RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 325–342

p-進ソリトン理論入門
(Introduction to p-adic soliton theory)

By

山崎 隆雄 (Takao YAMAZAKI) *

Abstract

This is a survey article on Anderson's p-adic soliton theory and its later development by Kobayashi and the author. The p-adic soliton theory was applied by Anderson to an arithmetic problem related to the Manin-Mumford conjecture. He estimated the number of p-torsion points on the theta divisor of a certain curve. We evolve his theory further and estimate the number of p^n-torsion points on the theta divisor for more general curves.

§1. 序

本稿では，Anderson [1] により導入された p-進ソリトン理論とその発展である小林真一氏と筆者の共同研究 [10] を概説する．これは曲線のヤコビ多様体とテータ因子に対する新しいアプローチであり，佐藤グラスマン多様体・ループ群・タウ関数など可積分系のアイデアを用いることを特色とする．この理論について，やや技術的なことまで踏み込んで解説を行ったのが 5，6 節であり，これらが本稿の主要部である．この理論は Manin-Mumford 予想に関係した数論幾何の問題への応用がある．2, 3 節では，この応用について p-進ソリトン理論の言葉を使わずに結果を述べた．4 節では，p-進ソリトン理論がどのようにして数論幾何へ応用されるのか，その大枠を解説した．この応用だけに関心のある読者は 2〜4 節だけを参照していただければ十分であるが，興味を持たれた方はぜひ 5，6 節およびそこで挙げた文献まで読み進めていただきたい．

記号 1.1. アーベル群 A と自然数 n に対して $A[n] = \{a \in A \mid na = 0\}$，$A_{\mathrm{Tor}} = \cup_{n=1}^{\infty} A[n]$ とする．体上の非特異完備既約曲線 X に対し，その Picard 群，すなわち X 上の可逆層の同型類全体のなすアーベル群を $\mathrm{Pic}(X)$ と書き，次数 0 の可逆層の類全体

Received March 5, 2014. Revised July 13, 2014.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11G30 (11S99 14H40).
Key Words: *Sato Grassmannian, p-adic tau function, p-adic loop group, formal group.*
本研究は科学研究費（若手 (A) 22684001、挑戦的萌芽 22654001）および稲森財団の援助を受けた．
*Institute of Mathematics, Tohoku University. Aoba, Sendai, 980-8578, Japan.
e-mail: ytakao@math.tohoku.ac.jp

からなる $\mathrm{Pic}(X)$ の部分群を $\mathrm{Jac}(X)$ と書く．基礎体が代数閉体のときは $\mathrm{Jac}(X)$ を X のヤコビ多様体と同一視して，アーベル多様体と見なすこともある．

§2. フェルマー曲線の商

X を $\mathbb{C}$ 上の非特異完備既約曲線，$g \geq 2$ をその種数として $\infty \in X$ を固定する．基点 ∞ に関するアーベル・ヤコビ写像 $i_\infty : X \to \mathrm{Jac}(X)$ を $i_\infty(P) = \mathcal{O}_X(P - \infty)$ と定める．次の結果は Manin-Mumford 予想として知られていた．

定理 2.1 (Raynaud [16, Th.1])**.** $i_\infty(X) \cap \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ は有限集合である[1]．

アーベル群としての同型 $\mathrm{Jac}(X) \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^{2g}$，$\mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}} \cong (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{2g}$ を鑑みると，$\mathrm{Jac}(X)$ における $\mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ の入り方はユークリッド空間 $\mathbb{R}^{2g}$ における有理点 $\mathbb{Q}^{2g}$ の入り方に似て見える．そう思うと，定理 2.1 は X 上の有理点の有限性定理に似て見える．しかし，具体的に与えられた X, ∞ に対して有限集合 $i_\infty(X) \cap \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ を決定することは簡単ではない．その中で次の結果は著しい：

定理 2.2 (Coleman-玉川-Tzermias [3, Th. 2])**.** $n \geq 4$ を自然数として，X を方程式 $x^n + y^n = z^n$ が定める $\mathbb{P}^2$ 内の曲線，$\infty = [1 : 0 : 1] \in X$ とする．このとき，$P = [a : b : c] \in X(\mathbb{C})$ に対して $i_\infty(P) \in \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ と $abc = 0$ は同値である．

このほか，$g = 2$ の場合や X がモジュラー曲線の場合などに集合 $i_\infty(X) \cap \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ が完全に決定された例がある．(これらについては [25] にサーベイがある．) 一方，定理 2.1 は Raynaud 自身により直ちに一般化された．次にその一部を説明する．

定義 2.3. 基点 $\infty \in X$ に関する X の**テータ因子** を次で定める：

$$\Theta := \{i_\infty(P_1) + \cdots + i_\infty(P_{g-1}) \mid P_1, \ldots, P_{g-1} \in X\} \subset \mathrm{Jac}(X). \tag{2.1}$$

Θ は $\mathrm{Jac}(X)$ の $g-1$ 次元の 閉部分多様体となる．$g = 2$ のときは $i_\infty(X) = \Theta$ であり，$g > 2$ のときは $i_\infty(X) \subsetneq \Theta$ となる．

定理 2.4 (Raynaud [17])**.** $\mathrm{Jac}(X)$ が単純なら $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ は有限集合である[2]．

そこで具体的に与えられた X, ∞ に対して有限集合 $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ を決定するという問題が浮上する．X, ∞ として定理 2.2 に挙げたものを取ると $\mathrm{Jac}(X)$ は単純でなく，$n = 4$ のときすでに $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)$ は無限集合となる．一方，$\mathrm{Jac}(X)$ の商として得られる単純アーベル多様体は，多くの場合，次の曲線のヤコビ多様体と同種になる．

[1] $\mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ は X のヤコビ多様体 $\mathrm{Jac}(X)$ のねじれ部分を表す．記号 1.1 を参照．なお，この定理と下の定理 2.4 において，Raynaud が原論文で示している結果はここで述べたことよりもずっと一般的である．

[2] これは [17] の冒頭三行目の Théorème の特別な場合である．なお，ここで「$\mathrm{Jac}(X)$ が単純」とは非自明な部分アーベル多様体が存在しないという意味である．

d を奇素数，a を $1 < a < d$ を満たす整数とする．以下，本節の終わりまで方程式

$$y^d = x^a(1-x)^{d+1-a} \tag{2.2}$$

の定めるアフィン代数曲線の非特異完備なモデルを X とし，$\infty \in X$ を有理関数 x が極を持つ唯一の点とする．(y も ∞ を唯一の極に持つ.) X の種数は $g = (d-1)/2$ である．

問題 2.5. 上の X と ∞ に対し $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)_{\mathrm{Tor}}$ を決定せよ．

この問題は未解決であるが，部分的な結果がいくつか知られている．アフィン曲線 (2.2) の自己同型 $(x, y) \mapsto (x, e^{2\pi\sqrt{-1}/d}y)$ が誘導する X の自己同型を $\delta : X \to X$ と書く．$p \equiv 1 \mod d$ を満たす素数 p と，1 の原始 d 乗根 $\zeta_d \in \mathbb{Z}_p$ を固定する[3]．$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ のとき，$\mathrm{Jac}(X)[p^n]$ は $\mathbb{Z}_p$-加群であることに注意して，$\mathrm{Jac}(X)[p^n]$ の部分群を次のように定義する．($\mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ であることが証明できる.)

$$\mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 := \{\alpha \in \mathrm{Jac}(X)[p^n] \mid \delta^*(\alpha) = \zeta_d \alpha\}. \tag{2.3}$$

Anderson は [1] において p-進ソリトン理論を導入し，その応用として次を示した：

定理 2.6 (Anderson [1, Th. 1]). $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)[p]_1 = \{0\}$.

我々は [10] において p-進ソリトン理論を発展させ，その応用として次の結果を得た．

定理 2.7 (小林-Y. [10, Th. 1.2]). 任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 = \{0\}$.

注意 2.8. X が超楕円曲線のとき[4]定理 2.7 は Grant [5, Th. 1] で示されていた．

Anderson が [1] で展開した p-進ソリトン理論は，かなりの部分が一般の代数曲線に適用できる理論である．しかし，いくつかの点において，曲線の定義方程式 (2.2) に依存する複雑で技術的な計算を用いていた．我々はこの点を一般化すると同時に改善した．「改善」というのは，定理 2.7 に見られるように位数が p だけでなく p 冪の点も扱えるようになったことにある．「一般化」というのはより一般の代数曲線も扱えるようになったということであるが，それについては節を改めて説明する．

§3. 主結果

p を素数，K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，O_K と $\mathbb{F}$ をその整数環と剰余体とする．X を K 上の非特異完備既約代数曲線，$\infty \in X(K)$ をその上の有理点，$g \geq 2$ をその種数とする．

[3] $\mathrm{Jac}(X)[p^n]_1$ の定義は ζ_d の選択に依存する．下の結果はどの取り方をしても成立するので，ζ_d の取り方を変えることにより，$d-1$ 個の相異なる $\mathrm{Jac}(X)[p^n]$ の部分群に対する結果が得られる．(ただし，$\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1$ は $\mathrm{Jac}(X)$ の部分群ではないので，それらの和については何も結論できない.)

[4] これは $a \in \{2, (d+1)/2, d-1\}$ と同値である．

X は O_K 上滑らかで射影的なモデル $\mathfrak{X}$ を持つと仮定する．$Y := \mathfrak{X} \otimes_{O_K} \mathbb{F}$ を閉ファイバーとして $\overline{\infty} \in Y(\mathbb{F})$ を ∞ の還元とする．

X の ∞ における **Weierstrass ギャップ列** は次のように定義される（(5.5) も参照)：

$$(3.1) \qquad WG_\infty(X) := \{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid \Gamma(X, \mathcal{O}_X(n\infty)) = \Gamma(X, \mathcal{O}_X((n-1)\infty))\}.$$

$WG_{\overline{\infty}}(Y)$ も同様に定義される．また，X のテータ因子を次のように定義する[5]．

$$(3.2) \qquad \Theta := \{\mathcal{L} \in \mathrm{Jac}(X) \mid \Gamma(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X((g-1)\infty)) \neq \{0\}\} \subset \mathrm{Jac}(X).$$

定理 3.1 ([10, Th. 1.4])． $\delta : X \to X$ を X の自己同型とし，次の条件を仮定する：

(1) $\delta(\infty) = \infty$ である．また，δ の位数 d は $d \geq 2g+1$ と $p \equiv 1 \mod d$ を満たす．

(2) Y は **通常**，すなわち $|\mathrm{Jac}(Y \otimes_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}})[p]| = p^g$ （$\overline{\mathbb{F}}$ は $\mathbb{F}$ の代数閉包）である．

(3) $WG_\infty(X) = WG_{\overline{\infty}}(Y)$ が成り立つ．

∞ で一位の零点を持つ有理関数 $t \in K(X)$ を取ると有理関数 $t/\delta^*(t)$ の ∞ での値 $\zeta_d := (t/\delta^*(t))(\infty)$ は 1 の原始 d 乗根となる．ζ_d は t の取り方に依らない．$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を取り $\mathrm{Jac}(X)[p^n]_1$ を (2.3) で定める[6]．このとき $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 = \{0\}$ が成り立つ．

(2.2) で与えた曲線に対して定理 3.1 の仮定を確認することで定理 2.7 が証明される[7]．なお，定理 3.1 の条件 (1) はたいへん強い仮定である．実は，条件 (1) を満たす自己同型 δ を持つ曲線 X は，閉体上で定理 2.7 の曲線と同型になることが知られている [7, Th. 2]．しかし d が素数でない場合は定理 3.1 の仮定を満たす新しい例がある [10, §5.2]：

例 3.2 (cf. [12])． $g \geq 2$ を自然数とし，$p \equiv 1 \mod d := 4g$ と仮定する．1 の原始 d 乗根 $\zeta_d \in \mathbb{Q}_p$ を固定する．X を方程式 $y^2 = x^{2g+1} + x$ が定める超楕円曲線，$\delta : X \to X$ を $\delta(x, y) = (\zeta_d^2 x, -\zeta_d y)$ が定める位数 d の自己同型とする．このとき，定理 3.1 の仮定が確認できる．従って任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 = \{0\}$ となる．

例 3.3. l を奇素数とし，$p \equiv 1 \mod d := 2l$ と仮定する．$2(a+b) = l+1$ を満たす正整数 a, b と 1 の原始 l 乗根 $\zeta_l \in \mathbb{Q}_p$ を固定する．X を方程式 $y^l = x^{2a}(x^2+1)^b$ の定めるアフィン平面曲線の非特異射影モデル，$\delta : X \to X$ を $\delta(x, y) = (-x, \zeta_l y)$ が定める位数 d の自己同型とする．X の種数は $g = l - 1$ である．このとき，定理 3.1 の仮定が確認できる．従って任意の $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\Theta \cap \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 = \{0\}$ となる．

このように新しい例が構成できるものの，定理 3.1 の仮定が満たされる曲線はかなり特別なものに限定される[8]．これは，定理 3.1 の結論がかなり強いのでやむを得ないことと思われる．一方，下で述べる定理 3.4 では仮定はかなり弱いが，結論も弱い．

---

[5]体の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ によって底変換を行うと (2.1) における定義と一致する．
[6]K が十分大きければ $\mathrm{Jac}(X)[p^n]_1 \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ となることが証明できる．これは条件 (1) の帰結である．
[7]正確には，体の埋め込み $K \hookrightarrow \mathbb{C}$ （で ζ_d を $e^{2\pi\sqrt{-1}/d}$ に移すもの）を取って底変換を行う必要もある．
[8]g を固定したとき，種数が g の例を有限個しか筆者は持っていない．

還元写像 $\mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Jac}(Y)$ の核を $\widehat{\mathrm{Jac}}(X)$ とする[9]．これは X のヤコビ多様体が定める O_K 上の形式群 $\widehat{J_X}$ の O_K-有理点のなす群と同型である．

定理 3.4 ([10, Th. 1.5])． $p \geq 2g$ を仮定する．また，次の条件も仮定する：

(1) Y は通常である．

(2) $WG_\infty(X) = WG_{\overline{\infty}}(Y) = \{1, 2, \ldots, g\}$ が成り立つ．すなわち，∞ と $\overline{\infty}$ はどちらも **Weierstrass 点** でない[10]．

このとき，$\left|\Theta \cap \widehat{\mathrm{Jac}}(X)[p]\right| \leq p^{g-1}$ が成り立つ．

§ 4. 証明の概略

定理 3.1, 3.4 の証明の方針はほぼ同じなので，本稿では定理 3.1 に限定して証明の方針を説明する．この節では前節の記号を続けて用いる．∞ における X の局所環 $\mathcal{O}_{X,\infty}$ の完備化 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$ と K 上の形式冪級数環 $K[[\frac{1}{T}]]$ の同型 $N_0 : \widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} \cong K[[\frac{1}{T}]]$ を固定する．p-進ソリトン理論の枠組みは次の図式にまとめられる：

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Gr}(K) & \supset & \mathrm{Gr}(K)_A & \overset{[\cdot]}{\twoheadrightarrow} & \mathrm{Pic}(X) & \supset & \Theta \\ \cup & & \cup & \nearrow & & & \\ \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K) & \supset & \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)_A & \curvearrowleft & \Gamma & \overset{\tau_A}{\to} & K. \end{array} \tag{4.1}$$

ここに現れた記号を簡単に説明する．(5, 6 節でより詳しく説明する．) $\mathrm{Gr}(K)$ は佐藤グラスマン多様体であり，ローラン級数体 $K((\frac{1}{T}))$ の（無限次元）部分 K-線形空間で多項式環 $K[T]$ と「同じくらいの」大きさのもの全体のなす集合として定義される (5.2)．$A := \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$ を N_0 が誘導する写像で $K((\frac{1}{T}))$ に埋め込むと，A は $\mathrm{Gr}(K)$ の元と見なすことができる．$\mathrm{Gr}(K)_A$ は $\mathrm{Gr}(K)$ の元で A の元の積で閉じているもの全体からなる $\mathrm{Gr}(K)$ の部分集合である (5.10)．特に $A \in \mathrm{Gr}(K)_A$ が成り立つ．$\mathrm{Gr}(K)$ や $\mathrm{Gr}(K)_A$ は線形空間の言葉で定義される対象であるが，それを Picard 群という幾何的な対象と結びつける理論が Krichever 対応（定理 5.7）である．写像 $[\cdot] : \mathrm{Gr}(K)_A \to \mathrm{Pic}(X)$ は，この理論によって構成される．（ここまでは基礎体 K は p-進体でなくてもよい．）

$\mathrm{Gr}(K)$ の元で,「整」と呼ばれる p-進的によい性質（定義 6.1）を持つもの全体のなす部分集合を $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ とし，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)_A := \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K) \cap \mathrm{Gr}(K)_A$ とする．以下では $A \in \mathrm{Gr}(K)$ が整であること，すなわち $A \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)_A$ を仮定する．Γ は p-進ループ群と呼ばれる巨大な p-進群であり，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)_A$ に作用する．$\tau_A : \Gamma \to K$ は p-進タウ関数と呼ばれる関数で，p-進ソリトン理論において最も重要な対象である．p-進タウ関数の持つ性質のうち，次の二つが特に重要な役割を果たす（定理 6.10, 6.13）：

[9] Y が通常で K が十分大きければ $\widehat{\mathrm{Jac}}(X)[p] \cong (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^g$ が成り立つ．

[10] 基礎体の標数が 0 または $\geq 2g$ のとき，種数が g の代数曲線上に Weierstrass 点は有限個しか存在しない．

- $h(T) \in \Gamma$ に対し，$\tau_A(h(T)) = 0$ と $[h(T)A] \in \Theta$ は同値である．
- 佐藤展開と呼ばれる $\tau_A(h(T))$ の無限級数展開が（少々の仮定の下で）存在する．これは与えられた $h(T) \in \Gamma$ に対して $\tau_A(h(T)) \neq 0$ を証明するための強力な道具になる．

Anderson [1] の仕事の中心部は以上の理論を展開するところにある．この上で，定理 3.1 は次のように証明される．各 $\mathcal{L} \in \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1, \mathcal{L} \neq 0$ に対し $\mathcal{L} \notin \Theta$ を示せばよい．

(a) $A \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)_A$ が成り立つような N_0 を構成する．

(b) $\mathcal{L} = [h_{\mathcal{L}}(T)A]$ となる $h_{\mathcal{L}}(T) \in \Gamma$ を構成する．

(c) 佐藤展開を用いて $\tau_A(h_{\mathcal{L}}(T)) \neq 0$ を証明する．

Anderson は方程式 (2.2) の X に対し，定義方程式に依存した技術的な計算によって (a) と (b) を（$n = 1$ の場合に）遂行した．我々の貢献は (a) と (b) の構成をより一般の設定で行ったことにある．より詳しく述べると次のようになる（命題 6.3, 定理 6.18）．

- $WG_\infty(X) = WG_{\overline{\infty}}(Y)$ という仮定のもとで構成 (a) を行う．
- 定理 3.1 の仮定の下で，任意の $\mathcal{L} \in \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1$，$\mathcal{L} \neq 0$ に対して構成 (b) を行う．

このようにして構成された $h_{\mathcal{L}}(T) \in \Gamma$ に対して Anderson と同じ要領で (c) を証明する．以上が定理 3.1 の証明の概略である．

§5. 佐藤グラスマン多様体と Krichever 対応

この節と次の節では p-進ソリトン理論について，やや技術的なことまで立ち入って解説する．本節では基礎体に依存しない部分を扱い，次の節で p-進特有の理論を扱う．

分割とマヤ図形　非負整数の列 $\kappa = (\kappa_i)_{i=1}^\infty$ ですべての $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\kappa_i \geq \kappa_{i+1}$ が成り立ち，十分大きいすべての i に対し $\kappa_i = 0$ となるものを **分割** という．分割 $\kappa = (\kappa_i)_{i=1}^\infty$ に対しその **長さ** $l(\kappa)$ と **重さ** $|\kappa|$ を次で定める：

$$l(\kappa) := \min\{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \kappa_i = 0\} - 1 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \qquad |\kappa| := \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}.$$

分割すべての集合を $\underline{\mathrm{Par}}$ と書く．$\kappa = (\kappa_i)_{i=1}^\infty$，$\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \underline{\mathrm{Par}}$ に対し，すべての $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対して $\kappa_i \leq \lambda_i$ となるとき $\kappa \leq \lambda$ と定めることで，$\underline{\mathrm{Par}}$ に半順序が定まる．

$\mathbb{Z}$ の部分集合 M で $M \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}$ と $\mathbb{Z}_{>0} \setminus M$ が有限集合となるものを**マヤ図形** と呼ぶ．マヤ図形全体の集合を $\underline{\mathrm{Maya}}$ と書く．$M \in \underline{\mathrm{Maya}}$ としよう．$i(M) := |M \cap \mathbb{Z}_{\leq 0}| - |\mathbb{Z}_{>0} \setminus M| \in \mathbb{Z}$ を M の **指数** と呼ぶ．狭義単調増加数列 $\{s_i\}_{i=1}^\infty$ を用いて M を $M = \{s_i \mid i \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ と表すと，$\kappa(M) := (i - i(M) - s_i)_{i=1}^\infty \in \underline{\mathrm{Par}}$ が成り立つ．$\kappa(M) \in \underline{\mathrm{Par}}$ を M の分割と呼ぶ．次の写像は全単射であることが初等的に確認できる．

$$\underline{\mathrm{Maya}} \to \mathbb{Z} \times \underline{\mathrm{Par}}, \qquad M \mapsto (i(M), \kappa(M)).$$

佐藤グラスマン多様体　F を任意の体とする．F 上のローラン級数体を考える：

$$F((\frac{1}{T})) := \{v(T) = \sum_{i=-\infty}^{n} v_i T^i \mid n \in \mathbb{Z},\ v_i \in F\}$$

$v(T) = \sum_{i=-\infty}^{n} v_i T^i \in F((\frac{1}{T}))$ $(v_i \in F)$ とする．$v_n \neq 0$ とき $\deg v(T) := n$ を $v(T)$ の**次数**，$v_n = 1$ のとき $v(T)$ を **モニック** と呼ぶ．F-線形部分空間 $V \subset F((\frac{1}{T}))$ に対し，

$$H^0(V) := F[[\frac{1}{T}]] \cap V, \quad H^1(V) := F((\frac{1}{T}))/(F[[\frac{1}{T}]] + V),$$
$$\underline{M}(V) := \{\deg v(T) \mid v(T) \in V \setminus \{0\}\} \subset \mathbb{Z}$$

と定める．$i = 0, 1$ に対し $h^i(V) := \dim_F H^i(V)$ とおくと，次式が成り立つ：

$$h^0(V) = |\underline{M}(V) \cap \mathbb{Z}_{\le 0}|, \qquad h^1(V) = |\underline{M}(V) \setminus \mathbb{Z}_{>0}|. \tag{5.1}$$

$F((\frac{1}{T}))$ の F-線形部分空間 V で $i = 0, 1$ に対し $h^i(V)$ が有限となるもの全体のなす集合を**佐藤グラスマン多様体** と呼び $\mathrm{Gr}(F)$ と書く：

$$\mathrm{Gr}(F) := \{V \subset F((\frac{1}{T})) \mid V \text{ は } h^0(V), h^1(V) \text{ が有限となる } F\text{-線形部分空間}\} \tag{5.2}$$

$V \in \mathrm{Gr}(F)$ としよう．(5.1) により $\underline{M}(V) \in \underline{\mathrm{Maya}}$ が成り立つ．$i(V) := i(\underline{M}(V))$ および $\kappa(V) := \kappa(\underline{M}(V))$ を V の指数および分割とよぶ．狭義単調増加数列 $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ を用いて $\underline{M}(V) = \{s_i \mid i \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ と表すとき，V の基底 $\{v_i(T) = \sum_j v_{ij} T^j\}_{i=1}^{\infty}$ で条件

(a) すべての $i \ge 1$ に対し，$v_i(T)$ はモニックで次数が s_i である；

(b) すべての $i > j \ge 1$ に対し，$v_{i,s_j} = 0$ が成り立つ；

を満たすものが唯一存在する．この基底 $\{v_i(T)\}_{i=1}^{\infty}$ を V の **標準基底** とよぶ．これを用いて，V の $\lambda \in \underline{\mathrm{Par}}$ における Plücker 座標 $P_\lambda(V)$ を次式で定める[11]：

$$P_\lambda(V) := \det(v_{i, j-\lambda_j - i(V)})_{i,j=1}^{n} \qquad (n \gg 0). \tag{5.3}$$

次の補題は定義から容易に証明できる ([1, §2.6] を参照).

補題 5.1.　$V \in \mathrm{Gr}(F)$ とする．このとき $P_{\kappa(V)}(V) = 1$ が成り立つ．また，$\lambda \in \underline{\mathrm{Par}}$ が $P_\lambda(V) \neq 0$ を満たせば $\kappa(V) \le \lambda$ が成り立つ．

[11] 右辺は十分大きい任意の整数 n に対し共通の値を取る．その値を $P_\lambda(V)$ と定める，という意味である．なお，基底 $\{v_i(T)\}_{i=1}^{\infty}$ が上の条件 (a) を満たせば (b) は満たさなくても共通の値となる．

代数曲線の座標環　X を F 上の連結正則完備代数曲線，$\infty \in X(F)$ をその上の F-有理点，$g \geq 2$ をその種数とする．X の ∞ における局所環 $\mathcal{O}_{X,\infty}$ の完備化を $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$ として F-代数の同型 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} \cong F[[\frac{1}{T}]]$ を固定する．これは X の関数体 $F(X)$ の $F((\frac{1}{T}))$ への埋め込み $N : F(X) \hookrightarrow F((\frac{1}{T}))$ を誘導する．そこで

$$A = A(X, \infty, N) := \{N(f) \in F((\frac{1}{T})) \mid f \in \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_X)\} \tag{5.4}$$

と定めると，A は $F((\frac{1}{T}))$ の F-部分代数で，$\mathrm{Spec} A \cong X \setminus \{\infty\}$ が成り立つ．次の命題は Čech コホモロジーを用いた計算により示される．

命題 5.2.　$i = 0, 1$ に対し同型 $H^i(A) \cong H^i(X, \mathcal{O}_X)$ が存在する．特に $h^0(A) = 1$, $h^1(A) = g$ であり，A は $\mathrm{Gr}(F)$ に属し，$i(A) = 1 - g$ が成り立つ．

A のマヤ図形 $\underline{M}(A)$ は X の ∞ における **Weierstrass 半群** と呼ばれる $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ の部分半群である．その補集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0} \setminus \underline{M}(A)$ は Weierstrass ギャップ列 (3.1) に一致する．$\underline{M}(A)$ の分割を $\kappa = (\kappa_i)_{i=1}^{\infty} \in \underline{\mathrm{Par}}$ とおく．代数曲線における特殊因子論の結果は，これらを用いて書き直すことができる．例えば，Riemann-Roch の定理から

$$WG_\infty(X) = \{\mu_1, \cdots, \mu_g\}, \qquad 1 = \mu_1 < \cdots < \mu_g \leq 2g - 1 \tag{5.5}$$

と表せることが分かる．これにより，次の F-線形空間としての直和分解が得られる．

$$F((\frac{1}{T})) = A \oplus F[[\frac{1}{T}]]\frac{1}{T} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{g} FT^{\mu_i}). \tag{5.6}$$

Clifford の定理 [6, Th. 5.4] により，分割の不等式 $\kappa \leq (g, g-1, \cdots, 1)$ [12] が得られる．特に次が成り立つ：

$$\kappa_1 + l(\kappa) \leq 2g. \tag{5.7}$$

例 5.3.　F の標数は 2 でないと仮定する．$f(x) \in F[x]$ を $2g+1$ 次のモニック分離多項式とし，X を $y^2 = f(x)$ が定める超楕円曲線，$\infty \in X(F)$ を有理関数 x が極を持つ唯一の点とする．Hensel の補題から $T^2 x(T)^{2g} = f(x(T))$ を満たす $x(T) \in F((\frac{1}{T}))$ でモニックかつ $\deg x(T) = 2$ となるものが唯一存在する．対応 $x \mapsto x(T)$, $y \mapsto y(T) := Tx(T)^g$ により埋め込み $\Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{O}_X) = F[x, y] \hookrightarrow F((\frac{1}{T}))$ を定める．この像を A とする．A の基底として $\{x(T)^i y(T)^j \mid i \in \mathbb{Z}_{\geq 0},\ j \in \{0, 1\}\}$ が取れる[13]．ここから $\underline{M}(A) = \{0, 2, 4, \ldots, 2g-2\} \cup \{i \in \mathbb{Z} \mid i \geq 2g\}$ が得られ，さらに $WG_\infty(X) = \{1, 3, \ldots, 2g-1\}$, $i(A) = 1 - g$, $\kappa(A) = (g, g-1, \ldots, 1)$ が従う．

[12] 不等式の右辺は $\lambda_i = g + 1 - i$ $(1 \leq i \leq g)$, $\lambda_i = 0$ $(i > g)$ で定まる分割 $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^{\infty} \in \underline{\mathrm{Par}}$ を表す．
[13] これは標準基底ではない．

Krichever 対 $\mathcal{L}$ を X 上の可逆層とする．N の誘導する写像 $\mathrm{Spec} F[[\frac{1}{T}]] \to X$ による $\mathcal{L}$ の引き戻しを $\mathcal{L}_{F[[\frac{1}{T}]]}$ と表す．同型 $\sigma : \mathcal{L}_{F[[\frac{1}{T}]]} \cong F[[\frac{1}{T}]]$ のことを $\mathcal{L}$ の **自明化** という．X 上の可逆層 $\mathcal{L}$ と自明化 σ の組 $(\mathcal{L}, \sigma)$ を **Krichever 対** という．二つの Krichever 対 $(\mathcal{L}, \sigma)$, $(\mathcal{L}', \sigma')$ は，可逆層の同型 $\mathcal{L} \cong \mathcal{L}'$ で $\mathrm{Spec} F[[\frac{1}{T}]]$ への引き戻しが σ, σ' と可換なものが存在するとき同型という．Krichever 対の同型類全体の集合を $\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(X, \infty, N)$ と書く．Kr はテンソル積によりアーベル群となる．

例 5.4. D を X 上の因子とする．可逆層 $\mathcal{O}_X(D)$ に対し，合成

$$\mathcal{O}_X(D) \hookrightarrow F(X) \xrightarrow{N} F((\frac{1}{T})) \xrightarrow{T^{-\mathrm{ord}_\infty(D)}} F((\frac{1}{T}))$$

が導く同型 $\mathcal{O}_X(D)_{F[[\frac{1}{T}]]} \cong F[[\frac{1}{T}]]$ を $\sigma(D)$ と書くと，$(\mathcal{O}_X(D), \sigma(D))$ は Krichever 対である．$D = 0$ のとき，これを $(\mathcal{O}_X, 1)$ と書く．$(\mathcal{O}_X, 1)$ の同型類は Kr の単位元である．

任意の可逆層は自明化を持つ．また，一つの可逆層 $\mathcal{L}$ について二つの自明化 σ, σ' が与えられたら $\sigma' = u(T)\sigma$ を満たす $u(T) \in F[[\frac{1}{T}]]^*$ が唯一存在する．これらをまとめると次の完全列が得られる：

$$0 \to F[[\frac{1}{T}]]^* \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Kr}(X, \infty, N) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pic}(X) \to 0 \tag{5.8}$$

ただし，α, β は $\alpha(u(T)) = (\mathcal{O}_X, u(T) \cdot 1)$, $\beta(\mathcal{L}, \sigma) = \mathcal{L}$ で定まる準同型である．

Krichever 対応 $(\mathcal{L}, \sigma)$ を Krichever 対とする．N の導く写像 $\mathrm{Spec} F((\frac{1}{T})) \to X$ による $\mathcal{L}$ の引き戻しを $\mathcal{L}_{F((\frac{1}{T}))}$ とし，σ の導く同型 $\mathcal{L}_{F((\frac{1}{T}))} \cong F((\frac{1}{T}))$ も σ と表すこととして，$F((\frac{1}{T}))$ の F-線形部分空間 $V(\mathcal{L}, \sigma)$ を次で定める：

$$V(\mathcal{L}, \sigma) := \{\sigma N^*(f) \in F((\frac{1}{T})) \mid f \in \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathcal{L})\}. \tag{5.9}$$

$A = V(\mathcal{O}_X, 1)$ である（(5.4) を参照）．次の命題は命題 5.2 の一般化である．

命題 5.5. Krichever 対 $(\mathcal{L}, \sigma)$ と $i = 0, 1$ に対し，同型 $H^i(V(\mathcal{L}, \sigma)) \cong H^i(X, \mathcal{L})$ が存在する．特に $V(\mathcal{L}, \sigma)$ は $\mathrm{Gr}(F)$ に属し，$i(V(\mathcal{L}, \sigma)) = 1 - g + \deg \mathcal{L}$ が成り立つ[14]．

注意 5.6. この命題により $H^0(X, \mathcal{L}) \cong V(\mathcal{L}, \sigma) \cap F[[\frac{1}{T}]]$ が成り立つ．より一般に，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し $H^0(X, \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_X(n\infty)) \cong V(\mathcal{L}, \sigma) \cap F[[\frac{1}{T}]]T^n$ も成り立つ．

佐藤グラスマン多様体の **A-部分** を次のように定める：

$$\mathrm{Gr}(F)_A := \{V \in \mathrm{Gr}(F) \mid \text{すべての } a \in A \text{ に対し } aV \subset V\}. \tag{5.10}$$

任意の Krichever 対 $(\mathcal{L}, \sigma)$ に対して $V(\mathcal{L}, \sigma) \in \mathrm{Gr}(F)_A$ が成り立つ．V, $V' \in \mathrm{Gr}(F)_A$ に対し，それらの **積** $VV' \in \mathrm{Gr}(F)_A$ を $\{vv' \in F((\frac{1}{T})) \mid v \in V, v' \in V'\}$ で張られる $F((\frac{1}{T}))$ の F-線形部分空間と定めると，$\mathrm{Gr}(F)_A$ は A を単位元とするアーベル群になる．

[14]最後の部分は Riemann-Roch の定理．

定理 5.7 (Krichever 対応). 対応 $(\mathcal{L},\sigma)\mapsto V(\mathcal{L},\sigma)$ は同型写像 $V:\mathrm{Kr}(X,\infty,N)\to \mathrm{Gr}(F)_A$ を定める．この逆写像 V^{-1} と (5.8) における β の合成写像を

$$[\cdot]:\mathrm{Gr}(F)_A\to \mathrm{Pic}(X) \tag{5.11}$$

と定める．任意の $V\in \mathrm{Gr}(F)_A$ に対し，$i(V)=1-g+\deg[V]$ が成り立つ．また，$V\in \mathrm{Gr}(F)_A$, $i(V)=1-g$ に対して $[V]\in\Theta$ と $V\cap F[[\frac{1}{T}]]T^{g-1}\neq\{0\}$ は同値である．

前半の証明は [1, §2.3-2.4] に与えられている（[14] と [23, §6] も参照）．後半は命題 5.5，注意 5.6 とテータ因子の定義 (3.2) から従う．

Hasse-Witt 行列　素数 p を固定する．$(\mu_1,\dots,\mu_g)$ を (5.5) の通りとする．直和分解 (5.6) により，各 $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し次の式を満たす $b_j^{(k)}(T)\in A\oplus F[[\frac{1}{T}]]\frac{1}{T}$ $(j=1,\dots,g)$ と $\mathbf{e}^{(k)}=(e_{i,j}^{(k)})_{i,j=1}^{g}\in M_g(F)$ が唯一存在する：

$$T^{\mu_j p^k}=b_j^{(k)}(T)+\sum_{i=1}^{g}e_{i,j}^{(k)}T^{\mu_i}\qquad (j=1,\dots,g). \tag{5.12}$$

ここで $p=\mathrm{ch}(F)\geq 2g$ と仮定する．すると行列 $\mathbf{e}^{(1)}$ は X の **Hasse-Witt 行列** に一致する．次の命題は Stöhr-Viana [24, Prop. 2.3] の帰結である[15]．

命題 5.8. 次の条件は同値である．

(1) X は通常である（定理 3.1 (2) を参照）．

(2) $\det(\mathbf{e}^{(1)})\in F^*$.

(3) すべての $k\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\det(\mathbf{e}^{(k)})\in F^*$.

§6. p-進ソリトン理論

本節では p-進体上の理論を展開する．前節の記号と結果を自由に用いる．

整と厳整　p を素数，K を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大，$|\cdot|$ を $|p|=1/p$ と規格化した K の絶対値，O_K を K の整数環，$\mathfrak{M}_K$ を O_K の極大イデアル，$\mathbb{F}$ を K の剰余体とする．$v(T)=\sum_{i=-\infty}^{n}v_iT^i\in K((\frac{1}{T}))$ に対し $||v(T)||:=\sup_{i\in\mathbb{Z}}|v_i|\in\mathbb{R}_{\geq 0}\cup\{\infty\}$ と定める．

定義 6.1. $V\in\mathrm{Gr}(K)$ の標準基底を $\{v_i(T)\}_{i=1}^{\infty}$ とする．

(1) すべての $i\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $||v_i(T)||<\infty$ で，しかも十分大きいすべての $i\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $||v_i(T)||=1$ のとき V を **整** という．

[15] 同論文では $p<2g$ の場合も扱っているが，ここでは省略した．

(2) すべての $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $||v_i(T)|| = 1$ のとき V を **厳整** という．

命題 6.2 ([10, Prop. 3.2])． $V \in \mathrm{Gr}(K)$ とする．すべての $v(T) \in V$ に対して $||v(T)|| < \infty$ であると仮定する．次のように V^{red} を定める：

$$V^{\mathrm{red}} := \{v(T) \mod \mathfrak{M}_K \in \mathbb{F}((\frac{1}{T})) \mid v(T) \in V,\ ||v(T)|| \leq 1\} \subset \mathbb{F}((\frac{1}{T})).$$

(1) V が整であることと，$\underline{M}(V^{\mathrm{red}}) \in \underline{\mathrm{Maya}}$ かつ $i(V) = i(V^{\mathrm{red}})$ となることは同値である．これらが成り立つとき $V^{\mathrm{red}} \in \mathrm{Gr}(\mathbb{F})$ となる．

(2) V が厳整であることと，$\underline{M}(V^{\mathrm{red}}) = \underline{M}(V)$ となることは同値である．

代数曲線 $\mathfrak{X} \to \mathrm{Spec}O_K$ を滑らかで射影的な写像，$\widetilde{\infty} : \mathrm{Spec}O_K \to \mathfrak{X}$ をその切断とする．$X := \mathfrak{X} \otimes_{O_K} K$ と $Y := \mathfrak{X} \otimes_{O_K} \mathbb{F}$ は連結な曲線であると仮定する．$\infty := \widetilde{\infty} \otimes_{O_K} K \in X(K)$, $\overline{\infty} := \widetilde{\infty} \otimes_{O_K} \mathbb{F} \in Y(\mathbb{F})$ と置く．$\widetilde{\infty}, \infty, \overline{\infty}$ はその像と同一視することもある．

$\mathfrak{X}$ の $\overline{\infty}$ における局所環 $\mathcal{O}_{\mathfrak{X},\overline{\infty}}$ は二次元正則局所環である．その完備化 $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},\overline{\infty}}$ と $O_K[[\frac{1}{T}]]$ の同型 $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},\overline{\infty}} \cong O_K[[\frac{1}{T}]]$ を取る．これは同型 $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} \cong K[[\frac{1}{T}]]$, $\widehat{\mathcal{O}}_{Y,\overline{\infty}} \cong \mathbb{F}[[\frac{1}{T}]]$ と埋め込み $N : K(X) \hookrightarrow K((\frac{1}{T}))$, $\overline{N} : \mathbb{F}(Y) \hookrightarrow \mathbb{F}((\frac{1}{T}))$ を誘導する．

命題 6.3 ([10, Prop. 4.1])．

(1) (5.4) で定まる $A = A(X, \infty, N)$ は整であり，$A^{\mathrm{red}} = A(Y, \overline{\infty}, \overline{N})$ が成り立つ．

(2) 次の三条件は同値である：

(a) A は厳整, (b) $\underline{M}(A) = \underline{M}(A^{\mathrm{red}})$, (c) $WG_\infty(X) = WG_{\overline{\infty}}(Y)$.

注意 6.4. 定理 3.1 の条件 (3) を仮定する．すると命題 6.3 により A は厳整となる．このとき，直和分解 (5.6) は次の O_K-加群としての直和分解を導く[16]：

$$O_K[[\frac{1}{T}]][T] = O(A) \oplus O_K[[\frac{1}{T}]]\frac{1}{T} \oplus (\bigoplus_{i=1}^{g} O_K T^{\mu_i}). \tag{6.1}$$

ここで $O(A) := \{a(T) \in A \mid ||a(T)|| \leq 1\}$ である．従って，(5.12) において $b_j^{(k)}(T) \in O(A) \oplus O_K[[\frac{1}{T}]]\frac{1}{T}$ と $e_{i,j}^{(k)} \in O_K$ が成り立つ．また，命題 5.8 によって，Y が通常であることとすべての $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\det(\mathbf{e}^{(k)}) \in O_K^*$ であることは同値となる．

注意 6.5. 定理 3.1 の条件 (1)-(3) を仮定する．このとき，O_K 上の自己同型 $\widetilde{\delta} : \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ で $\widetilde{\delta} \otimes_{O_K} K = \delta$ が成り立つものが唯一存在し，$\widetilde{\delta}(\widetilde{\infty}) = \widetilde{\infty}$, $\widetilde{\delta}(\overline{\infty}) = \overline{\infty}$ が成り立つ．さらに，同型 $\widehat{\mathcal{O}}_{\mathfrak{X},\overline{\infty}} \cong O_K[[\frac{1}{T}]]$ をうまく取り直すと，$\widetilde{\delta}$ が誘導する $O_K[[\frac{1}{T}]]$ の自己同型は $\frac{1}{T} \mapsto \frac{1}{\zeta_d T}$ となるように選ぶことができる [10, Prop. 4.6]．すると分解 (6.1) は

[16] 左辺は $O_K[[\frac{1}{T}]]$ と T で生成される $K((\frac{1}{T}))$ の部分 O_K-代数を表す．

δ の作用と両立する．仮定 $d \geq 2g+1$ と (5.5) によりすべての $1 \leq i < j \leq g$ に対して $\mu_i \not\equiv \mu_j \mod d$ なので，(5.12) における行列 $\mathbf{e}^{(k)}$ は対角行列でその対角成分はすべて O_K^* に属すことが分かる．特に次式が得られる：

(6.2) $$\text{すべての } k \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ に対し } |e_{11}^{(k)}| = 1.$$

p-進佐藤グラスマン多様体 次で定義される H は $||\cdot||$ により Banach F-代数となる：

$$H := \Big\{ a(T) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a_i T^i \;\Big|\; ||a(T)|| < \infty,\ \lim_{i\to\infty} a_i = 0 \Big\}.$$

$H_+ := \{\sum_{i=1}^{\infty} a_i T^i \in H\}$, $H_- := \{\sum_{-\infty}^{i=0} a_i T^i \in H\}$ は H の K-線形閉部分空間であり，$H = H_- \oplus H_+$ が成り立つ．$V \in \mathrm{Gr}(K)$ が整であるとき，$V \subset H \cap K((\frac{1}{T}))$ [17] となることに注意して V の H における閉包を V^{an} と定義する．

単射有界 K-線形写像 $w : H_+ \to H$ と $i \in \mathbb{Z}$ で，$T^i w : H_+ \to H = H_- \oplus H_+$ を $w_1 : H_+ \to H_-$, $w_2 : H_+ \to H_+$ によって $T^i w = (w_1, \mathrm{id}_{H_+} + w_2)$ と表すとき $||w_1|| \leq 1$, $||w_2|| \leq 1$ かつ w_2 は階数が有限な有界作用素の一様収束極限であるもの全体を $\mathcal{W}$ と書くことにしよう．**p-進佐藤グラスマン多様体** $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ は $\mathcal{W}$ の元の像として表される H の K-線形部分空間[18] 全体のなす集合として定義される．この定義は複雑であるが，幸いにして Anderson により次の明快な特徴付けが得られている．

命題 6.6 ([1, §3.2])**.**

(1) $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ に対し，$W^{\mathrm{alg}} := W \cap K((\frac{1}{T}))$ とおくと $W \in \mathrm{Gr}(K)$ と $W = (W^{\mathrm{alg}})^{\mathrm{an}}$ が成り立つ．特に $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K) \to \mathrm{Gr}(K)$, $W \mapsto W^{\mathrm{alg}}$ は単射である[19]．

(2) $V \in \mathrm{Gr}(K)$ に対し，$V = W^{\mathrm{alg}}$ を満たす $W \in \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ が存在することと V が整であることは同値である．特に $\mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(K) := \{V \in \mathrm{Gr}(K) \mid V \text{ は整 }\}$ と置くと $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K) \to \mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(K)$, $W \mapsto W^{\mathrm{alg}}$ は全単射で，逆写像は $V \mapsto V^{\mathrm{an}}$ で与えられる．

p-進ループ群 $h(T) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i T^i \in H$ は，$||h(T)|| = |h_0| = 1$ であり，すべての $i \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $|h_i| \leq \rho^i$ となるような $\rho \in [0,1)$ が存在するとき **p-進ループ** と呼ばれる．また，$i > 0$ ならば $h_i = 0$ であるとき $h(T)$ を **負**，$i < 0$ ならば $h_i = 0$ かつ $h_0 = 1$ であるとき $h(T)$ を **正** と呼ぶ．p-進ループ全体の集合を **p-進ループ群** と呼び Γ と書く．これは H の積によってアーベル群となる．負の p-進ループ全体は Γ の部分群 Γ_- を構成する．正の p-進ループ全体 Γ_+ も同様である．

---

[17] $K((\frac{1}{T}))$ と H を直積 $\prod_{i=-\infty}^{\infty} KT^i$ の部分空間とみなし，そこで共通部分を取る．

[18] 自動的に閉となる．

[19] (4.1) ではこの写像により $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ を $\mathrm{Gr}(K)$ の部分集合とみなし，$\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)_A := \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K) \cap \mathrm{Gr}(K)_A$ と書いた．

定義 6.7. $h(T)\in\Gamma$, $W\in \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ に対し，$h(T)W:=\{h(T)w\in H\mid w\in W\}\in \mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ によって Γ の $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)$ への作用を定める．また，この作用を命題 6.6 の全単射 $\mathrm{Gr}^{\mathrm{an}}(K)\to \mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(K)(\subset \mathrm{Gr}(K))$ によって $\mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(K)$ への作用に移送する．すなわち，$h(T)\in\Gamma$, $V\in \mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(K)$ に対して次の式で作用が定まる：

$$h(T)V=\Big(\{h(T)v\in H\mid v\in V\}\text{ の } H \text{ での閉包}\Big)\bigcap K((\frac{1}{T}))\in \mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(K). \tag{6.3}$$

命題 6.8 ([1, §3.2])**.** $V\in \mathrm{Gr}^{\mathrm{int}}(V)$, $h(T)\in\Gamma$ とする．

(1) $i(V)=i(h(T)V)$ が成り立つ．また，$V\in \mathrm{Gr}(K)_A$ ならば $h(T)V\in \mathrm{Gr}(K)_A$ である．

(2) $h(T)\in\Gamma_+$ ならば $(h(T)V)^{\mathrm{red}}=V^{\mathrm{red}}$ である．

(3) $V\in \mathrm{Gr}(K)_A$ かつ $h(T)\in\Gamma_-$ ならば $[h(T)V]=[V]$ である．

p-進タウ関数　整な元 $V\in \mathrm{Gr}(K)$ に対し，V の **p-進タウ関数** $\tau_V:\Gamma_+\to K$ を次のように定義する．まず，V の標準基底を $\{v_i(T)=\sum_j v_{ij}T^j\}_{i=1}^{\infty}$ とし，各 $i\in\mathbb{Z}, j\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し (i,j)-成分が $v_{j,i-i(V)}$ である $\mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{Z}$ 行列を $\mathcal{V}$ とする．次に $h(T)=\sum_{j=0}^{\infty}h_jT^j\in\Gamma_+$ を取り，各 $i\in\mathbb{Z}_{>0}, j\in\mathbb{Z}$ に対し (i,j)-成分が h_{i-j} である $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{>0}$ 行列を $\mathcal{H}$ とする[20]．これらの積として得られる $\mathbb{Z}_{>0}\times\mathbb{Z}_{>0}$ 行列を $\mathcal{T}:=\mathcal{H}\mathcal{V}$ とする．すなわち，各 $i,j\in\mathbb{Z}_{>0}$ に対し $\mathcal{T}$ の (i,j)-成分は $\tau_{ij}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}h_{i-k}v_{j,k-i(V)}$ で与えられる．(これは無限和であり，K の p-進位相を用いて定義される．) この上で次のように $\tau_V(h(T))\in K$ を定める：

定義 6.9. $\tau_V(h(T)):=\det(\mathcal{T})=\lim_{n\to\infty}\det(\tau_{i,j})_{i,j=1}^{n}\in K.$

この定義の意味を説明する．H_+ の基底[21] $\{T^i\mid i\in\mathbb{Z}_{>0}\}$ と H の基底 $\{T^j\mid j\in\mathbb{Z}\}$ に関して $\mathcal{V}$ で表現される K-線形連続写像 $H_+\to H$ を f_V とすると，f_V は単射で像は $T^{i(V)}V^{\mathrm{an}}$ となる．同様に，$\mathcal{H}$ で表現される K-線形連続写像 $H\to H_+$ を f_H とすると，$f_H(a(T))=\pi(h(T)a(T))$ と表せる．ただし，$\pi:H\to H_+$ は直和分解 $H=H_-\oplus H_+$ に関する射影である．従って $\ker(f_H)=h(T)^{-1}H_-$ である．ここから

$$\ker(H_+\overset{f_V}{\to}H\overset{f_H}{\to}H_+)=\{0\}\Leftrightarrow T^{i(V)}V^{\mathrm{an}}\cap h(T)^{-1}H_-=\{0\}$$
$$\Leftrightarrow h(T)V^{\mathrm{an}}\cap H_-T^{-i(V)}=\{0\}\Leftrightarrow h(T)V\cap F[[\frac{1}{T}]]T^{-i(V)}=\{0\}$$

が従う．(最後の $h(T)V$ は定義 6.7 で定められた作用を表す．) 一方，$\mathcal{T}$ で表現される K-線形連続写像 $H_+\to H_+$ は $f_H\circ f_V$ であるから，無限次元行列式の一般論 [20] から $\ker(H_+\overset{f_V}{\to}H\overset{f_H}{\to}H_+)=\{0\}$ と $\tau_V(h(T))\neq 0$ が同値であることが分かる．特に $V=A$ と取ると $i(A)=1-g$ なので，定理 5.7 を併せることで次が得られる：

定理 6.10. $h(T)\in\Gamma_+$ に対し，$\tau_A(h(T))=0$ と $[h(T)A]\in\Theta$ は同値である．

[20] $j<0$ のときは $h_j=0$ と規約する

[21] 正確には，H_+ の稠密な部分空間の基底．すぐ下で H についても同様．

注意 6.11. この定理は標語的に「タウ関数の零点集合はテータ因子に一致する」と述べられる[22]．この事実は古典的（複素解析的）な設定でも成立するが，テータ因子はテータ関数の零点集合（の平行移動）に一致することを思いだすと，タウ関数とテータ関数は密接な関係にあることが示唆される．ただし，この関係を実現するためには，タウ関数の定義域であるループ群と，テータ関数の定義域であるヤコビ多様体の普遍被覆を，非自明な方法で結びつけなくてはならない．この問題は解決されており，[23, Th. 9.11] において明示的な関係式が得られている．一方，この関係式の p-進ソリトン理論における類似は知られていない．これは楕円曲線の場合でも興味深い問題だと思われる．

問題 6.12. Norman の p-進テータ関数 [15] と p-進タウ関数の関係を明らかにせよ．

佐藤展開定理 整数 $n \geq m > 0$ と行列 $A \in M_{m,n}(K), B \in M_{n,m}(K)$ を取る．$S \subset \{1, \dots, n\}$, $|S| = m$ に対して A_S を A から $s \in S$ の列を取り出した小行列，B^S を B から $s \in S$ の行を取り出した小行列とすると，次の **Cauchy-Binet の公式** が成り立つ：

$$\det(AB) = \sum_{S \subset \{1,\dots,n\},\ |S|=m} \det(A_S)\det(B^S).$$

定義 6.9 により p-進タウ関数は二つの（無限次）長方行列の積の行列式であるから，Cauchy-Binet の公式で m, n を大きくした極限として次の定理が得られる [1, §3.4]：

定理 6.13 (佐藤展開). 整な元 $V \in \mathrm{Gr}(K)$ と $h(T) \in \Gamma_+$ に対し次式が成り立つ：

$$\tau_V(h(T)) = \sum_{\lambda \in \underline{\mathrm{Par}}} P_\lambda(V) S_\lambda(h(T)).$$

ここで $P_\lambda(V)$ は (5.3) で定義された Plücker 座標，$S_\lambda(h(T))$ は次で定義される **Schur 関数** である（ただし $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \underline{\mathrm{Par}}$, $h(T) = \sum_{j=0}^\infty h_j T^j \in \Gamma_+$ とする）：

$$S_\lambda(h(T)) = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{i,j=1}^n \qquad (n \gg 0).$$

V が厳整であれば任意の $\lambda \in \underline{\mathrm{Par}}$ に対して $|P_\lambda(V)| \leq 1$ となる．これに補題 5.1 を併せると次の系を得る：

系 6.14. $V \in \mathrm{Gr}(K)$ を厳整な元，$h(T) \in \Gamma_+$ とする．実数 $\rho \in (0,1)$ で，$|S_{\kappa(V)}(h(T))| = \rho^{|\kappa(V)|}$ かつ任意の $\lambda \in \underline{\mathrm{Par}}$ に対し $|S_\lambda(h(T))| \leq \rho^{|\lambda|}$ を満たすものが存在すると仮定する．このとき，$\tau_V(h(T)) \neq 0$ である．

p-進ループの構成 Artin-Hasse 指数関数は次式で定義される形式冪級数である：

$$e^{AH}(T) := \exp\Big(\sum_{k=0}^\infty \frac{T^{p^k}}{p^k}\Big).$$

[22] この形の主張については [2, Th.1.10.1] も参照のこと．

これは $\mathbb{Q}[[T]]$ の元として定義されているが，実は $\mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$ に属すことが古典的に知られている．従って，任意の $\pi \in \mathfrak{M}_K$ に対し，次の冪級数は Γ_+ に属す：

$$h_\pi(T) := e^{AH}(\pi T). \tag{6.4}$$

命題 6.15 ([1, Lem. 3.5.1], [10, Prop. 3.6])**.** $\pi \in \mathfrak{M}_K \setminus \{0\}$ を取り $\rho := |\pi| \in (0,1)$ と置く．このとき，任意の $\lambda = (\lambda_i)_{i=1}^\infty \in \underline{\mathrm{Par}}$ に対して $|S_\lambda(h_\pi(T))| \le \rho^{|\lambda|}$ であり，さらに $\lambda_1 + l(\lambda) \le p$ ならば等号が成り立つ．

注意 6.16. 定理 3.1 の条件 (1), (3) を仮定する．(5.7) によって $\kappa(A) = (\kappa_i)_{i=1}^\infty$ は $\kappa_1 + l(\kappa) \le p$ を満たす．すると命題 6.15 は $h(T) = h_\pi(T)$ が系 6.14 の仮定を満たすことを示している．そこで定理 6.10 を適用すると $[h_\pi(T)A] \not\in \Theta$ が得られる．

命題 *6.15* の証明の概略. $h_\pi(T) = \sum_{i=0}^\infty h_i T^i$ とおく．上に述べた事実 $e^{AH}(T) \in \mathbb{Z}_{(p)}[[T]]$ から，すべての $i \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$ について $|h_i| \le \rho^i$ が成り立つ．無限変数の多項式環 $R := \mathbb{Z}[h_1, h_2, \dots]$ は h_i を i 次と定めることで次数環となる．Schur 関数 $S_\lambda(h_\pi(T))$ は R の元で $|\lambda|$ 次の斉次式として表せる．ここから $|S_\lambda(h_\pi(T))| \le \rho^{|\lambda|}$ が従う．$h_\pi(T)$ の定義から，$i < p$ ならば $h_i = \pi^i/i!$ となるので，小さい $\lambda \in \underline{\mathrm{Par}}$ に対しては $S_\lambda(h_\pi(T))$ が組み合わせ論的に求まる．この方法で $\lambda_1 + l(\lambda) \le p$ ならば $|S_\lambda(h_\pi(T))| = \rho^{|\lambda|}$ となることが示される．([11] も参照のこと.) □

命題 6.17 ([10, Prop.3.7])**.** A が厳整のとき，(5.11), (6.3), (6.4) を用いて定義される写像 $\mathfrak{M}_K \to \mathrm{Jac}(X)$, $\pi \mapsto [h_\pi(T)A]$ は単射である．

等分点の構成 ここからは定理 3.1 の条件 (1)-(3) を仮定し，注意 6.5 の設定で考える．$n \in \mathbb{Z}_{>0}$ を固定し，K を適当な有限次拡大で置き換えることで $|\mathrm{Jac}(X)[p^n]| = p^{2gn}$ となることも仮定する．次の定義を導入する：

$$\ell(T) := \sum_{k=0}^\infty \frac{e_{11}^{(k)}}{p^k} T^{p^k} \in K[[T]], \tag{6.5}$$

$$T^{(n)} := \{\pi \in O_K \mid \ell(\pi) = 0,\ |\pi| \le |p|^{1/(p^n - p^{n-1})}\}. \tag{6.6}$$

定理 3.1 は注意 6.16 と次の定理から従う．

定理 6.18. 次の写像は全単射である．($h_\pi(T)$ の定義は (6.4) を参照.)

$$T^{(n)} \to \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1, \qquad \pi \mapsto [h_\pi(T)A]. \tag{6.7}$$

証明の概略. まず各 $\pi \in T^{(n)}$ に対して $[h_\pi(T)A] \in \mathrm{Jac}(X)[p^n]_1$ を示さなくてはならない．これは $[h_\pi(T)^{p^n} A] = 0$ と $\delta^*[h_\pi(T)A] = \zeta_d[h_\pi(T)A]$ の二つを意味する．どちら

も同じように証明できるので，ここでは一つ目の等式だけを証明しておこう．まず，

$$h_\pi(T)^{p^n} \overset{(6.4)}{=} \exp\left(p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{p^k}}{p^k} T^{p^k}\right) \overset{(5.12)}{=} \exp\left(p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{p^k}}{p^k} (b_1^{(k)}(T) + e_{11}^{(k)} T)\right)$$
$$\overset{(6.5)}{=} \exp\left(p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{p^k}}{p^k} (b_1^{(k)}(T)) + \ell(\pi)T\right) \overset{(6.6)}{=} \exp\left(p^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\pi^{p^k}}{p^k} b_1^{(k)}(T)\right)$$

に注意する（注意 6.4 も参照）．$|\pi| \le |p|^{1/(p^n - p^{n-1})}$ から，すべての $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し $|p^n \frac{\pi^{p^k}}{p^k}|$ は $\exp(T)$ の収束半径 $|p|^{1/(p-1)}$ よりも真に小さいことが分かる．注意 6.4 により $b_1^{(k)}(T) \in O(A) \oplus O_K[[\frac{1}{T}]]\frac{1}{T}$ だから，$h_\pi(T)^{p^n}$ は $A^{\mathrm{an}} \cap \Gamma$ と Γ_- で生成される Γ の部分群に属す．命題 6.8 (3) により $[h_\pi(T)^{p^n} A] = [A] = 0$ となる．

最後に (6.7) が全単射であることを示す．単射性は命題 6.17 から従う．$|\mathrm{Jac}(X)[p^n]_1| = p^n$ であるから，あとは $|T^{(n)}| = p^n$ を示せばよい．$|T^{(n)}|$ は $\ell(T)$ の Newton 図形を用いて計算できる（例えば [4, Prop. 2.9] を参照)．ところが $\ell(T)$ の Newton 図形は (6.2) によって完全に決定できる．この方法で $|T^{(n)}| = p^n$ が示される． □

注意 6.19. $\mu \in \{1, \ldots, d\}$ に対し，$\widehat{\mathrm{Jac}}(X) = \ker(\mathrm{Jac}(X) \to \mathrm{Jac}(Y))$ の部分群を

$$\widehat{\mathrm{Jac}}(X)[p^n]_\mu := \{\alpha \in \widehat{\mathrm{Jac}}[p^n] \mid \delta^*(\alpha) = \zeta_d^\mu \alpha\}$$

と定める．$\mu \in WG_\infty(X)$ のときは $\widehat{\mathrm{Jac}}(X)[p^n]_\mu \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ であり，そうでないときは $\widehat{\mathrm{Jac}}(X)[p^n]_\mu = \{0\}$ となる [10, Prop. 4.8]．$i \in \{1, \ldots, g\}$ を取る．

$$T_i^{(n)} := \{\pi \in O_K \mid \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_{ii}^{(k)}}{p^k} \pi^{p^k} = 0,\ |\pi| \le |p|^{1/(p^n - p^{n-1})}\}$$

とすると，次の写像も全単射となる [10, Prop. 4.9]：

$$T_i^{(n)} \to \widehat{\mathrm{Jac}}(X)[p^n]_{\mu_i}, \qquad \pi \mapsto [e^{AH}(\pi T^{\mu_i})A].$$

ただし，p-進ループ $e^{AH}(\pi T^{\mu_i})$ に対して注意 6.16 が適用できるのは $i = 1$ の場合に限る．

文献案内 本稿では p-進版のソリトン理論に焦点を絞って解説した．最後に古典的なソリトン理論に関する文献を挙げる．創始者の文献は [18, 19] がある．[23] は優れたサーベイ論文である．表現論との関係は [9, 13] が詳しい．[14] では Krichever 対応のより深い理論が解説されている．ソリトン理論の代数曲線論への応用としては [21, 22] が重要である．この結果は最近になって p-進類似が与えられた [8]．

謝辞 原稿を読んで有益なコメントを下さった落合理氏とレフリーに感謝する．

References

[1] G. W. Anderson. Torsion points on Jacobians of quotients of Fermat curves and p-adic soliton theory, Invent. Math. 118 (1994), no. 3, pp. 475–492.

[2] G. W. Anderson. Rank one elliptic A-modules and A-harmonic series, Duke Math. J. 73, No.3, pp. 491–542 (1994).

[3] R. Coleman, A. Tamagawa and P. Tzermias, The cuspidal torsion packet on the Fermat curve, J. Reine Angew. Math. 496 (1998), pp. 73-81.

[4] D. Goss. Basic structures of function field arithmetic, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Volume 35. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[5] D. Grant. Torsion on theta divisors of hyperelliptic Fermat Jacobians, Compos. Math. 140 (2004), no. 6, pp. 1432–1438.

[6] R. Hartshorne. Algebraic geometry, Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, 1977.

[7] M. Homma. Automorphisms of prime order of curves, Manuscripta Math. 33 (1980/81), no. 1, pp. 99–109.

[8] T. Ichikawa, Algebraic and rigid geometry on the Schottky problem, to appear in J. Reine Angew. Math.

[9] V. Kac and A. Raina, Bombay lectures on highest weight representations of infinite-dimensional Lie algebras, Advanced Series in Mathematical Physics, 2, 1987.

[10] S. Kobayashi, and T. Yamazaki,, Torsion points on Jacobian varieties via Anderson's p-adic soliton theory, to appear in Asian Journal of Mathematics.

[11] I. G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Second edition, With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995.

[12] Y. Miyasaka and T. Yamazaki. Torsion points on hyperelliptic Jacobians via Anderson's p-adic soliton theory, Tokyo J. Math., 36 (2013), pp. 387-403.

[13] 三輪哲二, 神保道夫, 伊達悦朗, ソリトンの数理. 岩波書店.

[14] D. Mumford. An algebro-geometric construction of commuting operators and solutions to the Toda lattice equation, KdV equation and related nonlinear equations, International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto, 1977) (M. Nagata, ed.), Kinokuniya, Tokyo, 1978, pp. 115–53.

[15] P. Norman, p-adic theta functions, Amer. J. Math. 107 (1985), no. 3, pp. 617–661.

[16] M. Raynaud, Courbes sur une variété abélienne et points de torsion, Invent. Math. 71 (1983), pp. 207-233.

[17] M. Raynaud, Sous-variétés d'une variété abélienne et points de torsion, Arithmetic and geometry, Vol. I, pp. 327–352, Progr. Math., 35, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983.

[18] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold, Nonlinear partial differential equations in applied science (Tokyo, 1982), pp. 259–271, North-Holland Math. Stud., 81, North-Holland, Amsterdam, 1983.

[19] 佐藤幹夫述, 野海正俊記, ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体, 上智大学数学講究録 18(1984).

[20] J.-P. Serre, Endomorphismes complètement continus des espaces de Banach p-adiques, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 12 1962, pp. 69–85.

[21] T. Shiota, Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent. Math. 83 (1986), no. 2, pp. 333–382.

[22] 塩田隆比呂, KP 方程式と Schottky 問題, 数学 41 (1989), no.1, pp. 16–33.

[23] G. Segal and G. Wilson, Loop groups and equations of KdV type, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 61, pp. 5–65 (1985).

[24] K.-O. Stöhr and P. Viana. A study of Hasse-Witt matrices by local methods, Math. Z. 200 (1989), no. 3, pp. 397–407.

[25] P. Tzermias. The Manin-Mumford conjecture: a brief survey, Bull. London Math. Soc. 32 (2000), no. 6, pp. 641–652.