについても同様に，Mokrane [16] による，N と可換な重さスペクトル系列

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{i \geq \max\{0,-p\}} H_{\text{crys}}^{q-2i}(X_k^{(p+2i)}/W)(-i) \Rightarrow H_{\text{logcrys}}^{p+q}(X_k/W)$$

があり（W は k の Witt 環），E_2 退化し，上記の重さモノドロミー予想の同型が H^2 については成立する（中島 [19, 20] による）．これと，特殊ファイバーの対数的クリスタリンコホモロジーと生成ファイバーの p 進エタールコホモロジーを比較する，辻 [29] による半安定予想の比較同型

$$H_{\text{logcrys}}^2(X_k/W) \otimes_W K \cong (D_{\text{pst}}(H_{\text{ét}}^2(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_p)) \otimes_{K_0^{\text{ur}}} \overline{K})^{G_K}$$

（これも N と可換である）を用い，また生成ファイバーの H^2 がクリスタリンゆえ右辺で $N = 0$ であることを用いると，l 進の場合と同様に，X_k が滑らかであることが従う．

われわれの代数空間 $\mathcal{X}$ は一般にはスキームとは限らない．そこで，これらの議論を次のように（$\mathcal{O}_K$ 上相対 2 次元で強半安定な）代数空間まで一般化する．

l 進の場合，私は重さスペクトル系列の斎藤 [26, Section 2] による（偏屈層を用いる）構成を代数空間へと一般化し，E_2 退化や，2 次元の場合の重さモノドロミー予想の同型が成立することを確かめた．

p 進の場合，まずわれわれの X_k は（$\mathcal{X}$ がスキームでない場合でも）対数的スキームになることに注意すると，対数的スキームに対し定義された前述のスペクトル系列およびその性質はこの場合もそのまま従う．半安定予想の比較同型については，半安定代数空間の（対数的）クリスタリンコホモロジーに関する Olsson [21] の比較同型を用いることで同じ同型が得られることを確かめた．

以上により $\mathcal{X}$ がスキームと限らない場合にも（l 進，p 進いずれの場合にも）X_k が滑らかであることが従い，定理の証明が完結した．

§ 3. 応用：周期写像の全射性

d を正の整数とする．M_{2d} を次数 d の準偏極つき K3 曲面のモジュライ空間とする（例えば，体 κ に対し，$M_{2d}(\mathrm{Spec}\,\kappa)$ は κ 上の K3 曲面 X と X 上のネフかつ巨大な線束 L で $L^2 = 2d$ なるものの組からなる．なお，豊富ならばネフかつ巨大になるが，逆は成り立たない.）．これは $\mathbf{Z}[1/2]$ 上のドリーニュ・マンフォードスタックになる．M_{2d} のうち，準偏極が偏極になっている（上記の κ 値点の記述でいうと L が豊富になっている）部分を M_{2d}° で表す．これは M_{2d} の開部分スタックになる．準偏極つき複素 K3 曲面の周期写像 $\iota_{\mathbf{C}}$ とは，$\mathbf{C}$ 上の (X, L) に対し，ホッジ構造 $H^2(X, \mathbf{Z})$ の中での $c_1(L)$ の直交補空間 $PH^2((X, L), \mathbf{Z}) := \langle c_1(L) \rangle^{\perp}$ を対応させるものである．この $PH^2((X, L), \mathbf{Z})$ は格子（＝ペアリングつき $\mathbf{Z}$ 加群）としては d のみに依存し（それを Λ_d で表す），ホッジ分解が (X, L) に依存する．すなわちこの周期写像 $\iota_{\mathbf{C}}$ は Λ_d 上のホッジ構造全体のなす空間を $\mathrm{SO}(\Lambda_d)$ で割った空間 $\mathrm{Sh}(\Lambda_d)_{\mathbf{C}}$ に値をとる：

$$\iota_{\mathbf{C}} \colon M_{2d,\mathbf{C}} \to \mathrm{Sh}(\Lambda_d)_{\mathbf{C}}.$$

偏極つき複素 K3 曲面に対するトレリ型定理は，$\iota_{\mathbf{C}}$ の $M_{2d,\mathbf{C}}^{\circ}$ への制限が単射であるという主張に他ならない．

近年の Rizov [25] および Madapusi Pera [11] の研究により，この周期写像は $\mathbb{Q}$ 上の射に降下し，素数 $p \neq 2$ に対しては $\mathbf{Z}_{(p)}$ 上の射

$$\iota_{\mathbf{Z}_{(p)}} \colon M_{2d,\mathbf{Z}_{(p)}} \to \mathcal{S}(\Lambda_d)_{(p)}$$

に延長することが分かった．ここで右辺は志村多様体 $\mathrm{Sh}(\Lambda_d)$ の適当な整モデルである．なお正確には適切なレベル構造を入れて（M_{2d} の適切な被覆上で）定義する必要があるが簡単のため省略する．

さて，$\mathbf{C}$ 上の周期写像 $\iota_{\mathbf{C}}$ は全射であることが知られている（Kulikov [9]）．定理 1.2 の応用として，（仮定つきで）これの混標数類似が示せる：

定理 3.1. 素数 p と正整数 d は $p > 18d + 4$ を満たすものとする．このとき $\mathbf{Z}_{(p)}$ 上の周期写像 $\iota_{\mathbf{Z}_{(p)}} \colon M_{2d, \mathbf{Z}_{(p)}} \to \mathcal{S}(\Lambda_d)_{(p)}$ は全射である．

これの証明について解説する．$\iota_{\mathbf{Z}_{(p)}}$ の M_{2d}° への制限は開埋め込みで像が稠密になっているので，次の主張を示すことに帰着される（やはりレベル構造の記述は省略する，また添え字 $\mathbf{Z}_{(p)}$ も省略する）：剰余標数 p の任意の離散付値体 K と，任意の可換図式

$$\begin{tikzcd}
M_{2d}^{\circ} \arrow[r, hook] & M_{2d} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{S}(\Lambda_d)_{(p)} \\
\operatorname{Spec} K \arrow[u, "x"] \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

に対して，適当な有限次拡大 K'/K をとると

$$\begin{tikzcd}
M_{2d}^{\circ} \arrow[r, hook] & M_{2d} \arrow[r, "\iota"] & \mathcal{S}(\Lambda_d)_{(p)} \\
\operatorname{Spec} K \arrow[u, "x"] \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_K \arrow[u] \\
\exists \operatorname{Spec} K' \arrow[u] \arrow[rr] & & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{K'} . \arrow[u] \arrow[uul, dashed, "\exists y"']
\end{tikzcd}$$

を可換にするような射 y が存在する．

この主張は，K3 曲面の良い還元の判定法（定理 1.2）と，偏極つき K3 曲面に付随するアーベル多様体（久賀・佐武アーベル多様体）の良い還元の判定法（定理 1.1）とから従う．より詳しく述べよう．

偏極つき K3 曲面 (X, L) の久賀・佐武アーベル多様体 A とは，大雑把にいえば，なんらかのコホモロジー H に対して $\operatorname{End} H^1(A)$ が $C(PH^2(X, L)(1))$（C はクリフォード代数を表す）をしかるべき部分空間として含むアーベル多様体であり，K3 曲面の（コホモロジーに関係する）性質をアーベル多様体のそれに帰着して証明したいときによく用いられる（古典的な例としては，有限体上の K3 曲面に関する Weil 予想の Deligne による証明 [4] でも使われた）．

本稿では，偏極つきの場合を扱い，またモジュライ解釈を考慮して Madapusi Pera [11, Section 3–4] による次の構成を用いる．$\mathrm{Sh}(\Lambda_d)$ は（今まで定義を述べないできたが）格子 Λ_d の特殊直交群 $\mathrm{SO}(\Lambda_d)$ の志村多様体である．代数群の射 $\mathrm{GSpin}(\Lambda_d) \to \mathrm{SO}(\Lambda_d)$ および対応する志村多様体の整モデル間の（有限な）射 $\pi \colon \tilde{\mathcal{S}}(\Lambda_d)_{(p)} \to \mathcal{S}(\Lambda_d)_{(p)}$ が存在する．また，代数群の射 $\mathrm{GSpin}(\Lambda_d) \to \mathrm{GSp}(C(\Lambda_d))$（$C$ はクリフォード代数を表す）および対応する志村多様体の整モデル間の射が存在する．$\mathrm{GSp}(C(\Lambda_d))$ の志村多様体およびその整モデルは，$C(\Lambda_d)$ 作用などの付加構造のついたアーベル多様体のモジュライになっている．普遍アーベル多様体の $\tilde{\mathcal{S}}(\Lambda_d)_{(p)}$ への引き戻しを $\mathcal{A}$ とおく．κ を体とする．M_{2d}° の κ 値点 z に対応する κ 上の偏極つき K3 曲面 (X, L) の久賀・佐武アーベル多様体 A を，

$\iota_{\mathbf{Z}_{(p)}}(z)$ の π による逆像に属する点上の $\mathcal{A}$ のファイバーとして定める（これは逆像に属する点のとり方によらない）．$l \neq p$ に対し，ガロア表現としての包含写像

$$C(PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{\kappa}}, L), \mathbb{Q}_l(1))) \cong C(\Lambda_d) \otimes \mathbb{Q}_l \subset \operatorname{End} H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{\kappa}}, \mathbb{Q}_l)$$

が存在する（右の包含写像は A への $C(\Lambda_d)$ の作用から定まる）．また，$\kappa = \mathbf{C}$ のときはベッチコホモロジーに対しホッジ構造としての同様の包含写像が，κ が標数 p の完全体のときはクリスタリンコホモロジーに対しフロベニウス同変な同様の包含写像が存在する．

A を M°_{2d} の K 値点 x に対応する久賀・佐武アーベル多様体とする．示すべき主張の仮定より，A は $\mathcal{O}_K$ 上のアーベルスキームに延長される．エタールコホモロジーの一般論から，$H^1_{\text{ét}}(A_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ は G_K の不分岐表現になる．上記の包含写像より，$C(PH^2_{\text{ét}}((X_{\overline{K}}, L), \mathbb{Q}_l(1)))$ も G_K の不分岐表現となり，したがって $H^2_{\text{ét}}(X_{\overline{K}}, \mathbb{Q}_l)$ もそうである．K3 曲面の良い還元の判定法（定理 1.2）より，X は K を適当な有限次拡大体 K' で置き換えると代数空間の範疇でよい還元をもつ（すなわち，$\mathcal{O}_{K'}$ 上固有滑らかな代数空間 $\mathcal{X}$ に延長できる）ので，M_{2d} の K 値点 x が $\mathcal{O}_{K'}$ 値点に伸びることが分かり，主張が示された．

（正確には，X が $\mathcal{O}_{K'}$ 上の代数空間 $\mathcal{X}$ に延長されるだけでなく L が $\mathcal{X}$ 上の準偏極に延長される（ように $\mathcal{X}$ をとれる）ことを示す必要がある．L が非常に豊富ならばこれは定理 1.2 の証明（のうち，本稿では詳しく述べていない部分）に付随して示されている．一般の（豊富だが，非常に豊富とは限らない）L に対しては，$L^{\otimes 3}$ が非常に豊富になるので L の代わりに $L^{\otimes 3}$ を用いて議論すればよい．このとき $L^{\otimes 3}$ が定理 1.2 の仮定を満たすことは $p > 18d + 4$ から保証される．）

References

[1] Michael Artin, Algebraic construction of Brieskorn's resolutions, *J. Algebra*, **29** (1974), 330–348.

[2] Christophe Breuil, Groupes p-divisibles, groupes finis et modules filtrés, *Ann. of Math. (2)*, **152**(2) (2000), 489–549.

[3] Robert Coleman and Adrian Iovita, The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties, *Duke Math. J.*, **97**(1) (1999), 171–215.

[4] Pierre Deligne, La conjecture de Weil pour les surfaces $K3$, *Invent. Math.*, **15** (1972), 206–226.

[5] Tetsushi Ito, Good reduction of Kummer surfaces, Master's thesis, University of Tokyo (2001).

[6] Yujiro Kawamata, Semistable minimal models of threefolds in positive or mixed characteristic, *J. Algebraic Geom.*, **3**(3) (1994), 463–491.

[7] Mark Kisin, Crystalline representations and F-crystals, In *Algebraic geometry and number theory*, volume 253 of *Progr. Math.*, pages 459–496. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006.

[8] Viktor S. Kulikov, Degenerations of $K3$ surfaces and Enriques surfaces, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **41**(5) (1977), 1008–1042, 1199.

[9] Viktor S. Kulikov, Surjectivity of the period mapping for $K3$ surfaces, *Uspehi Mat. Nauk*, **32**(4(196)) (1977), 257–258.

[10] Christian Liedtke and Yuya Matsumoto, Good reduction of K3 surfaces, available at `http://arxiv.org/abs/1411.4797v1` (2014).

[11] Keerthi Madapusi Pera, The Tate conjecture for K3 surfaces in odd characteristic, available at `http://arxiv.org/abs/1301.6326v3`, to appear in *Invent. Math.*

[12] Yuya Matsumoto, On good reduction of some K3 surfaces (announcement), *Algebraic Number Theory and Related Topics 2011, RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B44** (2013), 111–113.

[13] Yuya Matsumoto, On good reduction of some K3 surfaces related to abelian surfaces, *Tohoku Math. J. (2)*, **67**(1) (2015), 83–104.

[14] Yuya Matsumoto, Good reduction criterion for K3 surfaces, *Math. Z.* **279**(1–2) (2015), 241–266.

[15] Davesh Maulik, Supersingular K3 surfaces for large primes, *Duke Math. J.*, **163**(13) (2014), 2357–2425.

[16] Abdellah Mokrane, La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato, *Duke Math. J.*, **72**(2) (1993), 301–337.

[17] Chikara Nakayama, Degeneration of l-adic weight spectral sequences, Amer. J. Math., **122**(4) (2000), 721–733.

[18] Yukiyoshi Nakkajima, Liftings of simple normal crossing log $K3$ and log Enriques surfaces in mixed characteristics, *J. Algebraic Geom.*, **9**(2) (2000), 355–393.

[19] Yukiyoshi Nakkajima, p-adic weight spectral sequences of log varieties, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, **12**(4) (2005), 513–661.

[20] Yukiyoshi Nakkajima, Signs in weight spectral sequences, monodromy-weight conjectures, log Hodge symmetry and degenerations of surfaces, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, **116** (2006), 71–185.

[21] Martin C. Olsson, Crystalline cohomology of algebraic stacks and Hyodo-Kato cohomology, *Astérisque*, **316** (2007).

[22] Jesús Rogelio Pérez Buendía, A crystalline criterion for good reduction on semi-stable K3-surfaces over a p-adic field, available at `http://spectrum.library.concordia.ca/978195/1/Perez-Buendia_PhD_S2014.pdf` (2014).

[23] Ulf Persson and Henry Pinkham, Degeneration of surfaces with trivial canonical bundle, *Ann. of Math. (2)*, **113**(1) (1981), 45–66.

[24] Michael Rapoport and Thomas Zink, Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik, *Invent. Math.*, **68**(1) (1982), 21–101.

[25] Jordan Rizov, Kuga-Satake abelian varieties of K3 surfaces in mixed characteristic, *J. Reine Angew. Math.*, **648** (2010), 13–67.

[26] Takeshi Saito, Weight spectral sequences and independence of l, *J. Inst. Math. Jussieu*, **2**(4) (2003), 583–634.

[27] Takeshi Saito, Log smooth extension of a family of curves and semi-stable reduction, *J. Algebraic Geom.*, **13**(2) (2004), 287–321.

[28] Jean-Pierre Serre and John Tate, Good reduction of abelian varieties, *Ann. of Math. (2)*, **88** (1968), 492–517.

[29] Takeshi Tsuji, Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen: a survey, *Astérisque*, **279** (2002), 323–370.