RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 365–421

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応
(p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$)

By

中村 健太郎 (Kentaro Nakamura)*

Abstract

In this survey paper, we explain the proof of the p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ following Paskunas and Colmez-Dospinescu-Paskunas which are based on the groundbreaking works by Colmez and Berger-Breuil.

Contents

Received May 27, 2014. Revised May 16, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11F70, 11F80.
Key Words: *p-adic local Langlands correspondence for* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$.
Supported by the Grant-in-aid (NO. S-23224001) for Scientific Research, JSPS
*Department of Mathematics, Hokkaido University, Kita 10, Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan.
e-mail: kentaro@math.sci.hokudai.ac.jp

§1. 序論

§1.1. p 進局所 Langlands 対応を考える動機

「$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応」とは, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進的な絶対既約ユニタリー Banach 表現と $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の既約 2 次元 p 進 Galois 表現とを結びつける理論である. この理論は, Breuil による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の半単純 mod p Langlands 対応 ($G_{\mathbb{Q}_p}$ の半単純 2 次元 mod p 表現に $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の長さ有限半単純な smooth 表現を対応させる対応) の研究, 及び $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元クリスタリン p 進表現に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の Banach 表現の構成に関する研究によって始まり, その後, Berger-Breuil や Colmez を初めとする多くの人々の研究に基づき, 最終的には Paskunas 及び Colmez-Dospinescu-Paskunas によって最近完全に証明された. 本稿 §2 以降では, この $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理とその証明を解説する. 特に, 証明の中でも最も重要な Colmez の理論を重点的に解説する. この序論 §1 では, もう少し広い視点から, なぜ p 進局所 Langlands 対応が整数論において重要であるかということを, 局所 Langlands 対応や大域 Langlands 対応との関連から解説していきたい.

通常の ($l \neq p$ の場合の) 局所 Langlands 対応は, p 進体 F に対して $\mathrm{GL}_n(F)$ の既約スムーズ表現と F の Weil-Deligne 群 $'W_F$ の n 次元表現とを結びつける理論であるが, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応は, 局所 Langlands 対応の $F = \mathbb{Q}_p$ かつ $n = 2$ の場合の p 進版にあたる理論である. 局所 Langlands 対応では, 表現の係数の位相的な性質はほとんど反映されることがなかったことと比べて, p 進局所 Langlands 対応では, 表現の p 進係数の p 進位相的な性質が強く反映される. そのため, 通常の局所 Langlands 対応よりも扱う対象が複雑になり, その分 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 及び $G_{\mathbb{Q}_p}$ の様々な精妙な性質も多く反映される理論となる.

また, 代数的な保型表現と代数的な大域的 p 進 Galois 表現の間の対応である大域体の Langlands 対応との関連から見ると, p 進局所 Langlands 対応は, 局所 Langlands 対応では捉えることのできなかった p 進 Galois 表現の $l = p$ での局所成分の情報を捉えることができる理論である. 大域 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の整合性の予想によれ

ば (簡単のため代数体は $\mathbb{Q}$ の場合のみを考え, $\mathbb{A}$ は $\mathbb{Q}$ のアデールとする), $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A})$ の保型表現 $\Pi = \bigotimes' \pi_v$ (v は $\mathbb{Q}$ の素点全体を渡る) の素数 l での局所成分 π_l は, 大域 Langlands 対応で対応する $G_{\mathbb{Q}} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ の p 進 Galois 表現 $V(\Pi)$ の $G_{\mathbb{Q}_l} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_l/\mathbb{Q}_l)$ への制限 $V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_l}}$ から, ある種の手続きを通じて得られる Weil-Deligne 群 $'W_{\mathbb{Q}_l}$ の表現 $W(V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_l}})$ (の Frobenius 半単純化) と局所 Langlands 対応で対応すると予想されている (実際に, 多くの場合に証明されている). $l \neq p$ の場合は, $W(V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_l}})$ から $V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_l}}$ が完全に復元できることに対して, $l = p$ の場合は, $W(V(\pi)|_{G_{\mathbb{Q}_p}})$ を構成する過程で, $V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の多くの情報が抜け落ちてしまう. よって, $l \neq p$ の場合は, $V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_l}}$ が (Frobenius 半単純化を除いて) π_l から復元できるが, $l = p$ の場合は, $V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ は π_p からは復元できない. Breuil が p 進局所 Langlands 対応を考え始めた動機の一つには, この抜けた情報を保型側からどのようにして復元することができるかという問題にあったようである. その解決案として彼は, 代数的な保型表現 Π には "p 進係数版の保型表現" $\Pi' = \bigotimes'_v \pi'_v$ が自然に対応し, p での局所成分 π'_p が p 進局所 Langlands 対応によって $V(\Pi)|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ と対応するのではないかという問いを投げかけている (大域 Langlands 対応と p 進局所 Langlands 対応の整合性, [Br08]Question 1.1.2). "p 進係数版の保型表現" $\Pi' = \bigotimes_v \pi'_v$ の適切な定義は (筆者の知る限り) まだ得られていないようであるが, Π' の有限部分 $\Pi'_{\mathrm{fin}} := \bigotimes'_{l<\infty} \pi'_l$ は, Emerton により定義された志村多様体の完備コホモロジーと密接に関係すると期待されており, 実際に $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ の場合には, モジュラー曲線の完備コホモロジーを用いて上述の Breuil の問いが肯定的に解決されている ([今井] 参照). 大域 Langlands 対応と p 進局所 Langlands 対応の整合性は, 整数論への応用においても非常に大きな意義を持つことが期待されている. 実際に多くのことが証明されている $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$ の場合には, この整合性を用いることで, 保型表現の合同に関する情報を持つ Hecke 環とガロア表現の変形環との比較が可能になり, その結果として, $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元幾何的 p 進ガロア表現 V の保型性に関する Fontaine-Mazur 予想が (ある緩い仮定の下で) 解決された ([Em11], [Ki09]). Wiles が, p で準安定還元をもつ $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線に対する志村-谷山予想の解決において証明したのが, この予想の特別な場合 ($V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が準安定かつ Hodge-Tate 重みが $\{0,1\}$) だったことと比べれば, p 進局所 Langlands 対応の整数論への応用における強力さは容易に見て取れるであろう. この応用に関しても [今井] を参照されたい.

さて, 以上のように, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合には整数論において華々しい成果をあげている p 進局所 Langlands 対応であるが, 残念ながら (局所類体論に対応する $\mathrm{GL}_1(F)$ の場合と) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 以外の場合, 例えば $n \geqq 3$ となる $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Q}_p)$ や $F \neq \mathbb{Q}_p$ となる $\mathrm{GL}_2(F)$ などの場合の p 進局所 Langlands 対応については, 予想の正しい定式化の候補さえもまだ得られていない状態である. 例えば, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の証明で用いられた議論の多くは, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 以外の場合に適用しようとするとたちどころに破綻してしまう. 特に顕著な例 (反例?) として, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の証明で重要な役割を果たす mod p Langlands 対応は, $F \neq \mathbb{Q}_p$ の場合の $\mathrm{GL}_2(F)$ の場合には全く成立しないことが証明されている (G_F の 2 次元 mod p 表現よりも $\mathrm{GL}_2(F)$ の既約 smooth mod p 表現の方が遥かに多いということが証明されている). このような困難にも関わらず, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場

合の成功以降, p 進局所 Langlands 対応の一般化と関連する様々な研究が活発になされている (例えば [BS07], [Br10], [Em10b] 参照). 最近では, 大域体的な手法 (志村多様体の完備コホモロジーや $R = T$ 定理) を用いて, p 進 Galois 表現に対応する $\mathrm{GL}_n(F)$ の Banach 表現の候補を構成する研究がなされ始めている ([CEGGPS13], [So13], [So14]).

§ 1.2. 論文の構成

§2 では, まず $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の許容ユニタリー Banach 表現の定義を導入することから始め, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理の主張を述べる. また, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応と局所類体論及び $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の局所 Langlands 対応との整合性に関する定理も紹介する. §3 以降は主定理の証明について解説する. §3 と §4 では $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応において最も重要な Colmez の理論 [Co10d] について解説する. Colmez の理論の基本的なアイデアは, Fontaine による p 進体の p 進 Galois 表現の圏とエタール (φ, Γ)-加群の圏との圏同値の存在を背景として, エタール (φ, Γ)-加群と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現との対応を直接構成するというものである. §3 では, まず Fontaine によるエタール (φ, Γ)-加群の理論を復習した後, エタール (φ, Γ)-加群から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現を構成する方法について解説する. 適切な位相的性質を持つ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現を定義するためには, (φ, Γ) 加群 (より正確には (φ, Γ) 加群 D と $\mathbb{Q}_p^\times$ のユニタリー指標 δ からなる組 (D, δ)) は G 整合性 (G-compatibility [CD13]) と呼ばれる強い条件を満たさなければならない. どのような組 (D, δ) が G 整合性という性質を満たすかという問題は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の理論全体を通して極めて重要な問題になる. §4 では, 逆向きの対応, つまり $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現からエタール (φ, Γ)-加群を構成する方法を解説する. この場合は, torsion 係数を持つ $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の許容 smooth 表現から torsion エタール (φ, Γ)-加群への完全関手を構成することができて, この関手の逆極限を取ることで Banach 表現の場合の関手が構成される. この事実は p 進局所 Langlands 対応の変形版の構成を可能にし, 対応の変形版を考えることは主定理の証明及び応用 ([今井]) において重要になる. §5 では, 2 次元エタール (φ, Γ)-加群 D と D から自然に定まる $\mathbb{Q}_p^\times$ の指標 $\delta_D := \det_{\mathcal{E}} D \cdot \chi^{-1}$ の組 (D, δ_D) の G 整合性に関する定理の証明を解説する. まず, $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の 2 次元クリスタリン表現に対する p 進局所 Langlands 対応に関する Berger-Breuil の結果 [BB10] を解説し, 次に $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ の 2 次元 p 進表現の普遍変形空間におけるクリスタリン表現の稠密性に関する Colmez [Co08] と Kisin [Ki10] の定理を紹介する. 最後に, クリスタリン表現の稠密性と p 進局所 Langlands 対応の変形理論的な性質を用いて, クリスタリン表現の場合の Berger-Breuil の結果に帰着させることで一般の組 (D, δ_D) に対する G 整合性が得られることを解説する. 最後の §6 では, [Pa13] 及び [CDP14] による $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理の証明の概略を解説する.

記号

本稿を通じて使用する記号をここで導入する. p を素数とする. $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ とし, $B := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in G \right\}$ を上半三角行列からなる G の閉部分群, $Z := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \middle| \, a \in \mathbb{Q}_p^\times \right\}$ を G

の中心, $K := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_p)$, $P^+ := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P := \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし, $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in G$ とする. 体 F に対してその絶対 Galois 群 $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ を G_F と表す. L を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体, $\mathcal{O} := \mathcal{O}_L$ を L の整数環とする. $\mathcal{O}$ の素元 $\varpi \in \mathcal{O}$ を一つ固定し, 剰余体 $\mathcal{O}/\varpi\mathcal{O}$ を k と表す. L 上の $|p| = \frac{1}{p}$ となるノルムを $|-| : L^\times \to \mathbb{R}_{>0}^\times$ と表し, $v_p(p) = 1$ となる p 進付値を $v_p : L^\times \to \mathbb{Q}$ と表す. p 進体 $\mathbb{Q}_p$ に対する局所類体論の相互写像を $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p} : \mathbb{Q}_p^\times \to G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}}$ と表す (本稿では, 相互写像は $\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}(p)$ が幾何的 Frobenius $(x \mapsto x^{1/p}) \in G_{\mathbb{F}_p}$ の持ち上げになっているものを取る). 以下, この相互写像によって $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 1 次元 L 表現と $\mathbb{Q}_p^\times$ から $\mathcal{O}^\times$ への連続準同型を同一視する. p 進円分指標を $\chi : G_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \to \mathbb{Z}_p^\times$ と表す. 群 H 及び H 加群 M に対して M の H 不変部分 $\{m \in M | hm = m$ 任意の $h \in H\}$ を M^H と記す. $\mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ を剰余体が k となる (可換) 完備ネター局所 $\mathcal{O}$ 代数のなす圏とする (射は局所 $\mathcal{O}$ 代数の射).

§ 2. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理

§ 2.1. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理の主張

まずは [Pa13] 及び [CDP14] によって最近証明された $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理の主張を正確に述べることから始めたい. この定理は $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現と G の p 進係数の許容ユニタリー Banach 表現との対応に関する定理である. そこでまずは対応に現れるこれらの表現の定義を解説することから始める.

定義 2.1.

(1) $G_{\mathbb{Q}_p}$ の連続 L 線形作用を持つ L 上の有限次元ベクトル空間を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 表現と呼ぶ. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 表現の圏を $\mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ と表す.

(2) $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L 表現 V が絶対既約であるとは L の任意の有限次拡大体 L' に対して $V \otimes_L L'$ が $G_{\mathbb{Q}_p}$ の L' 上の既約表現であることとする.

これに対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現を定義するためにはいくつかの準備が必要である.

L 上の Banach 空間の圏を Ban_L と表す. $E \in \mathrm{Ban}_L$ に対して, E 上の L-Banach ノルム $|-|_E : E \mapsto \mathbb{R}_{\geqq 0}$, つまり, 任意の $a \in L, x \in E$ に対して $|ax|_E = |a||x|_E$ を満たす Banach ノルムを一つ取る. このとき, E の $|-|_E$ に関する単位球 $\Theta_{|-|_E}$ を $\Theta_{|-|_E} := \{x \in E | \, |x|_E \leqq 1\}$ で定める. これは E の開 $\mathcal{O}$ 格子, つまり $\Theta_{|-|_E}[1/p] = E$ となる有界部分開 $\mathcal{O}$ 加群となる. 逆に, 開 $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq E$ に対して, $n(v) := \max\{n \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\} | v \in \varpi^n \Theta\}$, $|v|_\Theta := |\varpi^{n(v)}|$ とおけば, $|-|_\Theta$ は E の位相を定める L 上のノルムとなる.

位相的 $\mathcal{O}$ 加群 M が線形位相的であるとは, M の開部分 $\mathcal{O}$ 加群からなる $\{0\}$ の基本近傍系が存在することと定義する. 捻れ元を持たないコンパクト Hausdorff 線形位相的 $\mathcal{O}$ 加群のなす圏を $\mathrm{Mod}_{\mathrm{comp}}^{\mathrm{fl}}(\mathcal{O})$ と表す. $\mathrm{Mod}_{\mathrm{comp}}^{\mathrm{fl}}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}$ を, 対象は $\mathrm{Mod}_{\mathrm{comp}}^{\mathrm{fl}}(\mathcal{O})$ と同じで,

射が $(M_1, M_2 \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})$ に対して)

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}}(M_1, M_2) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})}(M_1, M_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$$

で定義される圏とする．このとき, $M \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}$ に対して, L ベクトル空間 $M^* := \mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_{\mathcal{O}}(M, L)$ にノルム $|f|_{M^*} := \max_{x \in M}|f(x)|$ で位相を入れたものを対応させることで, 反変圏同値 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ban}_L$ を得る ([ST02a] Theorem 1.2). この圏同値の逆の対応は, $E \in \mathrm{Ban}_L$ に対して開 $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq E$ を一つ取り, $\Theta^* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Theta, \mathcal{O})$(位相は各点収束位相) を対応させることで与えられる．これは, 圏 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}$ の中では, 標準的な同型を除いて開 $\mathcal{O}$ 格子 Θ の取り方によらない．

定義 2.2.

(1) H を p 進 Lie 群とする．H が連続 L 線形に作用する (つまり, L 線形作用が定める射 $H \times \Pi \to \Pi : (g, x) \mapsto gx$ が連続となる) L 上の Banach 空間 Π で, 任意の $g \in H$, $v \in \Pi$ に対して $|gv|_\Pi = |v|_\Pi$ を満たす L-Banach ノルム $|-|_\Pi$ が存在するものを H の L 上のユニタリー Banach 表現と呼ぶ．H の L 上のユニタリー Banach 表現の圏を $\mathrm{Ban}_L(H)$ と表す．この圏の射は H 同変連続 L 線形写像からなるとする．

(2) $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$ が位相的既約であるとは, H 作用で安定な Π の閉部分 L ベクトル空間が $\{0\}$ と Π しか存在しないこととする．L の有限次拡大体 L' に対して, $\Pi \otimes_L L'$ は自然に H の L' 上のユニタリー Banach 表現となる．$\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$ が位相的絶対既約であるとは, L の任意の有限次拡大 L' に対して $\Pi \otimes_L L' \in \mathrm{Ban}_{L'}(H)$ が位相的既約となることとする．

注意 2.3. ここでは, H はコンパクト p 進 Lie 群とする．H の $\mathcal{O}$ 係数の (非可換) 岩澤代数を $\mathcal{O}[[H]] := \varprojlim_{H'} \mathcal{O}[H/H']$ で表し (ここで, H' は H の開正規部分群全体を動くとする), $L[[H]] := \mathcal{O}[[H]][1/p]$ とおく． このとき, $\mathcal{O}[[H]]$ 及び $L[[H]]$ は Noether 環である ([La65]V.2.2.4). $M \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})$ となる位相的 $\mathcal{O}$ 加群 M で, 連続左作用 $\mathcal{O}[[H]] \times M \to M : (\lambda, x) \mapsto \lambda x$ で $\mathcal{O}$ 加群の作用と $\mathcal{O} \hookrightarrow \mathcal{O}[[H]]$ による $\mathcal{O}$ 作用が一致するものを持つものを $\mathcal{O}$ 上の岩澤 H 加群と呼ぶ ([ST02a]§2). $\mathcal{O}$ 上の岩澤 H 加群の圏 (射は 連続 $\mathcal{O}[[H]]$ 準同型) を $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}[[H]])$ と表す．$\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}[[H]])_{\mathbb{Q}}$ を $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O})_{\mathbb{Q}}$ と同様に定義する．このとき, $M \in \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}[[H]])_{\mathbb{Q}}$ に対して, M^* への連続 H 作用を M の $\mathcal{O}[[H]]$ 作用から自然に誘導されるもので定義すると, 対応 $M \mapsto M^*$ は反変圏同値 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}[[H]])_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ban}_L(H)$ を与える．([ST02a]Theorem 2.3).

再び H は一般の p 進 Lie 群とする．以下, H の L 上のユニタリー Banach 表現 Π に対して Π のノルムと言うときは任意の $g \in H, v \in \Pi$ に対して $|gv|_\Pi = |v|_\Pi$ を満たす L 上のノルムのみを考える．このとき, ユニタリー性より, ノルム $|-|_\Pi$ に対する Π の単位球 $\Theta_{|-|_\Pi} := \{v \in \Pi \mid |v|_\Pi \leqq 1\}$ は H 作用で安定な Π の開 $\mathcal{O}$ 格子となる．以下, $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq \Pi$ と言うときは H の作用で安定な開 $\mathcal{O}$ 格子のみを考えることにする．作用の連続性

から, Π の任意の $\mathcal{O}$ 格子 Θ に対して Θ の mod ϖ 還元 $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ は H の k 上の smooth 表現, つまり, 任意の $\bar{v} \in \Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ に対して $\bar{v}$ の固定化部分群 $\{g \in H | g\bar{v} = \bar{v}\}$ は H の開部分群になる. 我々にとって基本的なユニタリー Banach 表現のクラスは次で定義されるものである ([ST02a]§3).

定義 2.4.
$\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$ とする. ある $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq \Pi$ に対して $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ が許容的 (admissible) となる, つまり, H の任意の開部分群 H' に対して $\dim_k(\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k)^{H'} < \infty$ が成り立つとき, Π は許容的であるという. H の L 上の許容的なユニタリー Banach 表現のなす圏を $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(H)$ と表す.

注意 2.5.

(1) 上の定義において, 一つの Θ に対して還元 $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ が許容的であれば任意の $\mathcal{O}$ 格子 Θ' の還元 $\Theta' \otimes_{\mathcal{O}} k$ もまた許容的となる.

(2) H はコンパクトとする. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$ に対して, Π が許容的となることと, 任意の $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq \Pi$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Theta, \mathcal{O})$ が有限生成 $\mathcal{O}[[H]]$ 加群となることは同値である ([ST02a]Lemma 3.4 及びその証明). $\mathcal{O}[[H]]$ 加群として有限生成なものたちからなる $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{O}[[H]])$ の充満忠実部分圏を $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp,fg}}(\mathcal{O}[[H]])$ と表す. 有限生成左 $\mathcal{O}[[H]]$ 加群で $\mathcal{O}$ 加群として平坦なものたちからなる圏を $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{fg}}(\mathcal{O}[[H]])$ と表すと, $\mathcal{O}[[H]]$ の Noether 性から位相を忘れる関手 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{comp,fg}}(\mathcal{O}[[H]]) \to \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{fg}}(\mathcal{O}[[H]])$ は圏同値であることが分かる ([ST02a]Proposition 3.1). さらに, 有限生成左 $L[[H]]$ 加群の圏を $\mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}(L[[H]])$ とすると, 自然に $\mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{fg}}(\mathcal{O}[[H]])_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Mod}^{\mathrm{fl}}_{\mathrm{fg}}(L[[H]])$ であるから, 以上の議論から反変圏同値 $\mathrm{Ban}_L(H) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}_{\mathrm{fg}}(L[[H]]) : \Pi \mapsto \Pi^* := \mathrm{Hom}_L^{\mathrm{cont}}(\Pi, L)$ を得る ([ST02a]Theorem 3.5). この圏同値と $L[[H]]$ の Noether 性から, $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(H)$ は Abel 圏となる.

(3) p 進 Lie 群 H がコンパクト開部分群 $K \subseteq H$ を持つとする. このとき, K に対して直前の注意を適用することで, $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(H)$ も Abel 圏となる. よって, 特に, $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p))$ もアーベル圏となる.

以下, $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ とする. 主定理を述べるためには, さらに次の定義が必要である.

定義 2.6. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ とする.

(1) ある $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq \Pi$ が存在して $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ が長さ有限の $k[G]$ 加群となるとき, Π は residually finite length であるという.

(2) 連続準同型 $\delta_\Pi : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ で任意の $v \in \Pi$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} v = \delta_\Pi(a)v$ が成り立つものが存在するとき, Π は中心指標 δ_Π を持つ, または単に, 中心指標を持つという. Π のユニタリー性から $\delta_\Pi(\mathbb{Q}_p^\times) \subseteq \mathcal{O}^\times$ となることに注意.

residually finite length かつ中心指標を持つ対象からなる $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ の充満忠実部分圏を $\mathrm{Rep}_L(G)$ と表す.

注意 2.7. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G)$ の任意の $\mathcal{O}$ 格子 Θ, Θ' に対して, 十分大きな $n \geqq 1$ が存在して $\varpi^n\Theta' \subseteq \Theta$ となる. これより, Π が residually finite length のとき, 任意の $\mathcal{O}$ 格子 Θ' に対しても $\Theta' \otimes_{\mathcal{O}} k$ は長さ有限の $k[G]$ 加群となり, さらに, $k[G]$ 加群としての半単純化 $(\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k)^{\mathrm{ss}}$ は Θ の取り方によらないことが容易にわかる. この半単純化を $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$ と表す.

定義 2.8.

(1) 2 つの連続準同型 $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ に対して $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{cont}} \in \mathrm{Rep}_G(L)$ を

$$\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{cont}} := \{f : G \to L|\ \text{連続写像で任意の}\ h = \begin{pmatrix} a\ b \\ 0\ d \end{pmatrix} \in B, g \in G \\ \text{に対して}\ f(hg) = \delta_1(a)\delta_2(d)f(g)\ \text{を満たす}\ \}$$

と定義する. この空間への G 作用は $(gf)(g') := f(g'g)$ $(g, g' \in G)$ と定義し, ノルムは $|f| := \max_{g\in G}|f(g)|$ と定義する. 任意の $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して $|\delta_1(a)| = |\delta_2(a)| = 1$ となるので写像 $g \mapsto |f(g)|$ はコンパクト集合 $B \setminus G$ を経由し $|f|$ は well-defined となる. このノルムに対応する $\mathcal{O}$ 格子は $\Theta := \{f \in \mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{cont}} | f(g) \in \mathcal{O}(g \in G)\}$ となり, mod ϖ 還元は $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k = \mathrm{Ind}_B^G(\bar{\delta}_1 \otimes \bar{\delta}_2)_{\mathrm{sm}} := \{f : G \to k|$ 連続写像で任意の $h = \begin{pmatrix} a\ b \\ 0\ d \end{pmatrix} \in B, g \in G$ に対して $f(hg) = \bar{\delta}_1(a)\bar{\delta}_2(d)f(g)$ を満たす $\}$ になる. 通常の smooth 表現の場合と同様に, 岩澤分解 $G = BK$ から $\mathrm{Ind}_B^G(\bar{\delta}_1 \otimes \bar{\delta}_2)_{\mathrm{sm}}$ は許容的であることが分かる. さらに, 長さ有限であることも知られている (§6.1 参照). また, 中心指標 $\delta_1\delta_2$ を持つので $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{cont}} \in \mathrm{Rep}_G(L)$ となる.

(2) $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ を位相的絶対既約とする. ある有限次拡大体 $L' \supseteq L$ と連続準同型 $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}_{L'}^\times$ が存在して $\Pi \otimes_L L'$ が $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{cont}}$ のある部分商と同型になるとき, Π は ordinary であるという.

以上の定義の下で, Colmez は [Co10d] において共変完全関手

$$V : \mathrm{Rep}_L(G) \to \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p}) : \Pi \to V(\Pi)$$

を定義した (定義 4.4). この関手の性質については §4 で詳しく解説する. 次が $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理である ([Pa13]Theorem 1.1, Theorem 1.3 ($p \geqq 5$), [CDP14]Theorem 1.1, Theorem 1.4 (p: general)).

定理 2.9.

(1) $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ を位相的絶対既約とする. このとき $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ となる (これにより位相的絶対既約な Π に対して $V(\Pi)$ が定義出来るようになる).

(2) Colmez の関手 $\Pi \mapsto V(\Pi)$ は次の同型類の集合の間の全単射を誘導する.

$$\{\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G) \,|\, \Pi \text{ は位相的絶対既約 non-ordinary}\}_{/\sim} \xrightarrow{\sim} \{V \in \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p}) \,|\, V \text{ は 2 次元絶対既約 }\}_{/\sim}.$$

注意 2.10.

(1) まず定理 (1) に関して, 絶対既約な Π が中心指標を持つことは [DS13] で (より一般の G に対しても) 証明されている (これに関しては本稿ではこれ以上解説しない). 定理の残りの主張は [Co10d] 及び [BB10] らの結果に基づき, 最終的に [Pa13]($p \geqq 5$ の場合) 及び [CDP14](任意の素数 p に対して) で完全に証明された. §3-§5 における準備のもと, §6 で [Pa13], [CDP14] における定理 2.9 の証明を解説する.

(2) ordinary な $\mathrm{Rep}_L(G)$ の表現, 及び可約な $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 L 表現に対しては以下が成り立つ. 連続指標 $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ に対して, $V(\delta_1 \circ \det) = 0$ となり, 同型 $V(\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{cont}}) \xrightarrow{\sim} L(\delta_1)$ が存在する. さらに, $\mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ の任意の完全列 $0 \to L(\delta_1) \to V \to L(\delta_2) \to 0$ に対して, 中心指標が $\delta_1\delta_2\chi^{-1}$ の表現からなる $\mathrm{Rep}_L(G)$ の完全列 $0 \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2\chi^{-1})_{\mathrm{cont}} \to \Pi(V) \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \delta_1\chi^{-1})_{\mathrm{cont}} \to 0$ で, $V(\Pi(V)) \xrightarrow{\sim} V$ となるものを標準的に構成することができる (§6.2 参照).

(3) $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応を最初に (非自明な証拠を伴って) 提唱したのは Breuil である. 彼による先駆的な論文 (例えば [Br03a], [Br03b], [Br04]) では, 具体例の計算を通じて対応の存在の証拠となる様々な (当時では) 新しい現象が発見されていて (理論の全貌が知られている現在の視点から見ても) 大変面白い. この時点ではまだおぼろげな予想の状態であった p 進局所 Langlands 対応の理論を飛躍的に進展させたのは, Colmez による (φ, Γ)-加群を用いた関手 $\Pi \mapsto V(\Pi)$(及びその逆の対応) の発見であり, 彼の理論 [Co10d] は主定理の証明でも最も重要な役割を果たす. 本稿の §3 以降は, この Colmez の理論を最も重点的に解説する.

§ 2.2. 局所類体論との整合性

p 進体 $\mathbb{Q}_p$ の最大アーベル拡大に関する局所類体論は, $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p^\times$ に対する p 進局所 Langlands 対応とみなせる. 古典的な局所 Langlands 対応と同様に, $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の整合性に関して, 次の定理が成り立つ ([Pa13] Theorem 1.3 ($p \geqq 5$), [CDP14] Corollary 1.2 (for any p)).

定理 2.11. $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ は位相的絶対既約 non-ordinary であるとし, Π の中心指標を $\delta_\Pi : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ と表す. このとき $\det_L V(\Pi) = \delta_\Pi \cdot \chi$ が成り立つ. ここで, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 1 次元 L 表現 $\det_L V(\Pi)$ は, 局所類体論によって連続準同型 $\det_L V(\Pi) : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ とみなしている (§1 **記号** 参照).

この定理は主定理 (定理 2.9) の証明から直ちに従う. 詳しくは, 本稿 §6.2 を参照されたい.

§ 2.3. 局所解析的ベクトル

H を p 進 Lie 群とする. $E \in \mathrm{Ban}_L$ に対して, 写像 $f : H \to E$ が H の E に値をもつ局所解析的関数であるとは, 任意の $\mu \in E^* = \mathrm{Hom}_L^{\mathrm{cont}}(E, L)$ に対して, 合成 $\mu \circ f$ が H の L に値を持つ局所解析的関数となることと定義する. H の E に値をもつ局所解析的関数のなす位相的 L ベクトル空間 (位相の定義は省略する) を $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, E)$ と表す.

定義 2.12. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L(H)$ とする. $x \in \Pi$ が局所解析的ベクトルであるとは, 写像 $H \to \Pi : g \mapsto gx$ が H の Π に値を持つ局所解析的関数になることと定義する. Π の局所解析的ベクトルからなる Π の部分 $L[H]$ 加群を Π^{an} と表す. 自然な射 $\Pi^{\mathrm{an}} \to \mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, \Pi) : x \mapsto [g \mapsto gx]$ は単射 L 準同型となるが, この埋め込みで $\mathcal{C}^{\mathrm{an}}(H, \Pi)$ からの誘導位相を Π^{an} に入れる. この対応 $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$ は, $\mathrm{Ban}_L(H)$ から H の局所解析的表現の圏 (定義は省略する. [ST02b] 参照) への関手を定める.

注意 2.13. H はコンパクト開部分群を持つと仮定する. このとき, 任意の $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(H)$ に対して, Π^{an} は Π の中で稠密になる ([ST03]Theorem 7.1). これより, 任意の $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(H)$ と $\Pi' \in \mathrm{Ban}_L(H)$ に対して, 自然な射 $\mathrm{Hom}_{L[H]}^{\mathrm{cont}}(\Pi, \Pi') \to \mathrm{Hom}_{L[H]}^{\mathrm{cont}}(\Pi^{\mathrm{an}}, \Pi')$ は単射となる.

$H = G$ のときは, さらに強く次のことが知られている ([CD13] Théorème 0.2).

定理 2.14. $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ とする. このとき, 任意の $\Pi' \in \mathrm{Ban}_L(G)$ に対して, 自然な射 $\mathrm{Hom}_{L[G]}^{\mathrm{cont}}(\Pi, \Pi') \to \mathrm{Hom}_{L[G]}^{\mathrm{cont}}(\Pi^{\mathrm{an}}, \Pi')$ は同型になる.

この定理から, 次の系が直ちに従う ([CD13]Corollaire 0.4).

系 2.15. 任意の $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathrm{Rep}_L(G)$ に対して, 自然な射

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}^{\mathrm{cont}}(\Pi_1, \Pi_2) \to \mathrm{Hom}_{L[G]}^{\mathrm{cont}}(\Pi_1^{\mathrm{an}}, \Pi_2^{\mathrm{an}})$$

は同型になる. 特に, 対応 $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$ は, $\mathrm{Rep}_L(G)$ から G の局所解析的表現の圏への充満忠実関手となる.

注意 2.16. 定理 2.14 の証明は本稿では解説しない. 証明では, (φ, Γ) 加群を用いた Π の記述を本質的に用いる. 特に, エタール (φ, Γ) 加群の一般化である Robba 環上の (φ, Γ) 加群を用いて Π^{an} を記述することで証明する. Robba 環上の (φ, Γ) 加群は, p 進局所 Langlands 対応においても, いくつかの重要な役割を果たす対象であるが, 紙数の関係上, 本稿では解説しない ([Co10d]V 参照).

§2.4. 局所 Langlands 対応との整合性

$\Pi \in \mathrm{Ban}_L(G)$ とする. $v \in \Pi$ が局所代数的ベクトルであるとは, あるコンパクト開部分群 $K' \subseteq G$ が存在して $L[K']v \subseteq \Pi$ が L 上の有限次元ベクトル空間となり, さらに代数群 $\mathrm{GL}_{2/L}$ の L 上の代数的表現 W が存在して $K'(\subseteq \mathrm{GL}_2(L))$ の表現として $L[K']v \xrightarrow{\sim} W|_{K'}$ となることとする. Π の局所代数的ベクトルからなる部分 L ベクトル空間を $\Pi^{\mathrm{alg}} \subseteq \Pi$ と表す. Π^{alg} は G の作用で安定である.

ここでは, 定理 2.9 (2) の左辺に現れる G の位相的絶対既約 non-oridanry 表現 $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ に対する Π^{alg} の構造について解説する. Π^{an} の場合と大きく異なり, Π^{alg} は対応する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の表現の p 進 Hodge 理論的な性質を強く反映し, (古典的な) 局所 Langlands 対応を用いて記述することができる.

まずは, G に対する局所 Langlands 対応を復習することから始めたい. K を標数ゼロの体とする. 幾何的 Frobenius で生成される $G_{\mathbb{F}_p}$ の部分群の自然な射 $G_{\mathbb{Q}_p} \to G_{\mathbb{F}_p}$ による逆像として定義される $G_{\mathbb{Q}_p}$ の部分群を $\mathbb{Q}_p$ の Weil 群といい記号 $W_{\mathbb{Q}_p}$ で表す. 位相群 $W_{\mathbb{Q}_p}$ の K 上の有限次元 smooth 表現 (r, M)(つまり, M は有限次元 K ベクトル空間で (M には離散位相を入れて)K 線形な連続作用 $r : W_{\mathbb{Q}_p} \times M \to M : (\sigma, m) \mapsto r(\sigma)(m)$ を持つもの) と K 線形冪零な作用素 $N : M \to M$ の組 $M = ((r, M), N)$ で, 任意の $\sigma \in W_{\mathbb{Q}_p}$ に対し $Nr(\sigma) = p^{v(\sigma)} r(\sigma) N$ を満たすものを $W_{\mathbb{Q}_p}$ の K 上の Weil-Deligne 表現という. ここで, $v(-)$ は $v : W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \xrightarrow{\mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p}^{-1}} \mathbb{Q}_p^{\times} \xrightarrow{v_p} \mathbb{Z}$ で定義される準同型とする. $W_{\mathbb{Q}_p}$ の K 上の表現として (r, M) が半単純となるとき $M = ((r, M), N)$ は Frobenius 半単純であるという.

K は代数閉体であるとする. このとき, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の局所 Langlands 対応により次の同型類の集合 (記号 $\{-\}_{/\sim}$ で $\{-\}$ の同型類の集合を表すとする) の間の全単射が存在する.

$$\{W_{\mathbb{Q}_p} \text{の } K \text{ 上の Frobenius 半単純な 2 次元 Weil-Deligne 表現}\}_{/\sim}$$
$$\xrightarrow{\sim} \{G \text{ の } K \text{ 上の既約許容的 smooth 表現}\}_{/\sim} : M \mapsto \pi_p(M)$$

この全単射には目的に応じて様々な正規化の取り方がある. 本稿では, 任意の Frobenius 半単純な 2 次元 Weil-Deligne 表現 M に対して等式 $\det_K M = \delta_{\pi_p(M)} \cdot |-|$ (ここで, $\delta_{\pi_p(M)}$ は $\pi_p(M)$ の中心指標, $|-| : \mathbb{Q}_p^{\times} \to K^{\times}$ は $|p| := 1/p$ を満たす $\mathbb{Q}_p$ のノルム $|-| : \mathbb{Q}_p^{\times} \to \mathbb{Q}^{\times}$ と自然な埋め込み $\mathbb{Q}^{\times} \hookrightarrow K^{\times}$ の合成) を満たす唯一の正規化 (Tate の正規化と呼ばれる) を取る.

p 進局所 Langlands 対応との整合性を述べるためには, 生成的局所 Langlands 対応と呼ばれる次の定義が必要である.

定義 2.17. $W_{\mathbb{Q}_p}$ の K 上の Frobenius 半単純な 2 次元 Weil-Deligne 表現 M に対して, G の K 上の (一般には既約ではない) 許容的 smooth 表現 $\pi_p^{\mathrm{m}}(M)$ を次のように定義する.

(1) 局所定数な準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^{\times} \to K^{\times}$ があり, $\pi_p(M) = \delta \circ \det$ となるとき, $\pi_p^{\mathrm{m}}(M) := \mathrm{Ind}_B^G(\delta|-| \otimes \delta|-|^{-1})_{\mathrm{sm}}$.

(2) $\dim_K \pi_p(M) = \infty$ のとき, $\pi_p^{\mathrm{m}}(M) := \pi_p(M)$.

(1) となるのは $(r, M) = \delta \oplus \delta|-|$, $N = 0$ となることと同値である. このとき, $\mathrm{St} := \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1})_{\mathrm{sm}}/(K \cdot \mathbf{1}_G)$ (ここで $\mathbf{1}$ は自明な準同型, $\mathbf{1}_G : G \to K$ は $\mathbf{1}_G(g) = 1$ となる定数関数) とおくと分裂しない完全列

$$0 \to \mathrm{St} \otimes (\delta \circ \det) \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta|-| \otimes \delta|-|^{-1})_{\mathrm{sm}} \to \delta \circ \det \to 0$$

が存在する.

次に, V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約 2 次元 de Rham L 表現とする. V の Hodge-Tate 重みを $\{a, b\}$ $(a \geqq b)$ とおく. Berger の定理により de Rham 表現は潜在的準安定なので, Fontaine の方法 ([Fo94]) によって $W_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の 2 次元 Weil-Deligne 表現 $D_{\mathrm{pst}}(V)$ を定義することが出来る. L の代数閉包 $\overline{L}$ を一つ固定すると $D_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_L \overline{L}$ の Frobenius 半単純化 $(D_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_L \overline{L})^{\mathrm{ss}}$ もまた L 上定義されている. そこで, この L 上のモデルを $D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{ss}}$ と表す (つまり $D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{ss}}$ は $W_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の Weil-Deligne 表現で $D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{ss}} \otimes_L \overline{L} \xrightarrow{\sim} (D_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_L \overline{L})^{\mathrm{ss}}$ となるものとする). Tate の正規化の下では局所 Langlands 対応により定まる $\overline{L}$ 上の $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現 $\pi_p((D_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_L \overline{L})^{\mathrm{ss}})$ 及び $\pi_p^{\mathrm{m}}((D_{\mathrm{pst}}(V) \otimes_L \overline{L})^{\mathrm{ss}})$ もまた L 上定義されていることが知られている. そこで, これらの L 上のモデルをそれぞれ $\pi_p(D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{ss}}), \pi_p^{\mathrm{m}}(D_{\mathrm{pst}}(V)^{\mathrm{ss}})$ と表す.

定理 2.18. 位相的絶対既約 non-ordinary な $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ に対して次が成立する.

(1) 次は同値.

 (i) $\Pi^{\mathrm{alg}} \neq 0$.

 (ii) $V(\Pi)$ は de Rham 表現であり, 相異なる Hodge-Tate 重み $\{a, b\}$ $(a > b)$ を持つ.

(2) (1) の同値な条件が成立するとき $L[G]$ 加群の同型

$$\Pi^{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\sim} \pi_p^{\mathrm{m}}(D_{\mathrm{pst}}(V(\Pi))^{\mathrm{ss}}) \otimes_L \mathrm{Sym}^{a-b-1} L^2 \otimes_L \det{}^b =: \pi^{\mathrm{alg}}(V)$$

が存在する.

注意 2.19. 紙数の関係で, 本稿ではこの定理の証明については解説しない. (1) の (i) ならば (ii) となることは [Co10d]Proposition VI.5.1, Théorème VI.6.13 で証明されている. (ii) ならば (i) となることは [Co10d] Théorème VI.6.18 で証明されている. (1) に関しては [Do12]Théorème 5.8 による別証明もある. (2) は $V(\Pi)$ が de Rham 表現かつ三角表現 (trianguline 表現) となるとき (これは $\pi_p(D_{\mathrm{pst}}(V(\Pi))^{\mathrm{ss}})$ が non-supercuspidal であることと同値) は [Co10d]Théorème VI.6.50 で証明されている. $V(\Pi)$ が de Rham 表現であって三角表現ではないとき (これは $\pi_p(D_{\mathrm{pst}}(V(\Pi))^{\mathrm{ss}})$ が supercuspidal となることと同値) は [Em11] Theorem 3.3.22 で Langlands 対応における大域 p 進整合性の応用とし

て大域的な手法 (モジュラー曲線の完備コホモロジーを用いる) によって証明されている. Emerton による Langlands 対応における大域 p 進整合性及び [Em11] Theorem 3.3.22 の証明については [今井] を参照されたい.

§ 3. Colmez の理論 1 : (φ, Γ)-加群から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の構成

§3 と §4 では $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の理論において最も重要な Colmez の理論 [Co10d] を解説する. Colmez の理論の基本的なアイデアは, Fontaine による $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進 Galois 表現とエタール (φ, Γ)-加群の圏同値の存在を背景として, エタール (φ, Γ)-加群と G の表現との対応を直接構成するというものである. §3 では エタール (φ, Γ)-加群から G の表現を構成する方法を解説し, §4 では G の表現からエタール (φ, Γ)-加群を構成する方法について解説する.

まず, この理論では p 進体係数だけではなく位数 p ベキの捻れ係数や p 進整数係数の表現も考える必要がある. 長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群で連続 $\mathcal{O}$ 線形な $G_{\mathbb{Q}_p}$ 作用を持つもののなす圏を $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ と表し, 有限生成自由 $\mathcal{O}$ 加群で連続 $\mathcal{O}$ 線形な $G_{\mathbb{Q}_p}$ 作用を持つもののなす圏を $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ と表す (これらの圏の射は $G_{\mathbb{Q}_p}$ 作用を保つ $\mathcal{O}$ 線形写像). これらの表現に対応する G の表現を次で定義する.

定義 3.1.

(1) $\mathcal{O}$ 線形 smooth な G 作用を持つ捻れ $\mathcal{O}$ 加群 π で許容的 (つまり G の任意の開部分群 H に対して π^H は長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となる) かつ中心指標を持ち (つまり連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ が存在し, 任意の $v \in \pi$, $a \in \mathbb{Q}_p^\times$ に対して $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} v = \delta(a)v$ が成り立つ), さらに $\mathcal{O}[G]$ 加群として長さ有限となるものからなる圏を $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ と表す.

(2) $\mathcal{O}$ 加群として平坦かつ p 進完備分離的となる $\mathcal{O}[G]$ 加群 π で, 任意の $n \geqq 1$ に対して $\pi \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ となるものからなる圏を $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ と表す.

§ 3.1. エタール (φ, Γ)-加群の理論

まずは, Fontaine [Fo91] による $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現とエタール (φ, Γ)-加群の圏同値について復習することから始めたい. Fontaine の理論は任意の p 進体について成り立つものであるが, 本稿では $\mathbb{Q}_p$ の場合しか必要ないので, 以下この場合のみを考える. 各 $n \geqq 1$ に対して $\mu_{p^n} \subseteq \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ を 1 の p^n 乗根のなす群とし $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n}$ とする. 各 $n \geqq 1$ に対して $\mathbb{Q}_{p,n} := \mathbb{Q}_p(\mu_{p^n})$ とし $\mathbb{Q}_{p,\infty} := \cup_{n \geq 1} \mathbb{Q}_{p,n}$ とおく. $\Gamma := \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_{p,\infty}/\mathbb{Q}_p)$, $H_{\mathbb{Q}_p} := \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_{p,\infty})$ とおく. p 進円分指標 χ は同型 $\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ を誘導する. 各 $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ に対して $\sigma_a := \chi^{-1}(a) \in \Gamma$ と定義する.

$\mathcal{O}$ 代数 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} := \{\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n T^n | a_n \in \mathcal{O}, a_{-n} \to 0 (n \to \infty)\}$ で定義し, その部分環 $\mathcal{O}[[T]]$ を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ で表す. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ は極大イデアルが (ϖ) で剰余体が $k((T))$ となる完備離散付値

環になる. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ には $\{T^k\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+ + p^l\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\}_{k,l\geqq 1}$ をゼロの開近傍系とする位相環の構造を入れる. この位相から $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ に誘導される位相は (T,p) 進位相と一致し, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ は $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ のコンパクトな部分環になる. p を可逆にした環をそれぞれ $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p], \mathcal{E}^+ := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+[1/p]$ とおく. 連続 L 代数準同型 $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ を $\varphi(T) := (1+T)^p - 1$ で定義し, Γ の位相的 L 代数 $\mathcal{E}$ への連続作用を $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(T) := (1+T)^{\chi(\gamma)} - 1$ で定義する. これらの作用は部分環 $\mathcal{E}^+$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ を保つ. $\mathcal{E}_0$ を $\mathcal{E}, \mathcal{E}^+, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ のいずれかの環とし, M を $\mathcal{E}_0$ 加群とする. このとき, M の $\varphi : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0$ による底変換 $M \otimes_{\mathcal{E}_0,\varphi} \mathcal{E}_0$ を $\varphi^*(M)$ と表す.

定義 3.2.

(1) Frobenius 構造と呼ばれる $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 線形同型 $\varphi^*(D) \xrightarrow{\sim} D$ が与えられた有限生成 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群 D を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール φ 加群という. Frobenius 構造によって定まる半線形写像 $D \xrightarrow{x\mapsto x\otimes 1} \varphi^*(D) \xrightarrow{\sim} D$ を同じ記号 φ で表す. ここで, 半線形とは任意の $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $x \in D$ に対して $\varphi(fx) = \varphi(f)\varphi(x)$ を満たすことである.

(2) Frobenius 構造と可換な連続半線形作用 $\Gamma \times D \to D : (\gamma, x) \mapsto \gamma(x)$ が与えられた $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール φ 加群 D を, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群という. ここで, Frobenius 構造と可換とは任意の $\gamma \in \Gamma$, $x \in D$ に対して $\varphi(\gamma(x)) = \gamma(\varphi(x))$ を満たすことであり, 半線形とは任意の $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, $x \in D$, $\gamma \in \Gamma$ に対して $\gamma(fx) = \gamma(f)\gamma(x)$ を満たすことである.

(3) $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群として有限生成自由な $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群 (resp. エタール φ 加群)D_0 があり, $D = D_0 \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{E}$ と書ける (φ,Γ)-作用 (resp. φ 作用) を持つ $\mathcal{E}$ 上の有限次元ベクトル空間 D を $\mathcal{E}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群 (resp. エタール φ 加群) という.

$\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群として捻れ $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群となる $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群からなる圏を $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ と表す. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-加群としては有限生成自由な $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群からなる圏を $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ と表す. $\mathcal{E}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群の圏を $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ と表す. 同様に, エタール φ 加群の圏をそれぞれ $\Phi^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}, \Phi^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}, \Phi^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ と表す. 簡単のため, (φ,Γ)-加群 (または φ 加群) と言うときは, これらいずれかのタイプのエタール (φ,Γ)-加群 (またはエタール φ 加群) を指すこととする.

Fontaine は次の圏同値を構成した ([Fo91]).

定理 3.3. 各 $* = tors, \mathcal{O}, L$ に対して, それぞれ $** = tors, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E}$ とおく. このとき, テンソル積及び双対を取る操作と可換な完全圏の圏同値

$$D : \mathrm{Rep}_*(G_{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{\sim} \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{**}$$

が存在する.

注意 3.4. 関手 D は次のように構成される. p 乗写像 $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p \xrightarrow{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p$ による射影極限 $\varprojlim_{x\mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbb{C}_p}/p$ を $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ と表し, その商体を $\widetilde{\mathbf{E}}$ と表す. 完全体 $\widetilde{\mathbf{E}}$ は代数閉体であることが知られている ([Fo91]). $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底 $\zeta = (\zeta_{p^n})_{n\geqq 0}$ を一つ固定し, $\bar{\zeta} :=$

$(\zeta_{p^n} \bmod p)_{n\geq 0} \in \widetilde{\mathbf{E}}$ とする．部分体 $\mathbb{F}_p((\bar{\zeta}-1)) \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}$ の分離閉包を $\mathbb{F}_p((\bar{\zeta}-1))^{\mathrm{sep}} \subseteq \widetilde{\mathbf{E}}$ と表す．このとき, Fontaine-Wintenberger のノルム体の理論 ([FW79], [Wi83]) により, 標準的な同型 $H_{\mathbb{Q}_p} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_p((\bar{\zeta}-1))^{\mathrm{sep}}/\mathbb{F}_p((\bar{\zeta}-1)))$ が存在する．$\widetilde{\mathbf{E}}$ の Witt 環を $W(\widetilde{\mathbf{E}})$ と表し, Teichmüller 持ち上げを $[-] : \widetilde{\mathbf{E}} \to W(\widetilde{\mathbf{E}})$ と表す．$(\varphi, G_{\mathbb{Q}_p})$ 作用で安定な部分環 $\mathbb{Z}_p[[[\bar{\zeta}]-1]][\frac{1}{[\bar{\zeta}]-1}] \subseteq W(\widetilde{\mathbf{E}})$ の p 進完備化を $\mathbb{Z}_p[[[\bar{\zeta}]-1]][\frac{1}{[\bar{\zeta}]-1}]^\wedge$ と表し, それの最大不分岐拡大を $\mathbf{A} \subseteq W(\widetilde{\mathbf{E}})$ と表すと, 最大不分岐拡大の一意性から $\mathbf{A}$ も $(\varphi, G_{\mathbb{Q}_p})$ 作用で安定となり, ノルム体の理論の帰結として $\mathbf{A}^{H_{\mathbb{Q}_p}} = \mathbb{Z}_p[[[\bar{\zeta}]-1]][\frac{1}{[\bar{\zeta}]-1}]^\wedge$ を満たす．固定した基底 ζ に対して, (φ, Γ) 同変な位相的 $\mathcal{O}$ 代数の同型 $\left(\mathbb{Z}_p[[[\bar{\zeta}]-1]][\frac{1}{[\bar{\zeta}]-1}]^\wedge\right) \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を $([\bar{\zeta}]-1) \otimes 1 \mapsto T$ によって定義し, これにより両者を同一視する．以上のもとで, 定理 3.3 の関手は $D(V) := (V \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbf{A})^{H_{\mathbb{Q}_p}}$ と定義され, 逆関手 $V : \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{**} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_*(G_{\mathbb{Q}_p})$ は $V(D) := (D \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} (\mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}))^{\varphi=1}$ で定義される ([Fo91]).

(φ, Γ)-加群 $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ (resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$) に対して, その双対 (φ, Γ)-加群 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(D, \mathcal{E}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ (resp. $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(D, \mathcal{O}_{\mathcal{E}})$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(D, \mathcal{E})$) を D^* と表す.

各整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して $\mathcal{O}$ 係数の Tate 捻り $\mathcal{O}(n) := \mathcal{O} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)^{\otimes n}$ に対応する (φ, Γ)-加群は $D(\mathcal{O}(n)) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(n)$ となる (ここで φ は $\varphi \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{Z}_p(n)}$ と作用し, $\gamma \in \Gamma$ は $\gamma \otimes \gamma$ で作用する)．$D(n) := D \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D(\mathcal{O}(n))$ と定義し D の Tate 双対 $D^*(1)$ を $D^\vee$ と表す．より一般に, 連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ に対して $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\delta) := \mathcal{O}_{\mathcal{E}}\mathbf{e}_\delta \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ を $\varphi(\mathbf{e}_\delta) := \delta(p)\mathbf{e}_\delta$, $\gamma(\mathbf{e}_\delta) = \delta(\chi(\gamma))\mathbf{e}_\delta$ $(\gamma \in \Gamma)$ で定義する．このとき, 任意の連続準同型 $\tilde{\delta} : G^{\mathrm{ab}}_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{O}^\times$ に対して同型 $D(\mathcal{O}(\tilde{\delta})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\tilde{\delta} \circ \mathrm{rec}_{\mathbb{Q}_p})$ が成り立つ．各 D, δ に対して $D(\delta) := D \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(\delta)$ と定義する.

次に, (φ, Γ)-加群及び φ 加群の理論において重要な φ の左逆作用素 $\psi : D \to D$ の定義を復習する．まず, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ を φ によって $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群とみなしたものは階数 p の自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群である, より正確には直和分解 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \bigoplus_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ を持つことが知られている．D を任意の φ 加群とする．このとき, この直和分解と Frobenius 構造 $\varphi^*(D) \xrightarrow{\sim} D$ から同様の直和分解 $D = \bigoplus_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(D)$ を得る.

定義 3.5. $\psi : D \to D$ を $x = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i) \in D$ に対して $\psi(x) := x_0$ によって定義する.

定義より ψ は $\mathcal{O}$ 線形写像であり, $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_D$ を満たす．特に ψ は全射である．また, D が (φ, Γ)-加群の場合は ψ は Γ の作用と可換である．さらに, 自明な (φ, Γ)-加群 $\mathcal{E}$ に対して ψ は部分環 $\mathcal{E}^+$ を保ちかつ全射となる (つまり $\psi(\mathcal{E}^+) = \mathcal{E}^+$ が成り立つ).

§ 3.2. (φ, Γ)-加群から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現の構成

(φ, Γ)-加群から G の表現を構成するための基本的なアイデアは, (φ, Γ) 加群の持つ様々な作用 (φ 作用, ψ 作用, $\Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ 作用, T 倍作用など) を G の元や G の表現に付随する自然な作用などと具体的に対応させることである．この対応関係は, 次に解説する p 進 Fourier 変換の理論を用いて, 自明な (φ, Γ)-加群 $\mathcal{E}$ を $\mathbb{Z}_p$ 上の連続関数のなす空間 (とその双対) によって記述することで自然に得られるものである.

3.2.1. p 進 Fourier 変換:Amice 変換と Colmez 変換 $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ を $\mathbb{Z}_p$ から L への連続写像全体のなす L 上のベクトル空間とする. $\mathbb{Z}_p$ はコンパクトなので $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して $|f| := \sup_{x\in\mathbb{Z}_p}|f(x)|$ と定義することで $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ は L 上の Banach 空間となる. 各 $n \geqq 0$ に対して $\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} := \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ と定義すると集合 $\left\{\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}\right\}_{n\geqq 0}$ は L 上の Banach 空間 $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ の正規直交基底になる. つまり, 任意の $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して $a_n(f) \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{a_n(f)\}_{n\geqq 0} \in L^{\mathbb{N}}$ で $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(f)\begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix}$(Mahler 展開と呼ばれる) となるものが唯一つ存在し, さらにこのとき $|f| = \sup_{n\geqq 0}|a_n(f)|$ となる. $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ から L への連続 L 線形写像のなす空間を $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) := \mathrm{Hom}_L^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L), L)$ と表す. $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ 上には弱位相 (各点収束位相) を入れる, つまり $\{\mu_n\}_{n\geqq 0} \subseteq \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ が $\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に収束することを任意の $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して $\mu_n(h)$ が $\mu(h)$ に収束することと定義する. これにより $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ は局所コンパクトな L 上の位相ベクトル空間となる. 各 $\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ と $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して $\int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\mu(x) := \mu(h)$ と表す.

これらの L 上の位相ベクトル空間を $\mathcal{E}$ と関係付けるために連続 L 線形写像 (留数写像) を次で定義する.

$$\mathrm{res} : \mathcal{E}dT := \mathcal{E} \otimes_L LdT \to L : \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n dT \mapsto a_{-1}.$$

次の命題の (1) は Mahler 展開の存在から直ちに従い, (2) は [Co10d]Théorème I.1.4 (ii) で証明されている.

命題 3.6.

(1) (Amice 変換) 各 $\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して

$$f_\mu(T) := \int_{\mathbb{Z}_p} (1+T)^x \mu(x) := \sum_{n\geqq 0} \int_{\mathbb{Z}_p} \begin{pmatrix} x \\ n \end{pmatrix} \mu(x) \cdot T^n \in L[[T]]$$

と定義すると $f_\mu(T) \in \mathcal{E}^+$ であり, この対応は L 上の位相ベクトル空間の同型

$$\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^+ : \mu \mapsto f_\mu(T)$$

を与える.

(2) (Colmez 変換) $f \in \mathcal{E}$ に対して写像 $\mathrm{Col}(f) : \mathbb{Z}_p \to L$ を

$$\mathrm{Col}(f)(x) := \mathrm{res}\left((1+T)^x f \frac{dT}{1+T}\right) \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

で定義すると $\mathrm{Col}(f) \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ であり, この対応は L 上の位相ベクトル空間の同型

$$\mathcal{E}/\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L) : [f] \mapsto \mathrm{Col}(f)$$

を与える. ここで $[f]$ は $f \in \mathcal{E}$ の同値類を表すとする.

この命題により, 特に L 上の位相ベクトル空間の完全列

$$0 \to \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \to \mathcal{E} \to \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L) \to 0$$

が存在する. より強く, 自然な全射 $\mathcal{E} \to \mathcal{E}/\mathcal{E}^+$ の L 上の位相ベクトル空間としての切断 $\mathcal{E}/\mathcal{E}^+ \to \mathcal{E} : \overline{\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n} \mapsto \sum_{n\leqq -1} a_n T^n$ が存在するので, この完全列は分裂する. これより, L 上の位相的ベクトル空間としての $\mathcal{E}$ は L 上の Banach 空間 $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ とその連続双対 $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ の両方の情報を含むものになっていることが分かる. 我々の目的のためには, これらの対応関係によって $\mathcal{E}$ 上の様々な作用が $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ 及び $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ でどのように記述されるかを見ることが重要である.

まず, 命題 (1) の同型 $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^+ : \mu \mapsto f_\mu(T)$ によって右辺の (φ, ψ, Γ)-作用及び T 倍作用を左辺に移す (例えば, $\varphi(\mu)$ は $f_{\mu'}(T) = \varphi(f_\mu(T))$ を満たす唯一の $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ の元 μ' と定義する) とこれらの作用は以下で定義される作用となる. 各 $\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して $\varphi(\mu), \psi(\mu)$, $\sigma_a(\mu)$ $(a \in \mathbb{Z}_p^\times)$, $(1+T)\mu$ は $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対してそれぞれ

$$\int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\varphi(\mu)(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} h(px)\mu(x), \int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\sigma_a(\mu)(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} h(ax)\mu(x)\ (a \in \mathbb{Z}_p^\times),$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\psi(\mu)(x) = \int_{p\mathbb{Z}_p} h(\frac{x}{p})\mu(x), \int_{\mathbb{Z}_p} h(x)((1+T)\mu)(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} h(x+1)\mu(x)$$

を満たすものとして定義される. 同様に, 同型 $\mathcal{E}/\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L) : f \mapsto \mathrm{Col}(f)$ によって左辺の作用を右辺に移したものを考える. この場合, 各 $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して $\varphi(h), \psi(h)$, $\sigma_a(h)$ $(a \in \mathbb{Z}_p^\times)$, $(1+T)h$ は, $x \in \mathbb{Z}_p$ に対してそれぞれ

$$\varphi(h)(x) := \begin{cases} h(\frac{x}{p}) & (x \in p\mathbb{Z}_p) \\ 0 & (x \in \mathbb{Z}_p^\times) \end{cases},\ \sigma_a(h)(x) := \frac{1}{a}h(\frac{x}{a}),$$

$$\psi(h)(x) := h(px),\ \ ((1+T)h)(x) := h(x+1)$$

を満たすものとして定義される.

3.2.2. P^+ **加群** $D \boxtimes \mathbb{Z}_p$ $P^+ := \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. $\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ と $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P^+$ に対して $g\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ を

$$\int_{\mathbb{Z}_p} h(x)g\mu(x) := \int_{\mathbb{Z}_p} h(ax+b)\mu(x)$$

で定義すると $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ は P^+ 加群となる. この作用と §3.2.1 で定義した φ などの作用を見比べると次の等式が成り立つ.

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mu = \varphi(\mu),\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mu = \sigma_a(\mu)\ (a \in \mathbb{Z}_p^\times), \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mu = (1+T)^b\mu\ (b \in \mathbb{Z}_p).$$

また, $\mathbb{Z}_p$ の任意の開集合 U に対して制限写像 $\mathrm{Res}_U : \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \to \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ を

$$\int_{\mathbb{Z}_p} h(x)\mathrm{Res}_U(\mu)(x) := \int_U h(x)\mu(x)$$

で定義することができるが, 開集合が $i + p^n\mathbb{Z}_p$ $(i \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{Z}_{\geqq 0})$ の形の場合は等式

$$\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbb{Z}_p}(\mu) = (1+T)^i\varphi^n\psi^n((1+T)^{-i}\mu)$$

が成り立つことが容易にチェックできる. 以上の考察に基づき, $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して定まるこれらの自然な作用を一般のエタール (φ, Γ)-加群 D の場合に次のようにして拡張する.

定義 3.7. D をエタール (φ, Γ)-加群とする.

(1) 各 $x \in D$ に対して

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \varphi(x),\ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = \sigma_a(x)\ (a \in \mathbb{Z}_p^\times), \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = (1+T)^b x\ (b \in \mathbb{Z}_p)$$

と定めると, この作用は D に位相モノイド P^+ の連続 $\mathcal{O}$ 線形作用を定める. D をこの作用で位相的 P^+ 加群とみなしたものを $D \boxtimes \mathbb{Z}_p$ で表す.

(2) U を $\mathbb{Z}_p$ のコンパクト開集合とする. 十分大きな $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$ に対して, $i \in U$ ならば $i + p^n\mathbb{Z}_p \subseteq U$ となり, $U = \bigsqcup_{i \in \mathbb{Z}_p (\mathrm{mod}\ p^n\mathbb{Z}_p), i \in U}(i + p^n\mathbb{Z}_p)$ となる. このような n を取り, D の部分 $\mathcal{O}$ 加群 $D \boxtimes U$ を

$$D \boxtimes U := \sum_{i \in \mathbb{Z}_p (\mathrm{mod}\ p^n\mathbb{Z}_p), i \in U} (1+T)^i\varphi^n(D) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_p (\mathrm{mod}\ p^n\mathbb{Z}_p), i \in U} (1+T)^i\varphi^n(D)$$

で定義し (和は直和となる), U への制限写像 $\mathrm{Res}_U : D \boxtimes \mathbb{Z}_p \to D \boxtimes U$ を

$$\mathrm{Res}_U(x) := \sum_{i \in \mathbb{Z}_p (\mathrm{mod}\ p^n\mathbb{Z}_p), i \in U} (1+T)^i\varphi^n\psi^n((1+T)^{-i}x)$$

で定義する (これは, 十分大きな $n \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$ 及び $i + p^n\mathbb{Z}_p$ の代表元 $i \in \mathbb{Z}_p$ の取り方によらない). $D \boxtimes U$ を $D \boxtimes \mathbb{Z}_p$ の U 上の切断と呼ぶ.

$\mathbb{Z}_p$ 以外のコンパクト開集合 U として今後重要になるのは $U = \mathbb{Z}_p^\times$ の場合である. この場合は $D \boxtimes \mathbb{Z}_p^\times = \oplus_{1 \leqq i \leqq p-1}(1+T)^i\varphi(D) = D^{\psi=0}$ となり $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(x) = (1 - \varphi\psi)x$ となる.

各元 $g \in P^+$ の $D \boxtimes \mathbb{Z}_p$ への作用は各コンパクト開集合 $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ に対して同型 $g : D \boxtimes U \xrightarrow{\sim} D \boxtimes gU$ を誘導する. つまり, 対応 $U \subseteq \mathbb{Z}_p \to D \boxtimes U$ は $\mathbb{Z}_p$ への P^+ の作用と両立する.

3.2.3. G 加群 $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ と B 加群 $D \boxtimes_\delta \mathbb{Q}_p$ の定義

Colmez による (φ,Γ)-加群から G の表現の構成の最初のステップは, $\mathbb{Z}_p$ 上への P^+ の作用と両立する対応 $U\subseteq\mathbb{Z}_p\mapsto D\boxtimes U$ を $\mathbf{P}^1:=\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ 上の G 同変層に拡張することである. ここで, G は $\mathbf{P}^1$ に一次分数変換 $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}z:=\dfrac{az+b}{cz+d}$ $\left(\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G, z\in\mathbf{P}^1\right)$ で作用しているとし, $\mathcal{F}$ が $\mathbf{P}^1$ 上の G 同変層であるとは位相空間 $\mathbf{P}^1$ 上の位相的 $\mathcal{O}$ 加群の層 $\mathcal{F}$ で任意の $g,g'\in G$ に対して $(gg')_*=g_*g'_*$ を満たす G の連続 $\mathcal{O}$ 線形作用 (各開集合 $U\subseteq\mathbf{P}^1$ と $g\in G$ に対して)$g_*:\Gamma(U,\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\Gamma(gU,\mathcal{F})$ が与えられているものと定義する. 本稿では簡単のため, ($U\subseteq\mathbb{Z}_p$ に対する $D\boxtimes U$ 以外には)$\mathbf{P}^1$ 上の切断 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$(ここで δ は $\mathbb{Q}_p^\times$ の指標) と $\mathbb{Q}_p$ 上の切断 $D\boxtimes_\delta\mathbb{Q}_p$ の定義のみを解説する (応用上もこの 2 つで十分である).

まずは $\mathbf{P}^1$ 上の切断 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ とそれへの G 作用の定義から始めたい. $\mathbf{P}^1$ を 2 つの $\mathbb{Z}_p$ を $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の対合 (involution)$z\mapsto 1/z$ で張り合わせたものと思い, $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ を $\mathbb{Z}_p^\times$ 上で張り合う $D\boxtimes\mathbb{Z}_p$ の 2 つの元の組として定義する. このためには, 対合 $\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}\mathbb{Z}_p^\times: z\mapsto 1/z$ が $\mathbb{Z}_p^\times$ 上の切断に誘導する対合 $D\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}D\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ をどう定義するかが問題となる.

$\delta:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}^\times$ を連続準同型とする (より一般に, D が $A\in\mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ 上定義されている場合は連続準同型 $\delta:\mathbb{Q}_p^\times\to A^\times$ に対しても同様に以下の定義ができるが簡単のためこの場合のみを考える). このとき, $z\in D\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ に対して以下で定義される極限

$$w_\delta(z)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i\in\mathbb{Z}_p^\times\bmod p^n}\delta(i)(1+T)^{1/i}\sigma_{-1/i^2}\varphi^n\psi^n((1+T)^{-i}z)$$

は $D\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ に収束し対合 $w_\delta: D\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}D\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ を定める ([Co10d] Remarque II.1.3).

注意 3.8. D が (φ,ψ,Γ) 作用で安定な閉部分 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ 加群 D_0 を持つ場合, 定義から w_δ は $D_0\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times:=D_0^{\psi=0}$ の対合 $w_\delta: D_0\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}D_0\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ を誘導することが分かる. 例として, 自明な (φ,Γ)-加群 $\mathcal{E}$ の場合, 対合 w_δ は $\mathcal{E}\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ の閉部分 $L[\Gamma]$ 加群 $\mathcal{E}^+\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ を保つ. より具体的には, $\mu\in\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p^\times,L)=\mathcal{E}^+\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ に対して $w_\delta(\mu)\in\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p^\times,L)$ は等式

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times}h(x)w_\delta(\mu)(x)=\int_{\mathbb{Z}_p^\times}\delta(x)h(1/x)\mu(x)$$

を満たす.

この対合 w_δ を用いて, 位相的 $\mathcal{O}$ 加群 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ を次で定まる $D\times D$ の閉 $\mathcal{O}$ 加群 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ を

$$D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1:=\{(z_1,z_2)\in D\times D\,|\,\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z_1)=w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z_2))\}$$

と定義する.

注意 3.9. 関手的な位相同型 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\xrightarrow{\sim}D\oplus\varphi(D):(z_1,z_2)\mapsto(z_1,\mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(z_2))$ が存在する. $D\xrightarrow{\sim}\varphi(D):z\mapsto\varphi(z)$ は同型なので, これより特に関手 $D\mapsto D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ は (φ,Γ)-加群の圏から位相的 $\mathcal{O}$ 加群の圏への完全関手となることが分かる.

コンパクト開集合 $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ への制限写像を

$$\mathrm{Res}_U : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D \boxtimes U : (z_1, z_2) \mapsto \mathrm{Res}_U(z_1)$$

と定義し, U 上の切断の $\mathbf{P}^1$ 上への ($\mathbf{P}^1 \setminus U$ 上でゼロとする) 延長を

$$\iota_U : D \boxtimes U \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 : z \mapsto (z, w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z)))$$

で定義する.

次に $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ 上に G の作用を定義する ([Co10d] II. 1. [Do12] 3.1). 本稿では, G を生成する元 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Q}_p^\times), w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(b \in \mathbb{Z}_p^\times), \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(d \in p\mathbb{Z}_p)$ の作用の定義を解説する. まず, 元 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ と w の作用は $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ に対して

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} z := \delta(a) z, \ \ wz = (z_2, z_1)$$

と定義する. 特に, $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は中心指標 δ を持つ. これ以外の生成元の作用は各開集合 $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ に対して定義される射 $\iota_U : D \boxtimes U \hookrightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ 及び $\mathrm{Res}_U : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D \boxtimes U$ が P^+ 作用と整合する (つまり, $g \in P^+$, $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ に対して $g \circ \iota_U = \iota_{gU} \circ g, g \circ \mathrm{Res}_U = \mathrm{Res}_{gU} \circ g$ を満たす) ように次のようにして定義される ([Co10d] Théorème II.1.4).

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z := (\sigma_b(z_1), \delta(b)\sigma_{1/b}(z_2)), \ \ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z := (\varphi(z_1) + \delta(p) w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\psi(z_2))), \delta(p)\psi(z_2)).$$

最後に, $\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z := z'$ は

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z') = (1+T)^d z_1, \mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(wz') = u_d(\mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(z_2))$$

を満たす唯一の元 $z' \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ と定義する. ここで, $x \in \mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(D) = \varphi(D)$ に対して

$$u_d(x) := \delta^{-1}(1-d)(1+T)^{\frac{1}{d-1}} w_\delta((1+T)^{d(1-d)} \sigma_{(1-d)^2}(w_\delta((1+T)x)))$$

と定義される (この作用に関して, [Co10d] で与えられている定義には間違いがあり [Do12]3.1. で修正されている). この定義により $\iota_{\mathbb{Z}_p} : D \boxtimes \mathbb{Z}_p \hookrightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は P^+ 加群の射となる.

次に, $\mathbb{Q}_p$ 上の切断 $D \boxtimes_\delta \mathbb{Q}_p$ とそれへの B 作用を定義する. $P := \begin{pmatrix} \mathbb{Q}_p^\times & \mathbb{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とする. まずは, δ によらない P 加群 $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ を以下で定義し, B 加群 $D \boxtimes_\delta \mathbb{Q}_p$ は P 加群としては $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ で G の中心 Z の作用が δ で与えられるものと定義する. まず, P 加群 $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ の底空間を

$$D \boxtimes \mathbb{Q}_p := \varprojlim_{\psi} D := \{(x_n)_{n \geqq 0} \in D^{\mathbb{N}} |\ 任意の\ n\ に対して \psi(x_{n+1}) = x_n\}$$

と定義する．この定義は, 各 $n \geqq 0$ に対して同型 $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p : x \mapsto p^n x$ により $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p$ 上の切断を $\mathbb{Z}_p$ 上の切断 $D \boxtimes \mathbb{Z}_p$ と同一視し, $\mathbb{Q}_p$ 上の切断を $\frac{1}{p^n}\mathbb{Z}_p (n \geqq 0)$ 上の切断の貼り合わせとして定義したものである．P の生成元 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(a \in \mathbb{Z}_p^\times)$, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(b \in \mathbb{Q}_p)$ の作用を $x = (x_n)_{n \geqq 0} \in D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ に対して

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = (x_{n+1})_{n \geqq 0}, \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x = (\sigma_a(x_n))_{n \geqq 0}, \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x := (y_n)_{n \geqq 0}$$

で定義する．ここで, $p^n b \in \mathbb{Z}_p$ となる n に対しては $y_n := (1+T)^{p^n b} x_n$ と定義し, それ以外の n に対しては十分大きな m を取り $y_n := \psi(y_{n+m})$ と定義する．開集合 $U \subseteq \mathbb{Z}_p$ に対して U から $\mathbb{Q}_p$ へのゼロ延長を

$$\iota_U : D \boxtimes U \to D \boxtimes \mathbb{Q}_p : z \mapsto (z, \varphi(z), \varphi^2(z), \ldots)$$

と定義し, $\mathbb{Q}_p$ から U への制限写像を

$$\mathrm{Res}_U : D \boxtimes \mathbb{Q}_p \to D \boxtimes U : (x_n)_{n \geqq 0} \mapsto \mathrm{Res}_U(x_0)$$

と定義する．これらの射も P^+ の作用と整合的である．最後に, $\mathbf{P}^1$ から $\mathbb{Q}_p$ への制限写像を

$$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p} : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to D \boxtimes_\delta \mathbb{Q}_p : z \mapsto \left(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}\left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z\right)\right)_{n \geqq 0}$$

と定義する．これは B 同変となる．

3.2.4. 組 (D, δ) の G 整合性と G 加群 $\Pi_\delta(D)$ ここでは, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の理論において極めて重要な (組 (D, δ) に対して定義される)G 整合性という概念について解説し, G 整合性を満たす組 (D, δ) に対して p 進局所 Langlands 対応で D に対応すべき G の表現 $\Pi_\delta(D)$ を定義する．$\Pi_\delta(D)$ は位相的 G 加群 $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の商 G 加群として定義され, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ の場合は G の L 上のユニタリー Banach 表現となり, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ の場合は G の $\mathcal{O}$ 上の p 進完備な表現, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ の場合は G の捻れ $\mathcal{O}$ 加群上の smooth 表現となる．例えば $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ の場合, $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は L 上の位相的ベクトル空間としては $D \oplus D$ と同型であり, §3.2.1 からこれは L 上の Banach 空間と L 上の局所コンパクトな位相的ベクトル空間の直和になっていた．よって, $\Pi_\delta(D)$ を定義するためには $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ から L 上の局所コンパクトな位相的ベクトル空間の部分を G 作用を保つように取り出すことができるかということが問題となる．G 整合性という概念はこの問題に関する概念であり,

どのような組 (D,δ) が G 整合性を満たすかという問題は $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理 (定理 2.9) の証明において極めて重要な問題となる.

G 整合性の概念を解説するために, まずは特殊な例として自明な (φ,Γ)-加群 $\mathcal{E}$ と任意の連続準同型 $\delta:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}^\times$ からなる組 $(\mathcal{E},\delta)$ の場合を考えることから始めたい (§3.3 でも再びこの場合の例を扱う). この場合, $\mathcal{E}$ の閉部分 $\mathcal{E}^+\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)$ は (φ,ψ,Γ) 及び T 倍作用で安定なので, 注意 3.8 から対合 $w_\delta:\mathcal{E}\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ は対合 $w_\delta:\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ を誘導する. これにより, 商 $\mathcal{E}/\mathcal{E}^+\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)$ に対しても対合 $w_\delta:\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ が自然に誘導される. これらの対合と (φ,ψ,Γ) 及び T 倍作用を用いて, D の場合と同様に L 上の位相的 G 加群 $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ と $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ を定義することができ, 完全列 $0\to\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)\to\mathcal{E}\to\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\to 0$ から L 上の位相的 G 加群の完全列

$$0\to\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\to\mathcal{E}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\to\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\to 0$$

が得られる. これより, $\mathcal{E}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ の商で G の L 上のユニタリー Banach 表現となるもの $\Pi_\delta(\mathcal{E}):=\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ を得る (ここで, $h=(h_1,h_2)\in\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ に対して $|h|:=\max\{|h_1|,|h_2|\}$ とおけばこれが $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ 上の G 不変な Banach ノルムを与える). 以上の手順を一般の組 (D,δ) の場合に一般化したい. 一般のエタール (φ,Γ)-加群 D に対して, もし (φ,ψ,Γ)-作用及び T 倍作用で安定な (局所) コンパクト部分 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ 加群 $D_0\subseteq D$ で $D=D_0\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ となるものがあれば, $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p,L)$ の場合と同様にして G 加群 $D_0\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ が定義できる. しかし, 階数が 2 以上の D に対してはそのような D_0 はほとんどの場合に存在しない. そこで, (φ,ψ,Γ)-作用で安定という条件を緩めた次のものを考える必要がある.

定義 3.10. M を有限生成 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群とする. M のコンパクト部分 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ 加群 M_0 で $\mathrm{Im}(M_0\to M\otimes_{\mathcal{O}}k)$ が有限生成 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ 加群となり $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群として $M\otimes_{\mathcal{O}}k$ を生成するものを M の格子 (treillis) と呼ぶ. M が捻れ $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 加群の場合, M の格子は M の開部分加群となる.

次の定義, 及びそれに続く注意で説明する諸性質は [Co10b] II で証明されている.

定義 3.11. D をエタール (φ,Γ) 加群とする.

(1) $D^{++}:=\{z\in D\,|\,\varphi^n(z)\to 0\ (n\to\infty)\}$, $D^+:=\{z\in D|\,\{\varphi^n(z)\}_{n\geqq 0}$ は有界 $\}$, $D^{\mathrm{nr}}:=\cap_{n\geqq 0}\varphi^n(D)$ と定義する. このとき $D^{++}\oplus D^{\mathrm{nr}}=D^+$ である. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ のときは D^{++} 及び D^+ は D の格子になる. D が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群 (resp. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$) のとき, D^{nr} は $\mathcal{O}$ 上有限生成 (resp. 有限次元 L ベクトル空間) になる.

(2) D が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群のとき, D の格子からなる集合 $\{D_0\subseteq D\,|\,\psi(D_0)=D_0\}$ は空集合ではなく包含関係に関して最小元と最大元が存在する. 最小元を $D^\natural$ と表し, 最大元を $D^\sharp$ と表す. このとき, $D^+\subseteq D^\natural$ が成り立つ. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ のときは, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上

のエタール (φ,Γ) 加群 $D_0\subseteq D$ で $D_0\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}\mathcal{E}=D$ となるものを取り, $D^\natural:=D_0^\natural[1/p]$, $D^\sharp:=D_0^\sharp[1/p]$ と定義する. これらは D_0 の取り方によらない.

(φ,ψ) の作用と Γ の作用の可換性から, $D^?$ $(?=\mathrm{nr},++,+,\natural,\sharp)$ は Γ の作用を保つ.

注意 3.12.

(1) $D=\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ のとき $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ の 2 つの定義は一致し, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{++}=T\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+=\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^\natural$, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^\sharp=\frac{1}{T}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ となる.

(2) $?=\mathrm{nr},++,+,\natural,\sharp$ とする. 対応 $D\mapsto D^?$ は関手となる (つまり (φ,Γ) 加群の任意の射 $f:D_1\to D_2$ は $f(D_1^?)\subseteq D_2^?$ を満たす).

(3) $?=\natural,\sharp$ とする. $D_1\to D_2$ が全射ならば $D_1^?\to D_2^?$ も全射となる. 特に $D\in\Phi\Gamma_{\mathcal{O}}^{\mathrm{et}}$ のとき, 各 $n\geqq 1$ に対して自然な射 $D^?/\varpi^nD^?\to(D\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n)^?$ は全射である. この射は一般には同型ではないが, この射の射影極限は同型 $D^?\xrightarrow{\sim}\varprojlim_n(D\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n)^?$ を導く. D が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群のとき $D^\sharp/D^\natural$ は有限生成 $\mathcal{O}$ 加群となり, $D\in\Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ のとき $D^\sharp/D^\natural$ は有限次元 L ベクトル空間となる. これより $D^\sharp/D^\natural$ には ψ が同型で作用することが分かる.

(4) エタール (φ,Γ)-加群 D に対して, 自然な同型 $D^{\mathrm{nr}}\xrightarrow{\sim}(V(D)\otimes_{\mathbb{Z}_p}W(\overline{\mathbb{F}}_p))^{H_{\mathbb{Q}_p}}$ が存在する. $H_{\mathbb{Q}_p}$ の閉正規部分群 $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}})$ を $H'_{\mathbb{Q}_p}$ と表し, $V(D)^{\mathrm{ab}}:=V(D)^{H'_{\mathbb{Q}_p}}$ とおく. 自然な同型 $H_{\mathbb{Q}_p}/H'_{\mathbb{Q}_p}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p^{\mathrm{ab}}/\mathbb{Q}_{p,\infty})\xrightarrow{\sim}G_{\mathbb{F}_p}(:=\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{F}}_p/\mathbb{F}_p))$ によって, $V(D)^{\mathrm{ab}}$ を $G_{\mathbb{F}_p}$ 加群とみなすことで, 同型 $D^{\mathrm{nr}}\xrightarrow{\sim}(V(D)^{\mathrm{ab}}\otimes_{\mathbb{Z}_p}W(\overline{\mathbb{F}}_p))^{G_{\mathbb{F}_p}}$ を得る. 任意の $V\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G_{\mathbb{F}_p})$ (resp. $V\in\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{F}_p})$, $V\in\mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{F}_p})$) に対して, $D(V)_{\mathbb{F}_p}:=(V\otimes_{\mathbb{Z}_p}W(\overline{\mathbb{F}}_p))^{G_{\mathbb{F}_p}}$ とおくと, $\mathrm{length}_{\mathcal{O}}V=\mathrm{length}_{\mathcal{O}}D(V)_{\mathbb{F}_p}$ (resp. $\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}V=\mathrm{rank}_{\mathcal{O}}D(V)_{\mathbb{F}_p}$, $\dim_LV=\dim_LD(V)_{\mathbb{F}_p}$) が成り立つので, 以上の議論から D^{nr} の $\mathcal{O}$ 加群としての長さや階数, または L 上の次元は $V(D)^{\mathrm{ab}}$ のそれに等しいことが分かる. 特に, D が $\mathcal{E}$ 上または $k_{\mathcal{E}}:=\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\otimes_{\mathcal{O}}k$ 上の階数 2 以上の既約エタール (φ,Γ) 加群のときは, $V(D)^{\mathrm{ab}}=0$ となるので, $D^{\mathrm{nr}}=0$ が成り立つ.

$D^\vee$ を D の Tate 双対とする. パラメータ $T\in\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ に対応する $\mathbb{Z}_p(1)$ の基底を ζ とし (注意 3.4), これを記号で $\frac{dT}{1+T}$ と表す. 以下, この記号を用いて $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)=\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\frac{dT}{1+T}$ とみなす ($\frac{dT}{1+T}$ への (φ,Γ)-作用は $\varphi(\frac{dT}{1+T}):=\frac{dT}{1+T}$, $\gamma(\frac{dT}{1+T}):=\chi(\gamma)\frac{dT}{1+T}$ と定義する). 留数写像 (residue map) を $\mathrm{res}:\mathcal{E}\frac{dT}{1+T}\to L$, $\mathrm{res}:\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\frac{dT}{1+T}\to\mathcal{O}$, $\mathrm{res}:\mathcal{E}\frac{dT}{1+T}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\frac{dT}{1+T}\to L/\mathcal{O}$ を $\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_nT^ndT\mapsto a_{-1}$ で定義する. $D\in\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}},\Phi\Gamma_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^{\mathrm{et}},\Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ に応じて, それぞれ $R=L/\mathcal{O},\mathcal{O},L$ とする. これを用いて D と $D^\vee$ とのペアリングを

$$\{\,,\}:D^\vee\times D\to R:(y,x)\mapsto\mathrm{res}(\sigma_{-1}(y)(x))$$

と定義する. このペアリングは完全となる ([Co10b] Proposition I.2.5)). つまり, このペアリングは同型 $D^\vee\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cont}}(D,R):y\mapsto[x\mapsto\{y,x\}]$ を与える. このペアリングは等式

$$\{\gamma(y),x\}=\{y,\gamma^{-1}(x)\}\ (\gamma\in\Gamma),\ \ \{\varphi(y),x\}=\{y,\psi(x)\},$$

$$\{\psi(y),x\}=\{y,\varphi(x)\},\ \ \{fy,x\}=\{y,\sigma_{-1}(f)x\}\ \ (f\in\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$$

を満たす.

注意 3.13. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ のとき, このペアリングに関して $(D^{\vee})^{\natural}$(resp. $(D^{\vee})^{\sharp}$) は D^{+}(resp. D^{++}) の直交補空間となる ([Co10b]II). つまり, 任意の $y\in(D^{\vee})^{\natural}$, $x\in D^{+}$ に対して $\{y,x\}=0$ となり, 逆に任意の $x\in D^{+}$ に対して $\{y,x\}=0$ ならば $y\in(D^{\vee})^{\natural}$ となる ($(D^{\vee})^{\sharp}$ と D^{++} に関しても同様). このことと $D^{+}=D^{++}\oplus D^{\mathrm{nr}}$ となることから, このペアリングはさらに同型 $(D^{\vee})^{\sharp}/(D^{\vee})^{\natural}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(D^{\mathrm{nr}},L/\mathcal{O})$ を導くことがわかる. この同型から, $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ のときは同型 $(D^{\vee})^{\sharp}/(D^{\vee})^{\natural}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}((D\otimes_{\mathcal{O}}L/\mathcal{O})^{\mathrm{nr}},L/\mathcal{O})$ を, $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ のときは同型 $(D^{\vee})^{\sharp}/(D^{\vee})^{\natural}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{L}(D^{\mathrm{nr}},L)$ を得る. これらの同型と注意 3.12 (4) から, D が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ) 加群のとき $D^{\sharp}/D^{\natural}$ は有限生成 $\mathcal{O}$ 加群となり, $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ のとき $D^{\sharp}/D^{\natural}$ は有限次元 L ベクトル空間となる. これより $D^{\sharp}/D^{\natural}$ には ψ が同型で作用することが分かる. 同じ注意から, さらに D が $\mathcal{E}$ 上または $k_{\mathcal{E}}$ 上の階数 2 以上の既約エタール (φ,Γ) 加群とすると $D^{\natural}=D^{\sharp}$ が成り立つことがわかる (この事実は $\Pi_{\delta}(D)$ の既約性の証明で重要になる).

D をエタール (φ,Γ)-加群とする. $?=\natural,\sharp$ に対して $D^{?}$ は (ψ,Γ)-作用と T 倍作用で安定なので, D の場合と同様に $D\boxtimes\mathbb{Q}_p$ の部分 $\mathcal{O}[P]$ 加群 $D^{?}\boxtimes\mathbb{Q}_p:=\varprojlim_{\psi}D^{?}$ を定義することができる. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ とする. D の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 格子 $D_0\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ を取り, $D\boxtimes\mathbb{Q}_p$ の有界 (bounded) な部分 $L[P]$ 加群 $(D\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ を $(D\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}:=(D_0\boxtimes\mathbb{Q}_p)[1/p]$ で定義し, $?=\natural,\sharp$ に対して $(D\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ の部分 $L[P]$ 加群 $(D^{?}\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ を $(D^{?}\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}:=(D^{?}\boxtimes\mathbb{Q}_p)\cap(D\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ で定義する. これらは D_0 の選び方によらず well-defined である. 関手 $D\mapsto D^{?}\boxtimes\mathbb{Q}_p$ に対して以下が成り立つ ([Co10b]III).

注意 3.14.

(1) D が $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上の (φ,Γ) 加群 (resp. $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$) の場合は関手 $D\mapsto D^{\sharp}\boxtimes\mathbb{Q}_p$(resp. $D\mapsto(D^{\sharp}\boxtimes\mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$) は完全関手である.

(2) $D^{\natural}$ 上の ψ の全射性から Mittag-Leffler 条件より P 加群の完全列 $0\to D^{\natural}\boxtimes\mathbb{Q}_p\to D^{\sharp}\boxtimes\mathbb{Q}_p\to(D^{\sharp}/D^{\natural})\boxtimes\mathbb{Q}_p\to 0$ を得る. ここで $(D^{\sharp}/D^{\natural})$ に ψ は同型で作用する (注意 3.13) ので $(D^{\sharp}/D^{\natural})\boxtimes\mathbb{Q}_p\to D^{\sharp}/D^{\natural}:(x_n)_{n\geqq 0}\mapsto x_0$ は同型になる. よって注意 3.13 から $D^{\sharp}\boxtimes\mathbb{Q}_p/D^{\natural}\boxtimes\mathbb{Q}_p$ は有限生成 $\mathcal{O}$ 加群 (または有限次元 L ベクトル空間) となる.

$D^{?}\boxtimes\mathbb{Q}_p$ に関する次の命題は p 進局所 Langlands 対応に現れる G の表現の有限性や既約性などを示すときに必要となる重要な命題である ([Co10b]III.3).

命題 3.15.

(1) D_1, D_2 を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上のエタール (φ,Γ)-加群とし, $F:D_1^{\natural}\boxtimes\mathbb{Q}_p\to D_2^{\sharp}\boxtimes\mathbb{Q}_p$ を連続 $\mathcal{O}[P]$ 準同型とする. このとき, (φ,Γ)-加群の射 $f:D_1\to D_2$ が唯一つ存在して, $F=\varprojlim_{\psi}(f)$

となる, つまり F は f が誘導する射 $D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{(x_n)_{n\geqq 0}\mapsto (f(x_n))_{n\geqq 0}} D_2^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p$ と自然な単射 $D_2^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \hookrightarrow D_2^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ の合成に等しい. $D_1, D_2 \in \Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ の場合は $D_i^? \boxtimes \mathbb{Q}_p$ を $(D_i^? \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ に替えた同様の主張が成立する.

(2) D をエタール (φ, Γ)-加群, M を $D \boxtimes \mathbb{Q}_p (D \in \Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ の場合は $(D \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}})$ のコンパクト部分 $\mathcal{O}[P]$ 加群 (または局所コンパクト閉部分 $L[P]$ 加群) とする. このとき, D の部分 (φ, Γ)-加群 D_1 が存在して $D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \subseteq M \subseteq D_1^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ (または $(D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \subseteq M \subseteq (D_1^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}})$ となる. 特に, D が $\mathcal{E}$ 上または $k_{\mathcal{E}} := \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}} k$ 上の階数 *2* 以上の既約なエタール (φ, Γ) 加群とすると, 注意 3.13 から $D^\natural = D^\sharp$ なので $(D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$(または $D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)$ は位相的既約な $L[P]$ 加群 (または $k[P]$ 加群) となる.

証明. (概略) まず (1) の証明について. 連続 $\mathcal{O}[P]$ 準同型 $F : D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \to D_2^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ に対して, 連続 $\mathcal{O}$ 準同型 $f : D_1^\natural \to D_2^\sharp$ を $f(x) := \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(F(\tilde{x}))$ と定義する. ここで, $\tilde{x} \in D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p$ は $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(\tilde{x}) = x$ を満たす元とする. $D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p$ と $D_2^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ のコンパクト性と P 作用の定義から, f は $\tilde{x}$ の取り方によらず well-defined で, (ψ, Γ)-作用と可換な連続 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ 準同型となることが分かる ([BB10]Proposition 3.4.5). このとき, f を $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 線形に延ばした射 $f : D_1 \to D_2$ は (φ, Γ)-加群の射となることが容易に示せて, F は f から誘導されることが分かる.

(2) の証明について. $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上の (φ, Γ)-加群の場合に示せば, $D \in \Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ の場合はこの場合から容易に従う. そこで, D は $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 上の (φ, Γ)-加群とし, M は $D \boxtimes \mathbb{Q}_p$ のコンパクト部分 $\mathcal{O}[P]$ 加群とする. このとき, $M_0 := \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(M)$ とおくと, これは (ψ, Γ)-作用で安定な D のコンパクト部分 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ 加群となり, さらに $M = M_0 \boxtimes \mathbb{Q}_p$ となることが容易に分かる. $D_1 := \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \cdot M_0 \subseteq D$ とおく. M_0 は φ の作用で安定とは限らないが, D_1 は φ の作用で安定で, D の部分 (φ, Γ)-加群になることが示せる ([Co10b]Proposition II.3.5). このとき, M_0 は $\psi(M_0) = M_0$ となる D_1 の格子となっているので, 包含関係 $D_1^\natural \subseteq M_0 \subseteq D_1^\sharp$ が成り立ち, 包含関係 $D_1^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \subseteq M_0 \boxtimes \mathbb{Q}_p (= M) \subseteq D_1^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ を得る ([Co10b]Remarque III.3.7, Théorème III.3.8). □

次に, $? = \natural, \sharp$ に対して $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の閉 $\mathcal{O}$ 加群 $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ を定義する. $D^?$ は一般には φ の作用で安定ではないので D と同じ方法では G 加群 $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ を定義することはできない. そこで, $? = \natural, \sharp$ に対してまず

$$(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} := \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 | \mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}(z) \in D^? \boxtimes_\delta \mathbb{Q}_p\}$$

と定義する (添字 ns は non saturated の略). 次に, $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}, \Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ のときは $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 := (D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ と定義し, $D \in \Phi\Gamma_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^{\mathrm{et}}$ のときは

$$D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 := \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 | \text{ ある } k \geqq 0 \text{ が存在して } p^k z \in (D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}\}$$

と定義する. $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}$ は B 同変なので $(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ 及び $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の部分 B 加群となる. $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ に関して次の性質が成り立つ ([Co10d]II.2).

注意 3.16.

(1) $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ とする. 関手 $D \mapsto D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ の完全性 (注意 3.14 (1)) から, 列が完全となる次の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{p} & D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & (D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/p)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & D \boxtimes \mathbb{Q}_p & \xrightarrow{p} & D \boxtimes \mathbb{Q}_p & \longrightarrow & (D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/p) \boxtimes \mathbb{Q}_p. & & \end{array}$$

この可換図式から, 商加群 $D \boxtimes \mathbb{Q}_p / D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ は p 捻れ元を持たないことが従う. よって, $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の定義から $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} = D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ となる.

(2) 自然な単射 $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} \hookrightarrow D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p / D^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} D^\sharp/D^\natural$ があるので注意 3.13 から $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ は有限生成 $\mathcal{O}$ 加群 (または有限次元 L ベクトル空間) となり, よって $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1/D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ もそのようになる.

(3) $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ のとき, 各 $n \geqq 1$ に対して自然な射 $(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{nr}} \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n \to (D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は一般には全射でも単射でもない (核と余核が長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群であることは証明できる) が, $D^? = \varprojlim_n (D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^?$ である (注意 3.12 (3)) から, $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{nr}} = \varprojlim_n ((D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$, $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \varprojlim_n ((D \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ が成り立つ.

$\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}$ は B 同変なので $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は B の作用で安定であるが, 一般の組 (D, δ) に対しては $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は G の作用 (つまり w の作用) で安定ではない (後述の定理 3.21 参照). そこで次の定義をする.

定義 3.17.

(1) エタール (φ, Γ) 加群 D と連続準同型 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ の組 (D, δ) に対して, $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の部分 B 加群 $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ が G 作用で安定であるとき, 組 (D, δ) は G 整合的 (G compatible) であるという.

(2) (D, δ) が G 整合的であるとき, $\mathcal{O}$ 上の位相的 G 加群 $\Pi_\delta(D)$ を

$$\Pi_\delta(D) := D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 / D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$$

(位相は $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の商位相) と定義する.

以下の性質に関しては [Co10d]II.2 を参照されたい.

注意 3.18.

(1) $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ が G 作用で安定であることと $D^\sharp \otimes_\delta \mathbf{P}^1$ が G 作用で安定であることは同値である. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ のときはさらに $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ が G 作用で安定であることとも同値である. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ のときはある開コンパクト $\mathcal{O}[G]$ 加群 $M \subseteq D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ が存在することとも同値である. これらの性質から $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ に対して (D, δ) が G 整合的であることと $(D[1/p], \delta)$ が G 整合的であることは同値となることが分かる. また, 注意 3.16(3) から任意の $n \geqq 1$ に対して $(D \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}/\varpi^n, \delta)$ が G 整合的ならば (D, δ) も G 整合的となる. 逆に, (D, δ) が G 整合的ならば, 任意の $n \geqq 1$ に対して $(D \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}/\varpi^n, \delta)$ も G 整合的であることが知られている ([Co10d] Proposition II.2.6). この最後の主張は, 自然な射 $(D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} \to (D \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}/\varpi^n)^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ が一般には全射ではないから明らかな事実ではないことに注意する.

(2) $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ とする. $z \in D^+$ に対して, $D^+ \subseteq D^\natural$ かつ $\varphi(D^+) \subseteq D^+$ なので, $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}(\iota_{\mathbb{Z}_p}(z)) = (\varphi^n(z))_{n \geqq 0} \in D^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p$ となる. よって, $\iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+) \subseteq D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ となる. よって, G 整合的な (D, δ) に対しては $\mathcal{O}[G] \cdot \iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+) \subseteq D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ となるが, このとき実は $\mathcal{O}[G] \cdot \iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+) = D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ となることが知られている (これは本質的には [Co10d]Corollaire II.2.8 から従う).

(3) (D, δ) は G 整合的と仮定する. このとき, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ ならば, 完全列

$$0 \to D^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{z \mapsto (0,z)} D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}} D^\natural \boxtimes_\delta \mathbb{Q}_p \to 0$$

が存在する. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$(resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$) のときは $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ を $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$(resp. $D^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p$ を $(D^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$) に取り替えた同様の完全列が存在する ([Co10d]Proposition II.1.14, Remarque II.2.3 (ii)).

次の命題は G 整合的な組 (D, δ) に対して定義される位相的 $\mathcal{O}[G]$ 加群 $\Pi_\delta(D)$ が p 進局所 Langlands 対応に現れるよい表現であることを表している.

命題 3.19. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$(resp. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$) とする. (D, δ) が G 整合的であるとき, $\Pi_\delta(D) \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ (resp. $\Pi_\delta(D) \in \mathrm{Rep}_\mathcal{O}(G)$, $\Pi_\delta(D) \in \mathrm{Rep}_L(G)$) となる.

証明. まず, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}, \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ のとき, $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 (? = \natural, \sharp)$ は $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ のコンパクト部分群であることを示す. $z = (z_1, z_2) \in D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ に対して, $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は w の作用で安定である (注意 3.18 (1)) ので, $(z_2, z_1) = w(z_1, z_2) \in D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ となり, $z_1, z_2 \in D^?$ となる. よって, 位相 $\mathcal{O}$ 加群の同型 $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} D \oplus \varphi(D) : (z_1, z_2) \mapsto (z_1, \varphi\psi(z_2))$ による同一視の下で, $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ はコンパクト部分 $\mathcal{O}$ 加群 $D^? \oplus \varphi\psi(D^?)$ に含まれる. $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}$ の連続性により, $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の中で閉なので, $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ もコンパクトとなる.

次に, $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ のとき, $D^? \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の開 (コンパクト) 部分群であることを示す. $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subseteq D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ なので, $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ の場合を示せばよい. これが示せれば, D の位相から誘導される $\Pi_\delta(D)$ の商位相は離散位相となり, 捻れ $\mathcal{O}$ 加群上の smooth G 加群になる. 注意 3.18 (2) から, $\iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+) + w(\iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+)) \subseteq D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ であり, $\iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+) + w(\iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+))$

の $D\oplus\varphi(D)$ への像は $D^+\oplus\varphi\psi(D^+)$ となり, $(\varphi(D^+)\subseteq D^+$ の両辺に ψ を作用させることで$)D^+\subseteq\psi(D^+)$ なので, この像は $D^+\oplus\varphi(D^+)$ を含む. $D^+\oplus\varphi(D^+)$ は $D\oplus\varphi(D)$ の開部分群なので, $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ も開となる.

$D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ のとき, $\Pi_\delta(D)$ が $\mathcal{O}[G]$ 加群として長さ有限であることは [Co10d] Lemme II.2.10 で証明されている (そこではより強く, $\mathcal{O}[P]$ 加群として長さ有限であることが証明されている). 中心指標を持つ長さ有限smooth G 加群は許容的である (§6.1 参照) ので以上から $\Pi_\delta(D)\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ が従う. これらの性質は, 後述の双対性 $\Pi_\delta(D)^*\xrightarrow{\sim}(D^\vee)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ (定理 3.20 (2)) を用いると次のようにして示すこともできる. まず, $\mathcal{O}[P]$ 加群として長さ有限であることは, 双対性から $(D^\vee)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ が長さ有限のコンパクト $\mathcal{O}[P]$ 加群であることを示せばよい. これは, コンパクト $\mathcal{O}[P]$ 加群の完全列 $0\to(D^\vee)^{\mathrm{nr}}\to(D^\vee)^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\to(D^\vee)^\natural\boxtimes\mathbb{Q}_p\to 0$ (注意 3.18(3)) と定義 3.11 (1) と命題 3.15 (2) から従う. 次に, 許容的であることは双対性から $(D^\vee)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ が有限生成 $\mathcal{O}[[K]]$ 加群であることを示せばよい. これは, $U(\mathbb{Z}_p):=\begin{pmatrix}1&\mathbb{Z}_p\\0&1\end{pmatrix}$ とおくと, $(D^\vee)^+$ が $\mathcal{O}^+_{\mathcal{E}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}[[U(\mathbb{Z}_p)]]$ 加群として有限生成であることと $\mathcal{O}[[K]]\cdot\iota_{\mathbb{Z}_p}((D^\vee)^+)(\supseteq\iota_{\mathbb{Z}_p}((D^\vee)^+)+w(\iota_{\mathbb{Z}_p}((D^\vee)^+)))$ がコンパクト $\mathcal{O}$ 加群 $(D^\vee)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ の開部分群, 特に指数有限の部分群となることから従う.

次に, $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ とする. 注意 3.18 (1) から各 $n\geqq 1$ に対して $(D\otimes_\mathcal{O}\mathcal{O}/\varpi^n,\delta)$ は G 整合的となり, さらに注意 3.16(3) から同型 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}\xrightarrow{\sim}\varprojlim_n\Pi_\delta(D\otimes_\mathcal{O}\mathcal{O}/\varpi^n)$ がある (より正確には , 各 n に対して核が長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となる全射 $(D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}})\otimes_\mathcal{O}\mathcal{O}/\varpi^n\to\Pi_\delta(D\otimes_\mathcal{O}\mathcal{O}/\varpi^n)$ がある) ので, $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ は平坦 $\mathcal{O}$ 加群である (p-torsion 元を持たない) という条件以外は $\mathrm{Rep}_\mathcal{O}(G)$ の対象と同じ性質を持つ. $\mathcal{O}[G]$ 加群の完全列 $0\to D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}\to D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}\to\Pi_\delta(D)\to 0$ があり, $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}(\subseteq D^\sharp\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1/(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}\hookrightarrow D^\sharp/D^\natural)$ は $\mathcal{O}$ 加群として長さ有限 (注意 3.16(2)) なので $\Pi_\delta(D)\in\mathrm{Rep}_\mathcal{O}(G)$ であることが分かる.

最後に, $D\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_\mathcal{E}$ の場合は $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ の場合から直ちに従う. □

次に, G 整合的な (D,δ) に対して D の Tate 双対 $D^\vee$ と $\Pi_\delta(D)$ の連続双対 $\Pi_\delta(D)^*$ の関係について解説する. ここで, $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ のときは $\Pi^*:=\mathrm{Hom}_\mathcal{O}(\Pi,L/\mathcal{O})$ と定義し, $\Pi\in\mathrm{Rep}_\mathcal{O}(G)$ のときは $\Pi^*:=\mathrm{Hom}_\mathcal{O}(\Pi,\mathcal{O})$, $\Pi\in\mathrm{Rep}_L(G)$ のときは $\Pi^*:=\mathrm{Hom}^{\mathrm{cont}}_L(\Pi,L)$ と定義する. Π^* の位相は各点収束位相を入れる.

ペアリング $\{\,,\}:D^\vee\times D\to R:(y,x)\mapsto\mathrm{res}(\sigma_{-1}(y)(x))$ を用いて, 組 (D,δ) に対してペアリングを

$$\begin{aligned}\{\,,\}_{\mathbf{P}^1}:D^\vee\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1\times D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\to R:&\\ (z',z)\mapsto\{\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z'),\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z)\}&+\{\mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(wz'),\mathrm{Res}_{p\mathbb{Z}_p}(wz)\}\end{aligned}$$

で定義する. このペアリングも完全となり, さらに G 同変 (つまり任意の $g\in G$ に対して $\{gz',gz\}_{\mathbf{P}^1}=\{z',z\}_{\mathbf{P}^1}$) となることが知られている ([Co10d]Théorème II.1.13).

定理 3.20 ([Co10d] Corollaire II.2.12)**.** G 整合的な組 (D,δ) に対して次が成立する.

(1) $(D^\vee, \delta^{-1})$ は G 整合的である.

(2) ペアリング $\{\,,\}_{\mathbf{P}^1} : D^\vee \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \times D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to R$ は $\mathcal{O}$ 上の位相的 G 加群の同型

$$D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \Pi_{\delta^{-1}}(D^\vee)^* : x \mapsto [\bar{y} \mapsto \{y, x\}_{\mathbf{P}^1}]$$

を誘導する ($\bar{y} \in \Pi_{\delta^{-1}}(D^\vee)$ に対して $y \in D^\vee \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ は $\bar{y}$ の持ち上げとする). よって, $\mathcal{O}$ 上の位相的 G 加群の完全列

$$0 \to \Pi_{\delta^{-1}}(D^\vee)^* \to D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \Pi_\delta(D) \to 0$$

が存在する.

証明. $(D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ と $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ が完全ペアリング $\{,\}_{\mathbf{P}^1}$ に関して直交補空間であること, つまり (i) 任意の $z' \in (D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ と $z \in D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ に対して $\{z, z'\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ となることと (ii) 任意の $z' \in (D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ に対して $\{z', z\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ ならば $z \in D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ となること (及び z と z' の役割を入れ替えた同様の主張が成り立つこと) の 2 つを示せば (1) と (2) が従うので, (i), (ii) を示せばよい.

$D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ の場合は $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ の場合から従う. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ の場合は注意 3.16 (3) から $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ の場合から従う. よって $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ の場合に (i), (ii) を示せばよい.

まず (i) を示す. $z' \in (D^\vee)^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ と $\iota_{\mathbb{Z}_p}(z) \in \iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+)$ に対して, $(D^\vee)^\natural$ と D^+ の直交性と $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z') \in (D^\vee)^\natural$ となることから $\{z', \iota_{\mathbb{Z}_p}(z)\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z'), z\} = 0$ となる. 注意 3.18 (2) から $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は $\mathcal{O}[G]$ 加群として $\iota_{\mathbb{Z}_p}(D^+)$ で生成されるので (i) が成立する.

次に (ii) を示す. 任意の $z' \in (D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ に対して $\{z', z\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ と仮定する. $\{\,,\}_{\mathbf{P}^1}$ は G 同変, 特に B 同変なので任意の $g \in B$ に対して gz も, 特に $\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z$ $(n \geqq 0)$ も z と同じ仮定を満たす. よって $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z) \in D^\natural$ であることを示せばよい. 任意の $z' \in (D^\vee)^+$ に対して $\iota_{\mathbb{Z}_p}(z') \in (D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ なので $0 = \{\iota_{\mathbb{Z}_p}(z'), z\}_{\mathbf{P}^1} = \{z', \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z)\}$ となる. よって, $D^\natural$ と $(D^\vee)^+$ の直交性から $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z) \in D^\natural$ となる. z と z' の役割を入れ替えた場合も全く同様に示せるので (ii) が示せた.

□

ここまでは G 整合的であるという仮定の下で G の表現 $\Pi_\delta(D)$ の性質について解説してきた. G 整合性に関して最も難しく最も重要なのは実際にどのような組 (D, δ) が G 整合性を満たすかという問題である. この問題に関する次の定理 (特に階数 2 の (φ, Γ)-加群に関する部分) は G 整合性に関して最も重要な定理であり, 後で詳しく説明するように $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理 (定理 2.9) の証明の根幹をなしている.

定理 3.21. D を $\mathcal{E}$ 上の絶対既約エタール (φ, Γ)-加群とし, $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to \mathcal{O}^\times$ を連続準同型とする. このとき次の条件 (1), (2) は同値.

(1) (D, δ) は G 整合的である.

(2) 次のいずれかの条件が成り立つ.

 (i) $\mathrm{rank}_{\mathcal{E}}D=1$ かつ δ は任意.

 (ii) $\mathrm{rank}_{\mathcal{E}}D=2$ かつ $\delta=\det_{\mathcal{E}}D\cdot\chi^{-1}=:\delta_D$. ここで, 局所類体論によって $G_{\mathbb{Q}_p}$ の *1* 次元 L 表現 $V(\det_{\mathcal{E}}D)$ に対応する指標を同じ記号で $\det_{\mathcal{E}}D:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}^\times$ と表す.

注意 3.22. $D\in\Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ を絶対既約とする.

(1) $\mathrm{rank}_{\mathcal{E}}D=1$ の場合に任意の δ に対して (D,δ) が G 整合的であることは次の §3.3 で解説する (系 3.25).

(2) $\mathrm{rank}_{\mathcal{E}}D=2$ の場合に (D,δ_D) が G 整合的であることは §5 で解説する. これは対応 $\Pi\mapsto V(\Pi)$ の全射性で用いられる (§6.2 参照).

(3) 逆に, $\mathrm{rank}_{\mathcal{E}}D=2$ で (D,δ) が G 整合的ならば $\delta=\delta_D$ であることは [CDP14]Theorem 3.5 で証明されている (残念ながら, 紙数の関係と筆者の力不足で本稿ではこの証明に関して説明することは出来なかった). これは対応 $\Pi\mapsto V(\Pi)$ の単射性で用いられる (§6.2 参照).

(4) $\mathrm{rank}_{\mathcal{E}}D\geqq 3$ の場合に任意の δ に対して (D,δ) が G 整合的とならないことは $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の主定理 (定理 2.9) の帰結として最後に証明される (§6.2 参照).

注意 3.23. G 整合的な組 (D,δ) に対して, $\Pi_\delta(D)$ がどのような表現になるか具体的に記述することは一般には難しい. 階数 1 の場合は次節で解説する. D が階数 2 で $V(D)$ が三角表現 (trianguline representation [Co08]) となる場合, B から G への "p 進的な" 誘導表現による $\Pi_{\delta_D}(D)$ の具体的な記述が知られている ([BB10], [Co10c] 及び本稿 §5.1 参照). この場合, $\Pi_{\delta_D}(D)^{\mathrm{an}}$ の局所解析的誘導表現による記述も知られている ([Co11], [Do11], [Li12], [LXZ12]). D が階数 2 で三角表現でない場合, $\Pi_{\delta_D}(D)$ 及び $\Pi_{\delta_D}(D)^{\mathrm{an}}$ の具体的な記述は (筆者の知る限り) 知られていない.

§ 3.3. 階数 1 の場合

ここでは任意の階数 1 の (φ,Γ)-加群 $D\in\Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ と連続準同型 $\delta:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}^\times$ に対して組 (D,δ) が G 整合的であることを証明し, さらに $\Pi_\delta(D)$ が連続誘導表現によって具体的に記述出来ることを証明する. 詳細については, 本節の設定と異なり局所解析的な誘導表現を扱っているが, [Do11] を参照されたい.

まず, 局所類体論により任意の階数 1 の (φ,Γ)-加群 $D\in\Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ に対して連続準同型 $\delta_0:\mathbb{Q}_p^\times\to\mathcal{O}^\times$ が唯一つ存在して $D\xrightarrow{\sim}\mathcal{E}(\delta_0)$ となる. 一般の (φ,Γ)-加群 D に対して, G 加群としての自然な同型 $D(\delta_0)\boxtimes_{\delta\delta_0^2}\mathbf{P}^1\xrightarrow{\sim}D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\otimes(\delta_0\circ\det):(z_1\otimes\mathbf{e}_{\delta_0},z_2\otimes\mathbf{e}_{\delta_0})\mapsto(z_1,z_2)\otimes(\delta_0\circ\det)$ が存在し ([Co10d] Proposition II.1.11), さらにこれは同型 $D(\delta_0)^\natural\boxtimes_{\delta\delta_0^2}\mathbf{P}^1\xrightarrow{\sim}(D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)\otimes(\delta_0\circ\det)$ を導くので, 階数 1 の場合の $D^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ 及び

$\Pi_\delta(D)$ の記述のためには D が自明な (φ,Γ)-加群 $\mathcal{E}$ のときの計算をすれば十分である. そこで以下 $D=\mathcal{E}$ として $\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ 及び $\Pi_\delta(\mathcal{E})$ の具体的な記述について解説する.

この場合は $\mathcal{E}^\natural=\mathcal{E}^+$ であり, これは φ の作用で安定なので G 加群 $D\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ と同様の定義で $\mathcal{E}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ の閉部分 $L[G]$ 加群

$$(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)':=\{(z_1,z_2)\in\mathcal{E}^+\times\mathcal{E}^+|\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z_1)=w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z_2))\}(=\mathcal{E}\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\cap(\mathcal{E}^+\times\mathcal{E}^+))$$

を定義することができる. まず, 次の補題を証明する.

補題 3.24. $\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1=(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)'$

証明. $(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)'$ は G 作用で安定なので, $z\in(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)'$ について $\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}z\ (n\geqq 1)$ も $(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)'$ に入り, 従って $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}\left(\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}z\right)\in\mathcal{E}^+=\mathcal{E}^\natural$, すなわち $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}(z)\in\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbb{Q}_p$ となる. よって包含関係 $(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)'\subseteq\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ がなりたつ. 逆の包含関係 $\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\subseteq(\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1)'$ を示す. $z=(z_1,z_2)\in\mathcal{E}^\natural\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ とする. $z_1=\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(z)\in\mathcal{E}^+$ であるのは明らかなので $z_2\in\mathcal{E}^+$ を示せばよい. まず, $w_\delta(\mathcal{E}^+\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times)=\mathcal{E}^+\boxtimes\mathbb{Z}_p^\times$ なので $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z_2)=w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(z_1))\in\mathcal{E}^+$ となる. よって $z_2\in(\mathcal{E}^+)+\varphi(\mathcal{E})$ となる. 次に, G 作用の定義 (§3.2.3) から $\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}z=(\varphi(z_1)+\delta(p)w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\psi(z_2)),\delta(p)\psi(z_2))$ なので $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}\left(\begin{pmatrix}p&0\\0&1\end{pmatrix}z\right)=\varphi(z_1)+\delta(p)w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\psi(z_2))\in\mathcal{E}^+$ となる. これより $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\psi(z_2))\in\mathcal{E}^+$ となり, $z_2\in(\mathcal{E}^+)+\varphi^2(\mathcal{E})$ となる. 以下帰納的に $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}\left(\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}z\right)\in\mathcal{E}^+$ という条件から $\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\psi^n(z_2))\in\mathcal{E}^+$ となり, $z_2\in(\mathcal{E}^+)+\varphi^{n+1}(\mathcal{E})$ となることが分かる. これより $[z_2]\in\mathcal{E}/\mathcal{E}^+\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)$ は $\cap_{n\geqq 0}\varphi^n(\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L))$ に含まれる. $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L)$ への φ 作用の定義 (§3.2.1) から $\varphi^n(\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p,L))$ の各元 ($\mathbb{Z}_p$ 上の連続関数) の support は $p^n\mathbb{Z}_p$ に含まれるので $[z_2]=0$ でなければならない. よって $z_2\in\mathcal{E}^+$ となる. □

この補題より次を得る.

系 3.25. 任意の δ に対して $(\mathcal{E},\delta)$ は G 整合的である.

この系によって G の表現 $\mathcal{E}^+\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1$ 及び $\Pi_\delta(\mathcal{E})$ を定義できるが, これらの具体的な記述について次の命題が成立する (この命題は主定理 2.9 の non-ordinary な表現に関する主張の証明でも用いられる). 次の命題 (の局所解析版) は, [Do11] Remarque3.7 で証明されている.

命題 3.26. L 上の位相的 G 加群の同型

$$\mathcal{E}^+\boxtimes_\delta\mathbf{P}^1\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_B^G(\delta^{-1}\otimes\mathbf{1})^*_{\mathrm{cont}},\quad \Pi_\delta(\mathcal{E})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ind}_B^G(\delta\chi\otimes\chi^{-1})_{\mathrm{cont}}$$

が存在する．特に, L 上の位相的 G 加群の完全列

$$0 \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta^{-1} \otimes \mathbf{1})^*_{\mathrm{cont}} \to \mathcal{E} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \to \mathrm{Ind}_B^G(\delta\chi \otimes \chi^{-1})_{\mathrm{cont}} \to 0$$

が存在する．

証明． 以下, 同型 $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^+$ 及び $\mathcal{E}/\mathcal{E}^+ \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$(§3.2.1) を用いて命題の同型を具体的に構成する．まず, 同型 $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}^+$ によって $\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p^\times, L)$ と $\mathcal{E}^+ \boxtimes \mathbb{Z}_p^\times$ は対応するが, $\mathcal{E}^+ \boxtimes \mathbb{Z}_p^\times$ 上の対合 w_δ は $\mu \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p^\times, L)$ に対して $\int_{\mathbb{Z}_p^\times} h(x) w_\delta(\mu)(x) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \delta(x) h(1/x)\mu(x)$ で定義される対合 $w_\delta : \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p^\times, L) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p^\times, L)$ と対応していた (注意 3.8)．よって補題 3.24 より G 加群 $\mathcal{E}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ は (同様に G 作用を定義した)G 加群

$$\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 := \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \times \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) | \mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\mu_1) = w_\delta(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\mu_2))\}$$

と同型になる．この G 加群と $\mathrm{Ind}_B^G(\delta^{-1} \otimes \mathbf{1})^*_{\mathrm{cont}}$ との同型を次のようにして構成する．

まず連続誘導表現 $\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1} \otimes \delta)_{\mathrm{cont}}$ を考える．$f \in \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1} \otimes \delta)_{\mathrm{cont}}$ に対して連続関数 $F : \mathbb{Q}_p \to L$ を $F(z) := f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -z \end{pmatrix}\right)$ で定義すると, この対応は L 上の Banach 空間の同型

$$\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1} \otimes \delta)_{\mathrm{cont}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta) : f \mapsto F$$

を与える．ここで右辺の底空間は

$$\mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta) := \{F : \mathbb{Q}_p \to L : F \text{ は連続関数で } \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \text{ 上の連続関数 } \delta(z)F(1/z) \text{ が } \mathbb{Z}_p \text{ 上の連続関数へ延長するもの } \}$$

と定義し, その上のノルムは F に対して $|F| := \max_{z \in \mathbb{Z}_p}\{|F(z)|, |\delta(z)F(1/z)|\}$ で定義する．$\mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta)$ への G 作用を $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対して

$$(g^{-1}F)(z) := \delta(ad - bc)^{-1}\delta(cz + d)F\left(\frac{az + b}{cz + d}\right)$$

と定義すると上の同型は G の L 上のユニタリー Banach 表現の同型となる．この同型を用いて $\mathrm{Ind}_B^G(\delta^{-1} \otimes \mathbf{1})^*_{\mathrm{cont}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1} \otimes \delta)^*_{\mathrm{cont}} \otimes (\delta \circ \det)$ を $\mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta)^* \otimes (\delta \circ \det)$ と同一視する． このとき, $(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ に対して $\mu \in \mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta)^*$ を ($F \in \mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta)$ に対して)

$$\int_{\mathbf{P}^1} F(x)\mu(x) := \int_{\mathbb{Z}_p} F(x)\mu_1(x) + \int_{p\mathbb{Z}_p} \delta(x)F(1/x)\mu_2(x)$$

と定義することで, L 上の位相的 G 加群の同型

$$\mathcal{D}^0(\mathbb{Z}_p, L) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}^0(\mathbf{P}^1, L)(\delta)^* \otimes (\delta \circ \det) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G(\delta^{-1} \otimes \mathbf{1})^*_{\mathrm{cont}} : (\mu_1, \mu_2) \mapsto \mu \otimes (\delta \circ \det)$$

が得られる．

次に，同型 $\Pi_\delta(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G(\delta\chi \otimes \chi^{-1})_{\mathrm{cont}}$ を構成する．定理 3.20 を用いれば同型 $\mathcal{E}(1)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \Pi_\delta(\mathcal{E})^*$ があるので，前段の結果からこの同型を得ることもできるが，具体的に次のようにして同型を定義することも出来る．$z \in \mathcal{E} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ に対して連続関数 $\phi_z : G \to L$ を

$$\phi_z(g) := \mathrm{res}\left(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p}(wgz)\frac{dT}{1+T}\right)$$

と定義すれば $\phi_z \in \mathrm{Ind}_B^G(\delta\chi \otimes \delta^{-1})_{\mathrm{cont}}$ となり，対応 $z \mapsto \phi_z$ は $\mathcal{E}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ 上でゼロで同型 $\Pi_\delta(\mathcal{E}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ind}_B^G(\delta\chi \otimes \chi^{-1})_{\mathrm{cont}}$ を誘導する (詳細は略)． □

§4.　Colmez の理論 2：$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現から (φ, Γ)-加群への関手の構成

この節では前節と逆向きの対応，つまり G の表現から (φ, Γ)-加群を構成する方法について解説する ([Co10d] III, IV)．前節と異なり，この場合は全ての G の表現に対して (φ, Γ)-加群を対応させることが出来る．より強く，この対応は G の表現から (φ, Γ)-加群への完全関手になっている．この関手の構成は基本的には前節の構成の逆を辿ることによってなされる．つまり (おおまかには)G の表現からまず $\mathbf{P}^1$ 上の G 同変層を構成し，この層の $\mathbb{Z}_p$ 上の切断とそれへの P^+ 作用を用いて (φ, Γ)-加群を構成する．

§4.1.　関手の定義

まずは $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ から $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ への関手の構成が基本となる．$\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tor}}(G)$ に対して Π の部分 $\mathcal{O}[KZ]$ 加群からなる集合 $\mathcal{W}(\Pi)$ を

$$\mathcal{W}(\Pi) := \{W \subseteq \Pi | W \text{ は } \mathcal{O} \text{ 加群として長さ有限の部分 } \mathcal{O}[KZ] \text{ 加群で } \mathcal{O}[G] \text{ 加群として } \Pi \text{を生成する }\}$$

で定義する．$\mathcal{W}(\Pi)$ が空集合でないことは容易に示せる．$W \in \mathcal{W}(\Pi)$ に対して G の捻れ $\mathcal{O}$ 加群上の smooth 表現

$$I(W) := c\text{-}\mathrm{Ind}_{KZ}^G W := \{f : G \to W | \text{ 任意の } h \in KZ, g \in G \text{ に対して } f(hg) = hf(g) \text{ が成り立ち } \mathrm{supp}(f) \text{ は modulo } KZ \text{ で有限集合}\}$$

を定義する (G の作用は $gf(g') := f(g'g)$ で定義する)．各 $g \in G$, $v \in W$ に対して $[g, v] \in I(W)$ を

$$[g, v](h) := \begin{cases} hgv & (hg \in KZ) \\ 0 & (hg \notin KZ) \end{cases}$$

で定義する．これらの元は $I(W)$ の $\mathcal{O}$ 加群としての生成元を成し，任意の $g' \in G, h \in KZ$ に対して $g'[g, v] = [g'g, v]$ 及び $[gh, v] = [g, hv]$ を満たす．$g \in G$ に対して $I(W)$ の部分

$\mathcal{O}$ 加群 $\{[g,v]\,|\,v\in W\}$ を $[g,W]$ で表す．$G=\bigsqcup_{n\in\mathbb{Z}}\bigsqcup_{a\in\mathbb{Q}_p/p^n\mathbb{Z}_p}\begin{pmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{pmatrix}KZ$ という分解があるので $\mathcal{O}$ 加群としての直和分解 $I(W)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{a\in\mathbb{Q}_p/p^n\mathbb{Z}_p}\left[\begin{pmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},W\right]$ がある．$I(W)$ から Π への $\mathcal{O}[G]$ 加群の射を

$$I(W)\to\Pi:[g,v]\mapsto gv$$

で定義する．W は Π の生成元を含んでいるのでこの射は全射となる．よって, その核を $R(\Pi,W)$ とおくと $\mathcal{O}[G]$ 加群の完全列

$$0\to R(\Pi,W)\to I(W)\to\Pi\to 0$$

を得る．ここで, $D(\Pi)\in\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ を定義するために $R(\Pi,W)$ に関する次の定義をする．

定義 4.1. $R(\Pi,W)$ が $\mathcal{O}[G]$ 加群として

$$\left\{\left[\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}v\right]-\left[\begin{pmatrix}p & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},v\right]\,\middle|\,v\in W\cap\begin{pmatrix}p^{-1} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}W\right\}$$

で生成されるとき, $I(W)/R(\Pi,W)$ を Π の標準表示 (standard presentation) という．$I(W)/R(\Pi,W)$ が Π の標準表示となる W からなる $\mathcal{W}(\Pi)$ の部分集合を $\mathcal{W}^0(\Pi)$ と書く．任意の $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ に対して $\mathcal{W}^0(\Pi)$ は空でないことが知られている ([Co10d]Théorème III.3.1).

以下の議論の多くは一般の W に関しても成立するが簡単のため以下では $\mathcal{W}^0(\Pi)$ に入る W のみを考える．

$\mathbb{Q}_p$ のコンパクト開集合 U に対して $a+p^n\mathbb{Z}_p\subseteq U$ となる $\left[\begin{pmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},W\right]$ たちの直和として定まる $I(W)=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\bigoplus_{a\in\mathbb{Q}_p/p^n\mathbb{Z}_p}\left[\begin{pmatrix}p^n & a\\ 0 & 1\end{pmatrix},W\right]$ の部分 $\mathcal{O}$ 加群を $I_U(W)$ と表す．射 $I(W)\to\Pi$ による $I_U(W)$ の像を $I^{\Pi}_U(W)\subseteq\Pi$ と表す．$I^{\Pi}_U(W)$ の Pontryagin 双対を $I^{\Pi}_U(W)^*:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(I^{\Pi}_U(W),L/\mathcal{O})$ と表す．各点収束位相を入れることにより $I^{\Pi}_U(W)^*$ はコンパクト $\mathcal{O}$ 加群となる．$U_1\subseteq U_2$ なら $I^{\Pi}_{U_1}(W)\subseteq I^{\Pi}_{U_2}(W)\subseteq\Pi$ であるが, これの双対を取ることにより全射 $\Pi^*\to I^{\Pi}_{U_2}(W)^*\to I^{\Pi}_{U_1}(W)^*$ が得られる．これらの射をそれぞれ $R_{U_2,W}:\Pi^*\to I^{\Pi}_{U_2}(W)^*$, $R^{U_2}_{U_1,W}:I^{\Pi}_{U_2}(W)^*\to I^{\Pi}_{U_1}(W)^*$ と表す．包含関係 $gU\subseteq\mathbb{Q}_p$ を満たす元 $g\in G$ に対して $g(I^{\Pi}_U(W))=I^{\Pi}_{gU}(W)$ となる ([Co10d]Lemme III.2.4)．よって $\mu\in I^{\Pi}_U(W)^*$ に対して, $g\mu\in I^{\Pi}_{gU}(W)^*$ を ($v\in I^{\Pi}_{gU}(W)$ に対して)$\langle v,g\mu\rangle:=\langle g^{-1}v,\mu\rangle$ と定義することで同型 $g:I^{\Pi}_U(W)^*\xrightarrow{\sim}I^{\Pi}_{gU}(W)^*:\mu\mapsto g\mu$ が得られる．さらに包含関係 $U\subseteq gU$ を満たせば, 自然な全射 $I^{\Pi}_{gU}(W)^*\to I^{\Pi}_U(W)^*$ と合成することで全射自己準同型 $g:I^{\Pi}_U(W)^*\xrightarrow{g}I^{\Pi}_{gU}(W)^*\to I^{\Pi}_U(W)^*$ を得る．ここで, 標準表示 (定義 4.1) の仮定の必要な

理由の一つとして, $W \in \mathcal{W}^0(\Pi)$ の仮定の下では対応 $U \mapsto I_U^\Pi(W)^*$ は ($\mathbb{Q}_p$ のコンパクト開集合に対して切断が定義された G 同変) 層の性質を持つという事実がある ([Co10d]Lemme III.2.2).

ここで $U = \mathbb{Z}_p$ として $D_W^\natural(\Pi) := I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)^*$ とおく. $\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbf{P}^1$ は $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の作用で安定なので, $z \in D_W^\natural(\Pi)$ に対して

$$\sigma_a(z) := \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \quad (a \in \mathbb{Z}_p^\times), \ Tz := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z - z$$

と定義することで $D_W^\natural(\Pi)$ は連続半線形な Γ 作用を持つコンパクト $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ 加群となる. さらに $\mathbb{Z}_p \subseteq \frac{1}{p}\mathbb{Z}_p = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}_p$ なので全射自己準同型

$$\psi_W := \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : D_W^\natural(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$$

を定義することができる. よって, $D_W^\natural(\Pi)$ は互いに可換な ψ_W 作用と Γ の連続半線形作用を持つコンパクト $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ 加群となる. これを $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ へ係数拡大したものを

$$D(\Pi) := D_W^\natural(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}^+} \mathcal{O}_\mathcal{E}$$

と表す. まず, 各 $\gamma \in \Gamma$, $x \otimes f \in D(\Pi)$ に対して $\gamma(x \otimes f) := \gamma(x) \otimes \gamma(f)$ と作用を定めることで $D(\Pi)$ 上には連続半線形な Γ 作用が定まる. また, $W \subseteq W' \in \mathcal{W}^0(\Pi)$ に対して包含関係 $I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W) \subseteq I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W')$ の双対として定義される全射 $D_{W'}^\natural(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$ の核は長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群 ([Co10d]Lemme IV. 1.2) であり, さらに任意の $W, W' \in \mathcal{W}^0(\Pi)$ に対して $W, W' \subseteq W''$ となる $W'' \in \mathcal{W}^0(\Pi)$ が存在する ([Co10d]Corollaire III 1.15) ので, $D(\Pi)$ は $W \in \mathcal{W}^0(\Pi)$ の選び方によらずに定義される.

$D(\Pi)$ に φ 作用を定義するためには, さらに次の定義が必要である. $\mathbb{Q}_p$ のコンパクト開部分集合 U に対して, $a + p^n\mathbb{Z}_p \not\subseteq U$ となる任意の $n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{Q}_p$ に対して $\mu\left(\begin{pmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} W\right) = 0$ となる μ たちのなす Π^* の部分 $\mathcal{O}$ 加群を $I_U^\Pi(W)_0^*$ と記す. $U_1 \subseteq U_2$ ならば包含関係 $I_{U_1}^\Pi(W)_0^* \subseteq I_{U_2}^\Pi(W)_0^*$ があり, $gU \subseteq \mathbb{Q}_p$ を満たす $g \in G$ に対しては Π^* への g 作用は同型 $g : I_U^\Pi(W)_0^* \xrightarrow{\sim} I_{gU}^\Pi(W)_0^*$ を導く. さらに $gU \subseteq U$ ならば, 自然な埋め込み $I_{gU}^\Pi(W)_0^* \subseteq I_U^\Pi(W)_0^*$ と合成することで単射自己準同型 $g : I_U^\Pi(W)_0^* \hookrightarrow I_U^\Pi(W)_0^*$ が定義される.

ここで再び $U = \mathbb{Z}_p$ として $D_W^+(\Pi) := I_{\mathbb{Z}_p}^\Pi(W)_0^*$ と定義する. $D_W^\natural(\Pi)$ のときと同様 $\begin{pmatrix} \mathbb{Z}_p^\times & \mathbb{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の作用から $D_W^+(\Pi)$ は連続半線形な Γ 作用を持つコンパクト $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ 加群となる. さらに包含関係 $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{Z}_p = p\mathbb{Z}_p \subseteq \mathbb{Z}_p$ から, Γ 作用と可換な単射 φ 半線形写像

$$\varphi_W := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : D_W^+(\Pi) \hookrightarrow D_W^+(\Pi)$$

を定義することができる.

自然な埋め込み $D_W^+(\Pi) \hookrightarrow \Pi^*$ と全射 $R_{\mathbb{Z}_p,W} : \Pi^* \to D_W^\natural(\Pi)$ の合成として射

$$D_W^+(\Pi) \to D_W^\natural(\Pi)$$

を得る. 定義からこれは Γ 同変な単射 $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ 線形写像となる. さらに, この射の余核は $\mathcal{O}$ 加群として長さ有限となる ([Co10d] Lemme IV.1.4). よって, $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ に係数拡大することで Γ 同変な $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 加群の同型

$$D_W^+(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}^+} \mathcal{O}_\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} D_W^\natural(\Pi) \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}^+} \mathcal{O}_\mathcal{E} = D(\Pi)$$

を得る. この同型を用いて $D(\Pi)$ に φ の作用を

$$\varphi(x \otimes f) := \varphi_W(x) \otimes \varphi(f) \ \ (x \in D_W^+(\Pi), f \in \mathcal{O}_\mathcal{E})$$

で定義する. この φ 作用の線形化は $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 線形同型 $\varphi^* D(\Pi) \xrightarrow{\sim} D(\Pi)$ を誘導することが知られていて ([Co10d] Proposition IV.1.9), よって φ の左逆作用素 $\psi : D(\Pi) \to D(\Pi)$ を定義することができる. この ψ は $x \in D_W^\natural(\Pi)$ に対して $\psi(x \otimes 1) = \psi_W(x) \otimes 1$ を満たすことが知られている ([Co10d] Lemme IV.1.10).

定理 4.2 ([Co10d] Theorem IV.2.13)**.**

(1) $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ に対して $D(\Pi) \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ となる.

(2) 対応 $\Pi \mapsto D(\Pi)$ は $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ から $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ への反変完全関手となる.

証明. (概略) まずは, 対応 $\Pi \mapsto D(\Pi)$ が完全であることを以下のようにして証明する. $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ の完全列 $0 \to \Pi_1 \to \Pi_2 \to \Pi_3 \to 0$ を考える. このとき $W_i \in \mathcal{W}^0(\Pi_i)(i = 1,2,3)$ をうまく取ることで $0 \to W_1 \to W_2 \to W_3 \to 0$ が完全 (よって $0 \to I_{\mathbb{Z}_p}(W_1) \to I_{\mathbb{Z}_p}(W_2) \to I_{\mathbb{Z}_p}(W_3) \to 0$ も完全) でさらに $0 \to R(\Pi_1, W_1) \cap I_{\mathbb{Z}_p}(W_1) \to R(\Pi, W_2) \cap I_{\mathbb{Z}_p}(W_2) \to R(\Pi_3, W_3) \cap I_{\mathbb{Z}_p}(W_3) \to 0$ も完全となるようにできる ([Co10d]Remarque III.1.17, Proposition IV.2.12 の証明). これより蛇の補題から完全列 $0 \to I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_1}(W_1) \to I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_2}(W_2) \to I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi_3}(W_3) \to 0$ を得る. これの Pontryagin 双対を取り $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ へ係数拡大することで完全列 $0 \to D(\Pi_3) \to D(\Pi_2) \to D(\Pi_1) \to 0$ が得られる ($\mathcal{O}_\mathcal{E}$ は $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ 上平坦であることに注意).

この完全性と今までの $D(\Pi)$ に関する議論から, 残りは絶対既約な $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ に対して $D_W^\natural(\Pi)$ が有限生成 $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ 加群であることを示せればよい. これは絶対既約な表現の分類結果を用いて $D_W^\natural(\Pi)$ を具体的に計算することで [Co10d] Théorème IV.2.1 で証明

されている (絶対既約な表現の分類及び絶対既約な Π に対する $D(\Pi)$ の計算については §6.2 でも解説する). □

上の関手を用いて, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ 及び $\mathrm{Rep}_L(G)$ に対する関手を次で定義する.

定義 4.3.

(1) 完全反変関手 $D : \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G) \to \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}$ を $D(\Pi) := \varprojlim_{n\geqq 0} D(\Pi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n)$ で定義する.

(2) 完全反変関手 $D : \mathrm{Rep}_L(G) \to \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ を $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ に対して Π の有界 $\mathcal{O}$ 格子 $\Pi_0 \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ を取り $D(\Pi) := D(\Pi_0)[1/\varpi]$ と定義する. これは Π_0 の取り方によらない.

主定理 2.9 を実現する関手はこの関手と Fontaine の圏同値 (定理 3.3) の合成によって次で定義される.

定義 4.4. 共変完全関手 $V : \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ を

$$V(\Pi) := V(D(\Pi)^{\vee})$$

で定義する. $V : \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G) \to \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G_{\mathbb{Q}_p})$ 及び $V : \mathrm{Rep}_L(G) \to \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ も同様に定義する.

§ 4.2. §3.2 の構成と §4.1 の関手の関係

ここでは, これまでに構成した 2 つの対応 $D \mapsto \Pi_\delta(D)$ と $\Pi \mapsto D(\Pi)$ の関係について解説する.

$\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ とし, $W \in \mathcal{W}^0(\Pi)$ を取る. Π の中心指標を δ とする. ψ_W の定義から連続 $\mathcal{O}$ 線形 B 同変写像

$$R_{\mathbb{Q}_p,W} : \Pi^* \to D_W(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbb{Q}_p : \mu \mapsto \left(R_{\mathbb{Z}_p,W}\left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\mu\right)\right)_{n\geqq 0}$$

を定義することができる (ここで $D_W(\Pi)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p$ への B 作用は ψ_W を使って同様に定義する) がこれは同型となる ([Co10d]Proposition III.2.9). 次に, $J^{\Pi}_{\mathbb{Z}_p^\times}(W) := I^{\Pi}_{\mathbb{Z}_p^\times}(W)+W \subset \Pi$ とすると, これは w の作用で保たれ $I^{\Pi}_{\mathbb{Z}_p}(W)$ に含まれる. 双対で定まる全射を $R'_{\mathbb{Z}_p^\times,W} : D_W(\Pi)^\natural \to J^{\Pi}_{\mathbb{Z}_p^\times}(W)^*$ と表す. これらを用いてコンパクト $\mathcal{O}$ 加群 $D_W(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ を

$$D_W(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 := \{(z_1, z_2) \in D_W(\Pi)^\natural \times D_W(\Pi)^\natural | R'_{\mathbb{Z}_p^\times,W}(z_1) = w(R'_{\mathbb{Z}_p^\times,W}(z_2))\}$$

で定義する. このとき, 次で定まる射

$$\alpha_{\mathbf{P}^1,W} : \Pi^* \to D_W(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 : \mu \mapsto (R_{\mathbb{Z}_p,W}(\mu), R_{\mathbb{Z}_p,W}(w\mu))$$

はコンパクト $\mathcal{O}$ 加群として同型になる ([Co10d]Proposition III.2.5).

次に, $R_{\mathbb{Z}_p,W}:\Pi^*\to D_W(\Pi)^\natural$ と $D_W(\Pi)^\natural\to D_W(\Pi)^\natural\otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+}\mathcal{O}_{\mathcal{E}}=D(\Pi):x\mapsto x\otimes 1$ の合成を

$$\beta_{\mathbb{Z}_p}:\Pi^*\to D(\Pi)$$

と表す. $D_W(\Pi)^\natural$ の $D(\Pi)$ への像は ψ が全射で作用する $D(\Pi)$ の格子となっているので定義 3.11 から包含関係

$$D(\Pi)^\natural\subseteq\beta_{\mathbb{Z}_p}(\Pi^*)\subseteq D(\Pi)^\sharp$$

を満たす. ψ と ψ_W の関係から任意の $\mu\in\Pi^*$ に対して $\beta_{\mathbb{Z}_p}\left(\begin{pmatrix}p^{-1}&0\\0&1\end{pmatrix}\mu\right)=\psi(\beta_{\mathbb{Z}_p}(\mu))$ を満たすので, 連続 $\mathcal{O}$ 線形 B 同変写像

$$\beta_{\mathbb{Q}_p}:\Pi^*\to D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p:\mu\mapsto\left(\beta_{\mathbb{Z}_p}\left(\begin{pmatrix}p^n&0\\0&1\end{pmatrix}\mu\right)\right)_{n\geqq 0}$$

を定義することができる. $\beta_{\mathbb{Q}_p}(\Pi^*)$ は $D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p$ のコンパクト部分 $\mathcal{O}[B]$ 加群であり, さらに包含関係 $D(\Pi)^\natural\subseteq\beta_{\mathbb{Z}_p}(\Pi^*)\subseteq D(\Pi)^\sharp$ があるので命題 3.15 及びその証明から包含関係

$$D(\Pi)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p\subseteq\beta_{\mathbb{Q}_p}(\Pi^*)\subseteq D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p$$

を満たすことが分かる. $U=\begin{pmatrix}1&\mathbb{Q}_p\\0&1\end{pmatrix}$ とすると $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbb{Q}_p})=(\Pi^*)^U$ となり, これは長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となる (包含関係 $\supseteq$ は $D(\Pi)^\sharp$ が T 捻れ元を持たないので $(D(\Pi)^\sharp\boxtimes\mathbb{Q}_p)^U=\{0\}$ となることから従う. $\mathcal{O}$ 上長さ有限であることは $\Pi^*\xrightarrow{\sim}D_W(\Pi)^\natural\boxtimes\mathbb{Q}_p$ であることから $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbb{Q}_p})=\mathrm{Ker}(D_W(\Pi)^\natural\to D(\Pi)^\sharp)\boxtimes\mathbb{Q}_p$ となりさらに $\mathrm{Ker}(D_W(\Pi)^\natural\to D(\Pi)^\sharp)$ が長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となることから従う. 最後に, 包含関係 $\subseteq$ は $\mathcal{O}$ 上長さ有限な smooth P 加群は必ず U が自明に作用するという事実から従う. 詳細は [Co10d]Proposition IV.3.2 参照). さらに, 重要な事実として任意の $\mu\in\Pi^*$ に対して $w_{\delta^{-1}}(\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\beta_{\mathbb{Z}_p}(\mu)))=\mathrm{Res}_{\mathbb{Z}_p^\times}(\beta_{\mathbb{Z}_p}(w\mu))$ が成り立つ ([Co10d]Proposition IV.4.2). この等式によって連続 $\mathcal{O}$ 線形 G 同変写像

$$\beta_{\mathbf{P}^1}:\Pi^*\to D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1:\mu\mapsto(\beta_{\mathbb{Z}_p}(\mu),\beta_{\mathbb{Z}_p}(w\mu))$$

を定義することができる. これは $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}\circ\beta_{\mathbf{P}^1}=\beta_{\mathbb{Q}_p}$ を満たす. このことから $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbf{P}^1})=(\Pi^*)^U\cap(\Pi^*)^{wUw}=(\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)}$ となることが容易に分かり (最後の等式は U と wUw で生成される部分群は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Q}_p)$ であることによる), 特に長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となる.

次に $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ の場合を考える. 自然な同型 $\Pi^*:=\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Pi,\mathcal{O})\xrightarrow{\sim}\varprojlim_{n\geqq 1}(\Pi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n)^*$ 及び定義 $D(\Pi)=\varprojlim_{n\geqq 1}D(\Pi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n)$ により, $\Pi\in\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ に対しても同様に射 $\beta_{\mathbb{Q}_p}:\Pi^*\to D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p$ 及び $\beta_{\mathbf{P}^1}:\Pi^*\to D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbf{P}^1$ を定義することができる. $\Pi\otimes_{\mathcal{O}}\mathcal{O}/\varpi^n$ の場合の極限を取ることでこの場合も $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbb{Q}_p})=(\Pi^*)^U$ が成り立ち, さらに $D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p$ のコンパクト $\mathcal{O}[B]$ 部分加群 $\beta_{\mathbb{Q}_p}(\Pi^*)$ も同様の包含関係 $D(\Pi)^\natural\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p\subseteq\beta_{\mathbb{Q}_p}(\Pi^*)\subseteq D(\Pi)^\sharp\boxtimes_{\delta^{-1}}\mathbb{Q}_p$ を満たすことが分かる.

最後に ϖ を可逆にすることで $D \in \mathrm{Rep}_L(G)$ の場合も $\beta_{\mathbb{Q}_p}, \beta_{\mathbf{P}^1}$ を定義することができて $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbb{Q}_p}) = (\Pi^*)^U$ が成り立つ．この場合は包含関係 $(D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbb{Q}_p)_b \subseteq \beta_{\mathbb{Q}_p}(\Pi^*) \subseteq (D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbb{Q}_p)_b$ が成り立つ.

以上の結果を使うと G 整合性に関して重要な次の結果 ([Co10d]Théorème IV.4.1) が示せる.

定理 4.5. $\Pi \in \mathrm{Rep}_*(G)$ $(* \in \{\mathrm{tors}, \mathcal{O}, L\})$ に対してその中心指標を δ とする．このとき組 $(D(\Pi), \delta^{-1})$ は G 整合的となる.

証明． 注意 3.18(1) から $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(\Pi)$ の場合は $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ の場合から従い, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}}(G)$ の場合は $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ の場合から従うので $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ の場合に示せばよい.

$\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ とする．注意 3.18 (1) により, $D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ のコンパクト部分 $\mathcal{O}[G]$ 加群 $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^*)$ が開部分群であることを示せばよい．これは, $D_W^+(\Pi) = I_{\mathbb{Z}_p}^{\Pi}(W)_0^* \subseteq \Pi^*$ であり, $\beta_{\mathbf{P}^1}(D_W^+(\Pi)) + \beta_{\mathbf{P}^1}(wD_W^+(\Pi))$ が $D(\Pi) \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ の開部分群であることから従う． □

今度は逆に G 整合的な組 (D, δ) から始めて, $D(\Pi_\delta(D))$ と D の比較に関する次の命題 ([Co10d] Proposition IV.4.10 (ii)) を紹介する.

命題 4.6. G 整合的な組 (D, δ) に対して (φ, Γ)-加群の同型

$$D(\Pi_\delta(D)) \xrightarrow{\sim} D^\vee$$

が存在する.

証明． この命題も, $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ の場合から, 残りの場合が従う．そこで $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ とする．まず, 前段の議論から $\mathcal{O}[P]$ 加群の完全列

$$0 \to (\Pi_\delta(D)^*)^U \to \Pi_\delta(D)^* \xrightarrow{\beta_{\mathbb{Q}_p}} D(\Pi_\delta(D))^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$$

が存在し, $\mathrm{Coker}(\beta_{\mathbb{Q}_p})$ は $D(\Pi_\delta(D))^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p / D(\Pi_\delta(D))^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \xrightarrow{\sim} D(\Pi_\delta(D))^\sharp / D(\Pi_\delta(D))^\natural$ の商なので長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となる．一方, 注意 3.18 (3) からコンパクト $\mathcal{O}[P]$ 加群の完全列

$$0 \to (D^\vee)^{\mathrm{nr}} \xrightarrow{z \mapsto (0,z)} (D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}} (D^\vee)^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p \to 0$$

が存在する．G 加群の同型 $\Pi_\delta(D)^* \xrightarrow{\sim} (D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$(定理 3.20 (2)) により両者を同一視すると, $(D^\vee)^{\mathrm{nr}}$ は $\Pi_\delta(D)^*$ の $\mathcal{O}$ 加群として長さ有限な部分 $\mathcal{O}[P]$ 加群となる (定義 3.11) ので (等号 $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbb{Q}_p}) = (\Pi_\delta(D)^*)^U$ の証明と同様の議論で)$(D^\vee)^{\mathrm{nr}} = (\Pi_\delta(D)^*)^U$ となることが示せる．よって, コンパクト $\mathcal{O}[P]$ 加群の連続単射準同型 $(D^\vee)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbb{Q}_p \hookrightarrow D(\Pi_\delta(D))^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbb{Q}_p$ で余核が長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となるものが得られる．このとき命題 3.15 から (φ, Γ)-加群の同型 $D^\vee \xrightarrow{\sim} D(\Pi_\delta(D))$ が存在することが分かる． □

§ 5. 階数 2 の (φ, Γ)-加群の G 整合性

この節では階数 2 の絶対既約な (φ, Γ)-加群 D に対して組 (D, δ_D) が G 整合的であること (定理 3.21 (ii) の主張の一部) の証明の概略について解説する.

§ 5.1. 2 次元クリスタベリン表現に対する明示的 p 進局所 Langlands 対応

ここでは Berger-Breuil[BB10] による 2 次元クリスタベリン (cristabelline) 表現に対する p 進局所 Langlands 対応に関する結果について解説する. ここで, $V \in \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ がクリスタベリンであるとは $\mathbb{Q}_p$ のある有限次アーベル拡大 K が存在して $V|_{G_K}$ が G_K のクリスタリン表現となることとする. [BB10] では絶対既約な 2 次元クリスタベリン表現に対して G の L 上のユニタリー Banach 表現 $\Pi(V)$ を明示的に構成し, それの双対 $\Pi(V)^*$ の B への制限が, §3 で構成した B の表現 $((D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ と L 上の位相的 B 加群として同型であることを具体的な計算によって証明した. この結果は G 整合性の証明の基礎となるだけでなく, §6.3 で解説する主定理 2.9 (1) の証明の基礎にもなっている非常に重要な結果である.

$V \in \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ を絶対既約な 2 次元クリスタベリン表現とする. V の Hodge-Tate 重みは $\{0, k\}$ で, さらに $k \geqq 1$ であると仮定する. 本節 §5.1 では, V に付随する $W_{\mathbb{Q}_p}$ の L 上の Weil-Deligne 表現 $D_{\mathrm{pst}}(V)$ は Frobenius 半単純であると仮定する. このとき, 係数 L を適当に大きくすれば, 局所定数指標 $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \xrightarrow{\sim} W_{\mathbb{Q}_p}^{\mathrm{ab}} \to L^\times$ が存在して, $W_{\mathbb{Q}_p}$ の表現として $D_{\mathrm{pst}}(V) = L(\delta_1) \oplus L(\delta_2)$(かつ $N = 0$) と書ける. V の絶対既約性と $D_{\mathrm{cris}}(V)$ の弱許容性 (weak admissibility) より, 不等式 $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) = -k$ 及び $-k < v_p(\delta_i(p)) < 0$ $(i = 1, 2)$ が成り立ち, $D_{\mathrm{pst}}(V)$ が Frobenius 半単純であるという仮定のもとでは, $\delta_1(p) \neq \delta_2(p)$ が成り立つ. 逆に, ある $k \geqq 1$ に対してこの不等式を満たす $W_{\mathbb{Q}_p}$ の表現 $L(\delta_1) \oplus L(\delta_2)$ で $\delta_1(p) \neq \delta_2(p)$ となるものがあれば, Hodge-Tate 重み $\{0, k\}$ となるクリスタベリン表現 V で $D_{\mathrm{pst}}(V) = L(\delta_1) \oplus L(\delta_2)$ となるものが同型を除き一意に存在する ([BB10]Proposition 2.4.5).

以下, このような V を一つ固定して考える. この V に対して, 定理 2.18 において定義した G の局所代数的な表現 $\pi^{\mathrm{alg}}(V)$ は

$$\pi^{\mathrm{alg}}(V) = \mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2 |-|^{-1})_{\mathrm{sm}} \otimes_L \mathrm{Sym}^{k-1} L^2$$

となることに注意する.

[BB10] で定義された V に対応する G の表現 $\Pi(V)$ は, この $\pi^{\mathrm{alg}}(V)$ を稠密な部分 $L[G]$ 加群として含む G の L 上のユニタリー Banach 表現である. この $\Pi(V)$ は, $\Pi_\delta(\mathcal{E})$ の記述で用いた連続誘導表現を一般化した $\mathcal{C}^r$ 級誘導表現というものを使って定義される. そこでまずは, p 進的な $\mathcal{C}^r$ 級関数の定義を復習することから始めたい ([Co10a] I.5, [BB10]§4.1) .

定義 5.1. $r \in \mathbb{R}_{\geqq 0}$ とする. $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ が $\mathcal{C}^r$ 級関数であるとは (f の Mahler 展開を $f = \sum_{n=0}^\infty a_n(f) \binom{x}{n}$ としたとき), $n^r |a_n(f)| \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことと

定義する. $\mathcal{C}^r$ 級関数全体からなる $\mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ の部分 L ベクトル空間を $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ と表す. $f \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ に対して f の $\mathcal{C}^r$ ノルムを $|f|_r := \sup_{n \geqq 0}(n+1)^r |a_n(f)|$ と定義すると, $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ は L 上の Banach 空間となる.

注意 5.2. この $\mathcal{C}^r$ 級関数の定義は実解析における $\mathcal{C}^r$ 級関数の p 進類似になっている. 実際に, $r \in \mathbb{Z}_{\geqq 1}$ のとき, $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ は r 階微分可能で r 階導関数が連続であるような $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, L)$ たちのなす部分 L ベクトル空間と一致する. これより特に, $\mathbb{Z}_p$ 上の局所解析的な関数の空間 $\mathrm{LA}(\mathbb{Z}_p, L)$ は任意の r に対して $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ に含まれる.

ここで, $\mathcal{C}^r$ 級関数の非自明な例として次の補題 ([Co10a] Proposition I.6.3) を紹介する.

補題 5.3. $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to L^\times$ を $v_p(\delta(p)) > 0$ を満たす連続準同型とする. このとき, 任意の $0 \leqq r < v_p(\delta(p))$ に対して, $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ 上の連続関数 $z \mapsto \delta(z)$ は $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{C}^r$ 級関数に一意的に延びる.

$r := -v_p(\delta_1(p))$ とおく. 連続誘導表現の場合と同様に, $\mathcal{C}^r$ 級誘導表現

$$\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2 x^{k-1}|-|^{-1})_{\mathcal{C}^r} := \mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3) \otimes (\delta_1 \circ \det)$$

を ($\delta_3 := \delta_1^{-1}\delta_2 x^{k-1}|-|^{-1}$ とおき) 次のように定義する. まず, 表現空間を

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3) := \{F : \mathbb{Q}_p \to L : \text{連続} \mid F|_{\mathbb{Z}_p} \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L) \text{ で } \mathbb{Z}_p \setminus \{0\} \text{ 上の関数}\\ \delta_3(z)F(1/z) \text{ は } \mathbb{Z}_p\text{上の } \mathcal{C}^r\text{級関数に延びる}\ \}\end{aligned}$$

と定義する. $F \in \mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3)$ に対して $F_1, F_2 \in \mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ を $F_1(z) := F(pz), F_2(z) := \delta_3(z)F(1/z)$ と定義し, $|F|_r := \max\{|F_1|_r, |F_2|_r\}$ と定義すれば, このノルムによって $\mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3)$ は L 上の Banach 空間になる. [BB10]Lemme 4.2.1 より, $F \otimes (\delta_1 \circ \det) \in \mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3) \otimes (\delta_1 \circ \det)$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$ に対して

$$g^{-1}F(z) := \delta_1(ad-bc)^{-1}\delta_3(ad-bc)^{-1}\delta_3(cz+d)F\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$

と作用を定めることで, $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2 x^{k-1}|-|^{-1})_{\mathcal{C}^r}$ は G の L 上のユニタリー Banach 表現になる.

補題 5.4. $0 \leqq j < r$ を満たす任意の j に対して $\mathbb{Q}_p$ 上の連続関数 $z \mapsto z^j$ は $\mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3)$ の元になる.

証明. $\mathcal{C}^r(\mathbf{P}^1, L)(\delta_3)$ の定義から, $\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ 上の関数 $z \mapsto \delta_3(z)1/z^j = \frac{\delta_2(z)}{\delta_1(z)|z|}z^{k-1-j}$ が $\mathbb{Z}_p$ 上の $\mathcal{C}^r$ 級関数に延びることを示せばよい. 弱許容性から $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) =$

$-k$ が成り立つので, 不等式 $v_p(\frac{\delta_2(p)}{\delta_1(p)|p|}p^{k-1-j}) = -v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) + k - j = -2v_p(\delta_1(p)) - j = 2r - j > r$ が成り立つ. よって補題 5.3 から従う. □

以上の準備の下, G の L 上のユニタリー Banach 表現 $\Pi(V)$ を次で定義する ([BB10] Définition 4.2.4).

定義 5.5. M を, $0 \leqq j < r$ を満たす全ての整数 j に対する $(z \mapsto z^j) \otimes (\delta_1 \circ \det)$ で生成される $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2 x^{k-1}|-|^{-1})_{\mathcal{C}^r}$ の部分 $L[G]$ 加群の閉包とする. このとき G の L 上のユニタリー Banach 表現 $\Pi(V)$ を

$$\Pi(V) := \mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2 x^{k-1}|-|^{-1})_{\mathcal{C}^r}/M$$

と定義する.

次の定理が [BB10] の主定理である ([BB10]Théorème 5.2.7).

定理 5.6. L 上の位相的 B 加群の同型

$$((D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} \Pi(V)^*$$

が存在する.

注意 5.7. V の既約性と注意 3.12 (4), 注意 3.13 及び注意 3.18 (3) から B 加群の射 $\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p} : (D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} ((D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ は同型である.

注意 5.8. この定理の証明は難しい. 証明では, $D_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ の情報から $V^*(1)$ を経由せずに直接 $D(V^*(1)) = D(V)^\vee$ の情報, より正確にはエタール (φ, Γ) 加群の解析版である Robba 環上の (φ, Γ) 加群 $D_{\mathrm{rig}}(V^*(1))$ の情報を復元する Berger の理論 ([Be02], [Be04]) を用いる. この理論を用いて, $(D(V)^\vee)^\sharp$ を φ の固有ベクトルからなる $D_{\mathrm{cris}}(V^*(1))$ の基底を用いて具体的に記述し, 基底の係数に現れる Robba 環の元から Amice 変換の $\mathcal{C}^r$ 級版により $\mathcal{C}^r(\mathbb{Z}_p, L)$ の連続双対の元 (order r の tempered distribution と呼ばれる) が得られる ([BB10]Théorème 3.4.2). こうして得られる tempered distribution を用いることで定理の左辺から右辺への射が構成される.

この定理と前節までに紹介した B 加群 $((D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ の性質から次の系が得られる ([BB10] Corollaire 5.3.2). (φ, Γ)-加群を用いない G の表現論のみによるこの系の証明は (筆者の知る限り) 現在までに知られていない.

系 5.9. $\Pi(V)$ はゼロではなく, 位相的絶対既約な $\mathrm{Rep}_L(G)$ の対象となる. より強く, $\Pi(V)$ は L 上の P の表現として位相的絶対既約である.

証明. $((D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ はゼロでなく, 命題 3.15 (2) から $((D(V)^\vee)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ は L 上の位相的絶対既約な P の表現となるので, 定理 5.6 から $\Pi(V)$ もゼロでなく, L 上の位相的

絶対既約な P の表現となる．次に, $\Pi(V)$ が許容的であることを証明する．「捻れ $\mathcal{O}$ 加群上の中心指標を持つ長さ有限 smooth G 加群は許容的である」という事実 (§6.1 参照) を用いれば, $D(V)^\vee$ の $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ 格子 $D_0 \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_\mathcal{E}}$ に対して $(D_0^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p) \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}/\varpi \xrightarrow{\sim} (D_0 \otimes_\mathcal{O} \mathcal{O}/\varpi)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p$ が長さ有限のコンパクト $\mathcal{O}[P]$ 加群となる (命題 3.15 (2)) ことと定理 5.6 から $\Pi(V)$ の許容性を示すことが出来る．また, 上のカギ括弧で囲んだ事実を用いずに, 定理 5.6 の同型の具体的な構成を用いたより直接的な $\Pi(V)$ の許容性の証明もある ([BB10]Corollaire 5.3.3 の証明). □

以上の系として階数 2 の場合の G 整合性の証明の出発点となる次の結果が得られる ([Co10d] Théorème IV.4.12).

系 5.10. $V \in \mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ を絶対既約 *2*次元クリスタベリン表現とし, $D := D(V)^\vee$ とおく．このとき組 (D, δ_D) は G 整合的となる．さらにこのとき B 同変な位相同型

$$D^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}} (D^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} \Pi(V)^*$$

(注意 5.7) は G 同変になる．

証明． 簡単のため $\Pi := \Pi(V)$ とおく．まず, 系 5.9 から $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ となり, Π の中心指標は δ_D^{-1} なので, 定理 4.5 から組 $(D(\Pi), \delta_D)$ は G 整合的になる．さらに, 定理 5.6 の同型から $(\Pi^*)^U = 0$ となることが容易に分かるので, §4.2 で定義した写像 $\beta_{\mathbb{Q}_p} : \Pi^* \xrightarrow{\beta_{\mathbf{P}^1}} D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\mathrm{Res}_{\mathbb{Q}_p}} (D(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ は $\mathrm{Ker}(\beta_{\mathbb{Q}_p}) = (\Pi^*)^U = 0$ を満たす, つまり単射となる．この写像は包含関係 $(D(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \subseteq \beta_{\mathbb{Q}_p}(\Pi^*) \subseteq (D(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ を満たし (§4.2), 商 $(D(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}/(D(\Pi)^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} D^\sharp/D^\natural$ は有限次元 L ベクトル空間 (注意 3.14(2)) なので, $\mathrm{Coker}(\beta_{\mathbb{Q}_p})$ も L 上有限次元になる．よって, 定理 5.6 の同型と $\beta_{\mathbb{Q}_p}$ を合成することで, 余核が有限次元 L ベクトル空間となる L 上の局所コンパクトな P 加群の連続単射準同型 $(D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \hookrightarrow (D(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ を得る．命題 3.15 (1) から, この射は (φ, Γ)-加群の単射 $D \hookrightarrow D(\Pi)$ から誘導され, 余核が有限次元であることから, この単射は同型でなければならないことが分かる．よって, 組 (D, δ_D) も G 整合的となり, 注意 5.7 から, G 同変な単射 $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^* \xrightarrow{\sim} D^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \hookrightarrow D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$ も同型となり系が従う． □

§ 5.2. クリスタリン表現の Zariski 稠密性

ここでは, p 進 Galois 表現の普遍的な族が持つ性質であるクリスタリン表現の Zariski 稠密性について解説する．

まずは Galois 表現の変形理論を復習することから始めたい．環 $A \in \mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ に対して, 圏 $\mathrm{Rep}_A(G_{\mathbb{Q}_p})$ を連続 A 線形な $G_{\mathbb{Q}_p}$ 作用を持つ有限自由 A 加群からなる圏と定義する．k 上の $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元表現 $\overline{V} \in \mathrm{Rep}_k(G_{\mathbb{Q}_p})$ を一つ固定する．$A \in \mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ に対して, $V_A \in \mathrm{Rep}_A(G_{\mathbb{Q}_p})$ と $G_{\mathbb{Q}_p}$ の k 上の表現としての同型 $\iota_A : V_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A \xrightarrow{\sim} \overline{V}$ からなる組 (V_A, ι_A) を $\overline{V}$ の A 上の変形という (ここで $\mathfrak{m}_A$ は A の極大イデアルとする). $\overline{V}$ の A

上の 2 つの変形 (V_A, ι_A) と (V'_A, ι'_A) が同値であるとは, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の A 上の表現としての同型 $f: V_A \xrightarrow{\sim} V'_A$ で $\iota'_A \circ f(\mathrm{mod}\, \mathfrak{m}_A) = \iota_A$ となるものが存在することと定義する. $\overline{V}$ の A 上の変形の同値類の集合を $\mathrm{Def}_{\overline{V}}(A)$ と表す. $\mathrm{Def}_{\overline{V}}(A)$ の同値類 $[(V_A, \iota_A)]$ と局所 $\mathcal{O}$ 代数の準同型 $f: A \to A'$ に対して, 底変換によって同値類 $[(V_A \otimes_{A,f} A', \iota_A \otimes \mathrm{id}_{A'})] \in \mathrm{Def}_{\overline{V}}(A')$ を対応させることで, $\mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ から集合の圏 (Sets) への共変関手

$$\mathrm{Def}_{\overline{V}} : \mathrm{Comp}_k(\mathcal{O}) \to (\mathrm{Sets}) : A \mapsto \mathrm{Def}_{\overline{V}}(A)$$

を定義する.

ここで, 簡単のため $\mathrm{End}_{k[G_{\mathbb{Q}_p}]}(\overline{V}) = k$ であると仮定する. このとき, 関手 $\mathrm{Def}_{\overline{V}}$ は表現可能となる ([Ma89]). そこで, この関手を表現する $\mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ の対象を $R_{\overline{V}}$ と表し, $\overline{V}$ の $R_{\overline{V}}$ 上の普遍変形を $(V^{\mathrm{univ}}, \iota^{\mathrm{univ}})$ と表す. $R_{\overline{V}}$ を $\overline{V}$ の普遍変形環と呼ぶ. $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ の閉点のなす集合を $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_0$ と表す. 環 $R_{\overline{V}}$ は $\mathcal{O}[[T_1, \cdots, T_d]]$ という形の環の商環と同型になるので, $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_0$ の各点 x に対してその剰余体 L_x は L の有限次拡大になる. そこで, 各閉点 x に対して自然な射を $\iota_x : R_{\overline{V}}[1/p] \to L_x$ と表し, L_x の整数環を $\mathcal{O}_x$, $V_x := V^{\mathrm{univ}} \otimes_{R_{\overline{V}}, \iota_x} \mathcal{O}_x \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_x}(G_{\mathbb{Q}_p})$ と表す.

以上の設定で, $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_0$ の部分集合 $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}} := \{x \in \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_0 \mid V_x[1/p]\ &\text{は絶対既約クリスタリン表現} \\ &\text{かつ } D_{\mathrm{pst}}(V_x[1/p]) \text{ は Frobenius 半単純 }\}\end{aligned}$$

で定義し, この部分集合の $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ の中での Zariski 閉包を $\overline{\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}}$ と表す.

定理 5.11. $\overline{\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}}$ は空でなく, $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ の既約成分の和になる. 特に, $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ が既約なときは

$$\overline{\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}} = \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{red}}$$

となる.

注意 5.12.

(1) この定理の証明は本稿では説明しない. この定理は, 保型的な p 進 Galois 表現の Zariski 稠密性に関する Gouvêa の予想 ([Go90] Conjecture in p.108) の Gouvêa-Mazur による証明 ([GM97]) の p 進類似として, Colmez と Kisin によってそれぞれ独立に証明されている ([Co08] Théorème 5.4, [Ki10] Corollary 1.10). Gouvêa-Mazur による証明では, p 進保型形式の族 (Coleman 族) に付随する p 進 Galois 表現の族のなす infinite fern と呼ばれるものが重要であったが, Colmez と Kisin はそれぞれ独立な方法で infinite fern の局所類似を構成することで定理を証明している.

(2) [Co08], [Ki10] では, $\mathrm{End}_{k[G_{\mathbb{Q}_p}]}(\overline{V}) \neq k$ の場合も扱っているので, 普遍枠付き変形環に対して同内容の主張の定理を証明しているが, 普遍変形環及び versal 変形環に対し

ても全く同じ手法で同じ内容の定理が証明できる．さらにより正確には, [Co08] では (絶対既約という条件をつけない) クリスタリン表現からなる部分集合の Zariski 稠密性を, [Ki10] では (絶対既約という条件をつけない)benign という弱い条件を満たすクリスタリン表現からなる部分集合の Zariski 稠密性を明示的には証明しているが, 両者の証明をよく読めば, どちらも実際には $D_{\mathrm{pst}}(-)$ が Frobenius 半単純となる絶対既約クリスタリン表現の稠密性も証明していることがわかる．応用では, この条件を付けた場合の稠密性が必要である．

(3) $\mathrm{End}_{k[G_{\mathbb{Q}_p}]}(\overline{V}) \neq k$ の場合は, 普遍変形環の代わりに, いつでも存在する普遍枠付き変形環または versal 変形環 ([Ma89]) を考えれば, 定理と同様の結果が成り立つ．

(4) $p \geqq 3$ の場合は, 全ての場合に $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ または versal 変形環の Spec は既約であり, $D_{\mathrm{pst}}(-)$ が Frobenius 半単純となる絶対既約クリスタリン表現が Zariski 稠密に含まれていることが証明されている ([Co08] Théorème 5.4, [Ki10]Corollary 1.11, [Bo10] Theorem 1.1, [BJ14]).

(5) $p = 2$ の場合は, 普遍変形環または普遍枠付き変形環 $R_{\overline{V}}$ に対して, $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ は既約にはならない． このときは, $\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ の既約成分は 2 個であり, それぞれの既約成分の中に $D_{\mathrm{pst}}(-)$ が Frobenius 半単純となる絶対既約クリスタリン表現が Zariski 稠密に含まれていることがほとんどの場合に証明されている ([Ch09], [CDP13a]). 特に, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の任意の 2 次元 L 表現 V に対して, 適当に $\mathcal{O}$ 格子 $V_0 \subseteq V$ を取れば, $\overline{V} := V_0 \otimes_{\mathcal{O}} k$ に対して $\overline{\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}} = \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{red}}$ を満たすようにできる．

§ 5.3. G 整合性の証明

ここではクリスタリン表現の場合の G 整合性とクリスタリン表現の Zariski 稠密性定理を用いて, 任意の階数 2 の (φ, Γ)-加群 D に対して組 (D, δ_D) が G 整合的であることを証明する．

クリスタリン表現の Zariski 稠密性定理を用いるためには, 今まで構成してきた表現の対応を表現の変形に対して拡張する必要がある．そこでまずは $A \in \mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ 係数のエタール (φ, Γ)-加群の圏の定義を復習することから始めたい．$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hat{\otimes} A := \varprojlim_{n \geqq 0} \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}} A/\mathfrak{m}_A^n$ とおく． 半線形連続な (φ, Γ)-作用を持つ有限自由 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hat{\otimes} A$ 加群 D で各 $n \geqq 1$ に対して $D \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ となるもののなす圏を $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hat{\otimes} A}$ と表す．Fontaine の関手 (定理 3.3) は A 係数版の圏同値 $D : \mathrm{Rep}_A(G_{\mathbb{Q}_p}) \xrightarrow{\sim} \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hat{\otimes} A}$ を誘導し, この圏同値は係数の底変換を取る操作と可換になる．§3 で (φ, Γ)-加群に対して定義した様々な関手は A 係数の場合に自然に拡張できる: $D_A \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \hat{\otimes} A}$ に対して, $D_A^\sharp := \varprojlim_{n \geqq 0} (D_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n)^\sharp$, $D_A \boxtimes_{\delta_{D_A}} \mathbf{P}^1 := \varprojlim_{n \geqq 0} (D_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n) \boxtimes_{\delta_{D_A}} \mathbf{P}^1$, $D_A^\sharp \boxtimes_{\delta_{D_A}} \mathbf{P}^1 := \varprojlim_{n \geqq 0} (D_A \otimes_A A/\mathfrak{m}_A^n)^\sharp \boxtimes_{\delta_{D_A}} \mathbf{P}^1$ と定義する．以上の準備の下, 次の §5 の主定理を証明する ([Co10d] Théorème II.3.3).

定理 5.13. $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{E}}$ を階数 2 のエタール (φ, Γ)-加群とする．このとき組 (D, δ_D) は G 整合的になる．

証明． $V := V(D)$ とおく．定理 5.11 と注意 5.12 (4),(5) から V の $\mathcal{O}$ 格子 $V_0 \subseteq V$ を適当に選べば, $\overline{V} := V_0 \otimes_{\mathcal{O}} k$ の普遍変形環 $R_{\overline{V}}$(存在しない場合は普遍枠付き変形環, または versal 変形環) で, $\overline{\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}} = \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ を満たすように出来る．以下, このような V_0 を一つ固定する． $X := \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$, $X_{\mathrm{cris}} := \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}$ とし, $R := \mathrm{Im}(R_{\overline{V}} \to (R_{\overline{V}}[1/p])/\sqrt{\{0\}})$ とおく． $V^{\mathrm{univ}} \otimes_{R_{\overline{V}}} R$ に対応する (φ, Γ)-加群を $D_R := D(V^{\mathrm{univ}} \otimes_{R_{\overline{V}}} R) \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hat{\otimes} R}$ と表す．各閉点 $x \in X$ に対して $V_x \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_x}(G_{\mathbb{Q}_p})$ に対応する (φ, Γ)-加群を $D_x := D(V_x) \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hat{\otimes}\mathcal{O}_x}$ と表す．

この状況で, まずは $D_R^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1$ が G 作用で安定であることを次のようにして示す． $\overline{\mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])_{\mathrm{cris}}} = \mathrm{Spec}(R_{\overline{V}}[1/p])$ であるから, 自然な連続準同型 $\prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} \iota_x : R \hookrightarrow \prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} \mathcal{O}_x$ は単射である． R はコンパクトなので, この射の像もコンパクト, 特に閉集合となり, R の位相は $\prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} \mathcal{O}_x$ からの誘導位相と一致する．これから, 自然な射 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hat{\otimes} R \hookrightarrow \prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hat{\otimes}\mathcal{O}_x$ も単射となり, さらにこの射の像は閉で, $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hat{\otimes} R$ の位相は誘導位相と一致することも分かる (例えば, §3.2.1 の $A \in \mathrm{Comp}_k(\mathcal{O})$ 係数版, つまり位相的 A 加群の同型 $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\hat{\otimes} A = \mathcal{C}^0(\mathbb{Z}_p, A) \oplus A[[T]]$ を用いると容易に示せる)．よって, 自然な射 $D_R \hookrightarrow \prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} D_x$ も同様の性質を持ち, $D \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$ は $D \oplus D$ と同相なので, 自然な G 加群の射 $D_R \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 \hookrightarrow \prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} D_x \boxtimes_{\delta_{D_x}} \mathbf{P}^1$ も同様の性質を持つ．この埋め込みによって, 等号 $D_R^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 = D_R \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 \cap (\prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} D_x^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_x}} \mathbf{P}^1)$ が成り立つことを次のようにして示す (これが成り立てば, 系 5.10 と注意 3.18(1) から, $D_R^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1$ が G 作用で安定であることが分かる)．包含関係 $D_R^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 \subseteq D_R \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 \cap (\prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} D_x^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_x}} \mathbf{P}^1)$ は明らか．逆の包含関係は, $D_R \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1$ が $\prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} D_x \boxtimes_{\delta_{D_x}} \mathbf{P}^1$ の中で閉であることから, $D_R \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 \cap (\prod_{x \in X_{\mathrm{cris}}} D_x^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_x}} \mathbf{P}^1)$ は $D_R \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1$ のコンパクト部分 $R[B]$ 加群となるので, 命題 3.15(2)(を各 $D_R \otimes_R R/\mathfrak{m}_R^n$ に対して適用すること) から従う．

次に, 固定した V_0 に対応する閉点を $x_0 \in X$ とし (このとき同型 $V_0 \xrightarrow{\sim} V \otimes_{R, \iota_{x_0}} \mathcal{O}$ が存在する), $D_0 := D(V_0)$ とおく．このとき, 各 $n \geqq 1$ に対して $R \xrightarrow{\iota_{x_0}} \mathcal{O} \to \mathcal{O}/\varpi^n$ により誘導される射 $D_R^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_R}} \mathbf{P}^1 \to (D_0 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D_0}} \mathbf{P}^1$ の像はコンパクトで, かつ G 作用で安定である．さらに, この像は開であることが証明されている ([Co10d]Proposition II.2.15 の証明を参照)．よって注意 3.18 (1) から $(D_0 \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n, \delta_D)$ は G 整合的となり, 射影極限を取ることで (D_0, δ_{D_0}) も G 整合的となる．最後に, p を可逆にすることで, (D, δ_D) の G 整合性を得る．

□

§ 6. 主定理 2.9 の証明

§ 6.1. 主定理 2.9 (1) の精密化

$\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ は位相的絶対既約とする．主定理 2.9 (1) において示すべき主張は, Π の有界 $\mathcal{O}$ 格子 Π_0 に対して $\Pi_0 \otimes_{\mathcal{O}} k$ が $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$ の対象となる, 特に長さ有限 $k[G]$ 加

群となることであった．これが示せたら §4 で定義した関手 $D:\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)\to\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}_{\mathrm{tors}}$ を用いて $V(\Pi)\in\mathrm{Rep}_L(G_{\mathbb{Q}_p})$ が定義できるようになるが, 主定理 (定理 2.9) の (2) を証明するためにはさらに (Π が non-ordinary ならば) $\dim_L V(\Pi)=2$ であることを示さなければならない．関手 $\Pi\mapsto D(\Pi)$ の完全性と中山の補題から, これは $\dim_k V(\Pi_0\otimes_{\mathcal{O}}k)=2$ であることと同値になる．よって主定理の (2) の証明のためには, $\Pi_0\otimes_{\mathcal{O}}k$ が長さ有限となるだけではなく, 具体的にどのような既約因子を持つかということまでも調べなければならない．そこでここでは主定理 2.9 (1) の主張をこの意味で精密化した Paskunas [Pa13] と Colmez-Dospinescu-Paskunas [CDP14] の定理について解説する．定理の証明については §6.3 で解説する．

まずは, Barthel-Livné [BL94] 及び Breuil [Br03a] による G の k 上の既約 smooth 表現の分類結果について簡単に復習することから始めたい．[BL94] によって次のことが知られている．連続準同型 $\delta_1,\delta_2:\mathbb{Q}_p^\times\to k^\times$ に対して, $\delta_1\neq\delta_2$ のとき $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1\otimes\delta_2)_{\mathrm{sm}}$ は絶対既約である．また, (並べ方も込めて)$(\delta_1,\delta_2)\neq(\delta_1',\delta_2')$ のとき $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1\otimes\delta_2)_{\mathrm{sm}}$ と $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1'\otimes\delta_2')_{\mathrm{sm}}$ は同型にはならない．$\mathrm{St}:=\mathrm{Ind}_B^G(\mathbf{1}\otimes\mathbf{1})_{\mathrm{sm}}/(\text{constant function on }G)$ とおくとこれは絶対既約で, $\delta_1=\delta_2$ のときは $k[G]$ 加群の分裂しない完全列

$$0\to k(\delta_1)\to\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1\otimes\delta_1)_{\mathrm{sm}}\to\mathrm{St}\otimes(\delta_1\circ\det)\to 0$$

がある．$\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1\otimes\delta_2)_{\mathrm{sm}}$ の部分商としては現れない中心指標を持つ G の絶対既約表現を supercuspidal 表現または supersingular 表現と呼ぶ (supersingular 表現は mod p Hecke 環を用いて全く異なる方法で定義される概念であるが, 両者の概念は一致することが証明されている)．我々の場合, つまり $G=\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合は, 絶対既約 supersingular 表現は [Br03a] によって完全に分類されている．より正確に, G の既約 supersingular 表現の同型類と $G_{\mathbb{Q}_p}$ の k 上の絶対既約 2 次元表現の同型類との間に標準的な全単射が存在することが証明されている ([Br03a]Corollaire 1.4)．これらの結果から, 中心指標を持つ G の k 上の絶対既約 smooth 表現は許容的であることが証明されている (逆に, G の k 上の絶対既約許容的 smooth 表現が中心指標を持つことは容易に示せる)．さらにこれから, 中心指標を持つ G の (一般には絶対既約でない)k 上の既約 smooth 表現は係数を k の適当な有限拡大に拡大すれば, 有限個の絶対既約表現の直和になる (特に許容的となる) ことが示されている ([Pa13]Proposition 5.3)．

局所類体論で mod p 円分指標に対応する連続準同型を $\omega:\mathbb{Q}_p^\times\to k^\times$ と表す．連続準同型 $\delta_1,\delta_2:\mathbb{Q}_p^\times\to k^\times$ に対して長さ有限半単純 $k[G]$ 加群

$$\pi\{\delta_1,\delta_2\}:=(\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1\otimes\delta_2\omega^{-1})_{\mathrm{sm}})^{\mathrm{ss}}\oplus(\mathrm{Ind}_B^G(\delta_2\otimes\delta_1\omega^{-1})_{\mathrm{sm}})^{\mathrm{ss}}\in\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$$

を定義する (ここで $(-)^{\mathrm{ss}}$ は $(-)$ の半単純化を表す)．以上の準備の下で主定理 2.9 (1) の精密化に関する次の定理 ([Pa13]Theorem 1.1, Theorem 11.1 ($p\geqq 5$), [CDP14]Theorem 1.4, Thorem 3.13. (iii) (for general p)) を紹介する (§6.3 でこの定理の証明の概略を解説する)．

定理 6.1. $\Pi\in\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ を位相的絶対既約とする．このとき $\Pi\in\mathrm{Rep}_G(L)$ であり, $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$ は次のいずれかを満たす．

(1) δ_1, δ_2 が存在して $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} \subseteq \pi\{\delta_1, \delta_2\}$ となる.

(2) k の 2次拡大を k', $\mathrm{Gal}(k'/k)$ の単位元でない元を σ 表す. ある連続指標 $\delta : \mathbb{Q}_p^{\times} \to (k')^{\times}$ で, δ の σ による捻り δ^{σ} が χ と等しくならないものが存在して, $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} \pi\{\delta, \delta^{\sigma}\}$ となる (ここで, 右辺は k' 上同様の仕方で定義されているものとする).

(3) $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$ は絶対既約 supersingular 表現となる.

さらに, Π が ordinary であることは, (1) を満たし, かつ $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} \not\subseteq \pi\{\delta_1, \delta_2\}$ となることと同値になる.

注意 6.2.

(1) 絶対既約 2 次元クリスタベリン表現 V に対して §5.1 で定義した $\Pi = \Pi(V)$ の場合は, 定理 6.1 を以下のように証明することができる. D_0 を $D(V)^{\vee}$ の $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ 格子とする. このとき, 定理 5.6 の B 加群の同型 $((D(V)^{\vee})^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}} \xrightarrow{\sim} \Pi(V)^*$ と関手 $D \mapsto D^{\sharp} \boxtimes \mathbb{Q}_p$ の完全性 (注意 3.14 (1)) から, 半単純コンパクト $k[B]$ 加群の同型 $((D_0 \otimes_{\mathcal{O}} k)^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p)^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\sim} ((\overline{\Pi(V)}^{\mathrm{ss}})^*|_B)^{\mathrm{ss}}$ が得られる (ここで右辺の一番外側の $(-)^{\mathrm{ss}}$ はコンパクト $k[B]$ 加群の半単純化を表す). $\overline{D} := D_0 \otimes_{\mathcal{O}} k$ とおく. $\overline{D}$ が絶対既約のときは, $\overline{D}^{\sharp} \boxtimes_{\delta_{D(V)}^{-1}} \mathbb{Q}_p$ は位相的絶対既約 (命題 3.15(2)) になる. $\overline{D}$ が絶対可約のときは, まずは簡単な考察から, $\overline{D}$ は k 上可約となる (つまり, $0 \to k_{\mathcal{E}}(\delta_2^{-1}\omega) \to \overline{D} \to k_{\mathcal{E}}(\delta_1^{-1}\omega) \to 0$ となる指標 $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^{\times} \to k^{\times}$ が存在する) か, または $\delta : \mathbb{Q}_p^{\times} \to (k')^{\times}$ で $\delta^{\sigma} \neq \delta$ となるものがあり, $0 \to k'_{\mathcal{E}}(\delta^{-1}\omega) \to \overline{D} \otimes_k k' \to k'_{\mathcal{E}}((\delta^{\sigma})^{-1}\omega) \to 0$ となることが分かる. $\overline{D}$ が k 上可約な場合, $\delta_{D(V)} (\mathrm{mod}\, \varpi) = \delta_1\delta_2\omega^{-1}$ であることから, §3.3 と同様な計算で, $k_{\mathcal{E}}(\delta_1^{-1}\omega)^{\sharp} \boxtimes_{\delta_D^{-1}} \mathbb{Q}_p$ 及び $k_{\mathcal{E}}(\delta_2^{-1}\omega)^{\sharp} \boxtimes_{\delta_D^{-1}} \mathbb{Q}_p$ は, それぞれ $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1})^*_{\mathrm{sm}}$ 及び $\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2\omega^{-1})^*_{\mathrm{sm}}$ の B への制限と同型となるので, $(\overline{D}^{\sharp} \boxtimes_{\delta_D^{-1}} \mathbb{Q}_p)^{\mathrm{ss}}$ は $(\pi\{\delta_1, \delta_2\}^*|_B)^{\mathrm{ss}}$ と同型になる. 同様に, $\overline{D}$ が k' 上可約になる場合は, $(\overline{D}^{\sharp} \boxtimes_{\delta_D^{-1}} \mathbb{Q}_p)^{\mathrm{ss}} \otimes_k k'$ は $(\pi\{\delta, \delta^{\sigma}\}^*|_B)$ と同型になることが分かる. 命題 3.15 と既約表現の分類結果を用いると, これらの B 加群としての計算結果から, $\overline{D}$ が絶対既約の場合は $\overline{\Pi(V)}^{\mathrm{ss}}$ は既約 supersingular 表現となり, $\overline{D}$ が可約の場合は, k 上可約かそうでないかに応じて, $\overline{\Pi(V)}^{\mathrm{ss}} \xrightarrow{\sim} \pi\{\delta_1, \delta_2\}$, または $\overline{\Pi(V)}^{\mathrm{ss}} \otimes_k k' \xrightarrow{\sim} \pi\{\delta, \delta'\}$ となることが分かる (詳しくは [Be10] を参照).

(2) 階数 2 の場合の G 整合性の証明 (定理 5.13) と同様に, 一般の Π に対する定理 6.1 の証明も変形理論的な議論によりクリスタリン表現の場合のこの結果が証明の出発点となる (§6.3 参照).

§ 6.2. 主定理 2.9(2) の証明

ここでは, 前節までの結果と定理 6.1 を用いて, 主定理 2.9(2) と p 進 Langlanda 対応と局所類体論との整合性 (定理 2.11) を証明する. 正確には, 定理 6.1 の後半の non-ordinary

な場合に関する主張は, これらの定理が証明された後に証明されるので, 定理 6.1 の前半の主張 (1), (2), (3) のみを用いてこれらの定理を証明する.

まずは, 中心指標を持つ G の k 上の絶対既約表現 π に対する $D(\pi)$ の計算が必要である. これについて, 次が知られている.

命題 6.3. 中心指標を持つ G の k 上の絶対既約表現 π 対して次が成立する.

(1) $\dim_k \pi = 1$ のとき $D(\pi) = 0$.

(2) $\pi = \mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{sm}}$ のとき $D(\pi) \xrightarrow{\sim} k_{\mathcal{E}}(\delta_2^{-1})$.

(3) $\pi = \mathrm{St} \otimes (\delta \circ \det)$ のとき $D(\pi) \xrightarrow{\sim} k_{\mathcal{E}}(\delta^{-1})$.

(4) π が supersingular のとき $D(\pi)$ は階数 2 で絶対既約となる.

証明. まず, π が $\mathcal{O}$ 加群として長さ有限ならば定義から $D(\pi) = 0$ となることに注意する. 残りの計算は [Co10d]Théorème IV.2.1, Proposition IV.4.17 を参照. □

これから, 主定理 (定理 2.9) の (2) の証明に入る. まずは, 関手 $\Pi \mapsto V(\Pi)$ が定理 2.9 (2) の 2 つの同型類の集合の間に写像を誘導することを証明する.

定理 6.4. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ を位相的絶対既約とする. $D(\Pi)$ はゼロ, または絶対既約かつ階数は 2 以下になる. さらに, Π が non-ordinary であることと, $D(\Pi)$ の階数が 2 であることは同値.

証明. まず, 関手 $\Pi \mapsto D(\Pi)$ の完全性と中山の補題から, $D(\Pi)$ の階数は $D(\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}})$ の階数と等しいので, 定理 6.1 と命題 6.3 とから, 定理の前半の階数に関する主張は従う.

次に, 後半の non-ordinary に関する主張を証明する. まず, Π が ordinary とすると (適当に係数を拡大すると), ある $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ が存在して, $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}} \subseteq (\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2)_{\mathrm{sm}})^{\mathrm{ss}}$ となる. よって, 命題 6.3 より, $D(\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}})$ の階数は 1 以下となる. 逆に, $D(\Pi)$ の階数が 1 以下とする. $D(\Pi) = 0$ ならば $D(\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}) = 0$ であり, これは $\overline{\Pi}^{\mathrm{ss}}$ が k 上有限次元のときにのみ起こる. このとき, Π も L 上有限次元で, 既約性から 1 次元 (指標) となり, 特に ordinary となる. 次に, $D(\Pi)$ の階数は 1 とする. このとき, Π は L 上有限次元ではない. δ を Π の中心指標とする (存在することは [DS13] による) と, §4.2 で定義した $L[G]$ 加群の連続準同型 $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^* \to D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ が存在する. Π の既約性によりこれは単射となる. さらに, 商 $D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}/{}^1 D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 (\hookrightarrow D^\sharp/D^\natural)$ は L 上有限次元であるので, Π の無限次元性と既約性より $\beta_{\mathbf{P}^1}$ は $\Pi^* \hookrightarrow D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ を経由することが分かる. 定理 3.20 と定理 4.5 より, $(D(\Pi), \delta^{-1})$ 及び $(D(\Pi)^\vee, \delta)$ は G 整合的であり, L 上の位相的 G 加群の同型 $D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \Pi_\delta(D(\Pi)^\vee)^*$ が存在する. よって, 双対を取ることで, Π は $\Pi_\delta(D(\Pi)^\vee)$ の商表現となる. 命題 3.26 より $\Pi_\delta(D(\Pi)^\vee)$ は連続誘導表現と同型なので, Π は ordinary となる.

最後に, $D(\Pi)$ が絶対既約であることを証明する. 今までの議論から, Π が non-ordinary の時に示せばよい. 背理法で, (係数を適当に拡大して) 完全列 $0 \to D_1 \to D(\Pi) \to D_2 \to 0$ で D_1, D_2 が階数 1 となるものが存在すると仮定する. まず, 上と同様の議論で, L 上の位相的 G 加群の単射 $\Pi^* \hookrightarrow D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \Pi_\delta(D(\Pi)^\vee)^*$ が存在する. 関手 $D \mapsto (D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ の完全性と自然な射 $D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \to (D^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ の核と余核は L 上有限次元であることから, 完全列 $0 \to D_1 \to D(\Pi) \to D_2 \to 0$ から得られる系列 $0 \to D_1^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \to D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \to D_2^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \to 0$ は有限次元 L ベクトル空間のずれを除いて完全である. 以上の議論から, Π は $\Pi_\delta(D_1^\vee)$ または $\Pi_\delta(D_2^\vee)$ の既約成分, または L 上有限次元 (既約性より指標) となるので, いずれの場合も Π は ordinary となり矛盾が生じる. よって $D(\Pi)$ は絶対既約である.

□

注意 6.5. Π が non-ordinary のとき, $D(\Pi)$ は階数 2 で絶対既約なので $D(\Pi)^\natural = D(\Pi)^\sharp$ となり, 定理 6.4 の証明と命題 3.15(2) より L 上の位相的 P 加群の同型 $\Pi^* \xrightarrow{\sim} D(\Pi)^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} (D(\Pi)^\sharp \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ が存在することが示せる. よって, Π は L 上の P 加群としても位相的絶対既約である.

この定理により, 定理 2.9 (2) の全単射性を主張する写像が定義された. 最後に, 階数 2 の場合の G 整合性に関する定理 3.21(特に, 同定理内の条件 (2) (ii) との同値性) を用いて定理 2.9 (2) の全単射性を証明する. 注意 2.10 (2) の主張の証明 ($\Pi(V) := \Pi_{\delta_{D(V)}}(D(V))$ と取ればよい), 局所類体論との整合性 (定理 2.11), 及び階数 3 以上の絶対既約な $D \in \Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ の非 G 整合性 (定理 3.21, 注意 3.22(4)) は, 今までの議論と次の証明から直ちに従うので読者への演習問題とする.

証明. (主定理 2.9(2) の全単射性の証明) まずは全射性を示す. $D \in \Phi\Gamma_{\mathcal{E}}^{\mathrm{et}}$ を階数 2 の絶対既約エタール (φ, Γ)-加群とする. 定理 5.13 から組 $(D^\vee, \delta_D^{-1})$ は G 整合的であり, 命題 4.6 から同型 $D \xrightarrow{\sim} D(\Pi_{\delta_D^{-1}}(D^\vee))$ が存在する. D の既約性と注意 3.18(3) と定理 3.20 から, P 加群としての同型 $\Pi_{\delta_D^{-1}}(D^\vee)^* \xrightarrow{\sim} D^\natural \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} (D^\natural \boxtimes \mathbb{Q}_p)_{\mathrm{b}}$ が存在するので, 命題 3.15(2) より $\Pi_{\delta_D^{-1}}(D^\vee)$ は (より強く)L 上の P 加群として位相的絶対既約である. また, 定理 6.4 の後半の主張から $\Pi_{\delta_D^{-1}}(D^\vee)$ は non-ordinary なので全射性が従う.

次に, 定理 3.21 の条件 (2)(ii) の δ の一意性に関する主張を用いて単射性を証明する. 2 つの non-ordinary 位相的絶対既約な Π_1, Π_2 に対して同型 $D(\Pi_1) \xrightarrow{\sim} D(\Pi_2) =: D$ が存在すると仮定する. δ_1, δ_2 をそれぞれ Π_1, Π_2 の中心指標とすると, 定理 4.5 から (D, δ_1^{-1}), (D, δ_2^{-1}) は G 整合的であり, 定理 3.21 の条件 (2)(ii) から $\delta_1 = \delta_2 (= \delta_D^{-1})$ となる. このとき, 注意 6.5 から同型 $\Pi_1^* \xrightarrow{\sim} D(\Pi_1)^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} D(\Pi_2)^\sharp \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1 \xrightarrow{\sim} \Pi_2^*$ が存在し, この双対を取って同型 $\Pi_1 \xrightarrow{\sim} \Pi_2$ を得る. □

§6.3. 主定理 2.9(1) の精密化の証明

まずは準備から始める. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(\mathcal{O})$ を捻れ $\mathcal{O}$ 加群上の smooth G 加群の圏とする. Pontryagin 双対により, この圏と反圏同値となる圏を $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro}}(\mathcal{O})$ と表す. 圏 $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro}}(\mathcal{O})$

の対象は, コンパクト $\mathcal{O}[[K]]$ 加群 M で $\mathcal{O}[[K]]$ 作用と両立する $\mathcal{O}$ 線形連続 G 作用を持つ, つまり $k \in K$ の作用と $[k] \in \mathcal{O}[[K]]$ の作用が一致するものからなる. $n \geqq 1$ と $\pi \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(\mathcal{O})$ に対して, $\pi[\varpi^n] := \{v \in \pi | \varpi^n v = 0\}$ とおく.

定義 6.6.

(1) $\pi \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(\mathcal{O})$ が許容的であるとは, 任意の $n \geqq 1$ と任意の開部分群 $H \subseteq G$ に対して, $\pi[\varpi^n]^H$ が長さ有限 $\mathcal{O}$ 加群となることと定義する.

(2) $\pi \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(\mathcal{O})$ が局所許容的 (locally admissible) であるとは, 任意の $v \in \pi$ に対して, $\mathcal{O}[G]v \subseteq \pi$ が許容的であることとする. 局所許容的 smooth G 加群からなる $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(\mathcal{O})$ の部分圏を $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})$ と表す.

注意 6.7.

(1) $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})$ はアーベル圏であり, さらに $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{sm}}(\mathcal{O})$ の中で部分商を取る及び帰納極限を取るという操作に関して安定である ([Em10a] Proposition 2.2.13).

(2) 定理 6.1 の証明では, 圏 $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})$ 及びその双対の圏を局所的に長さ有限なアーベル圏の一般論 ([Ga62]) の枠組みで調べることが重要になる. 実際に我々の場合, つまり $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合, 任意の $\pi \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}$ は局所的に長さ有限となる, つまり, 任意の $v \in \pi$ に対して $\mathcal{O}[G]v \subseteq \pi$ は長さ有限 $\mathcal{O}[G]$ 加群になることが知られている ([Em10a]Conjecture 2.3.7, Theorem 2.3.8).

$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}$ の Pontryagin 双対により定まる $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{pro}}(\mathcal{O})$ の部分圏を $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ と表す. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ の有界 $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq \Pi$ を一つ取る. このとき自然な同型 $\Theta^*(:= \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Theta, \mathcal{O})) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geqq 1}(\Theta \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^*$ が存在し, 各 $n \geqq 1$ に対して $(\Theta \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\Theta \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n, L/\mathcal{O}) \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})$ であり, さらに $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ は射影極限を取るという操作で安定なので $\Theta^* \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})$ となる. また各 $n \geqq 1$ に対して $\Theta^* \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n \xrightarrow{\sim} (\Theta \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}/\varpi^n)^*$ となることも容易に証明できる. [ST02a] より, 自然な射 $\Pi = \Theta[1/p] \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cont}}(\Theta^*, \mathcal{O})[1/p]$ は位相同型になる.

以上の準備の下で定理 6.1 の証明のアイデアを解説する. 位相的絶対既約な $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ に対してその有界 $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta \subseteq \Pi$ を一つ取る. 定理を証明するためには (i) $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ に現れる既約因子を決定し (ii) それぞれの既約因子に関して $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ での重複度を計算することが必要になる.

まず (i) の問題は圏 $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ の Block 分解を用いて調べる. π, π' を G の k 上の既約許容的 smooth 表現とする. このとき $\pi \sim \pi'$ であることを G の k 上の既約許容的 smooth 表現 $\pi_0 = \pi, \pi_1, \cdots, \pi_d = \pi'$ で各 $0 \leqq i \leqq d-1$ に対して π_i と π_{i+1} は次のいずれかの条件 (i)$\pi_i \xrightarrow{\sim} \pi_{i+1}$ (ii)$\mathrm{Ext}_G^1(\pi_i, \pi_{i+1}) \neq 0$ (iii)$\mathrm{Ext}_G^1(\pi_{i+1}, \pi_i) \neq 0$ を満たすものが存在することと定義する. これは G の k 上の既約許容的 smooth 表現の集合に同値関係を定める. $\mathfrak{B}$ をこの同値関係による同値類の一つとする. 全ての既約部分商が $\mathfrak{B}$ に含まれる対象からなる $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})$ の部分圏を $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$ と表す. 同様に全ての部分商

が π^* $(\pi \in \mathfrak{B})$ の形になる対象からなる $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ の部分圏を $\mathfrak{C}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$ と表す．このとき，局所的に長さ有限のアーベル圏の一般論 [Ga62] から $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})$ 及び $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ は部分圏の直積

$$\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{B}} \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}},\ \mathfrak{C}(\mathcal{O}) \xrightarrow{\sim} \prod_{\mathfrak{B}} \mathfrak{C}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$$

に分解する (ここで積は同値類 $\mathfrak{B}$ 全体を動く)．次に，Π のある有界 $\mathcal{O}$ 格子 Θ に対して $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k \in \mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$ となる (このとき任意の有界 $\mathcal{O}$ 格子 $\Theta' \subseteq \Pi$ も同じ条件を満たす) 対象からなる $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ の部分圏を $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ と表す．$\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ の分解から $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ の次の分解を得る．

命題 6.8. 圏 $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ は次の直和分解

$$\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathfrak{B}} \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$$

を持つ．特に，既約な $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ に対して $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ となる同値類 $\mathfrak{B}$ が唯一つ存在する．

証明． $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ をゼロでないとし，$\Theta \subseteq \Pi$ を有界 $\mathcal{O}$ 格子とする．$\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ の既約部分表現 π を一つとる．π を含む同値類を $\mathfrak{B}$ とし，Θ^* に対して $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ の分解を適用すると $\Theta^* = \Theta^*_{\mathfrak{B}} \oplus (\Theta^*)^{\mathfrak{B}}$(ここで $\Theta^*_{\mathfrak{B}} \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})_{\mathfrak{B}}$ で $(\Theta^*)^{\mathfrak{B}}$ は任意の既約部分商が $\mathfrak{B}$ の既約表現の双対と同型にならない) と分解する．同型 $\Theta^* \otimes_{\mathcal{O}} k \xrightarrow{\sim} (\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k)^*$ から $\Theta^*_{\mathfrak{B}} \neq 0$ となる．分解 $\Theta^* = \Theta^*_{\mathfrak{B}} \oplus (\Theta^*)^{\mathfrak{B}}$ の両辺に $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}^{\mathrm{cont}}(-,\mathcal{O})[1/p]$ を施すことで $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ の分解 $\Pi = \Pi_{\mathfrak{B}} \oplus \Pi^{\mathfrak{B}}$ (ここで $\Pi_{\mathfrak{B}} \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ はゼロでなく，$\Pi^{\mathfrak{B}}$ の任意の有界 $\mathcal{O}$ 格子 Θ' に対して $\Theta' \otimes_{\mathcal{O}} k$ の既約部分商は $\mathfrak{B}$ の表現の双対と同型にならない) を得る．$\Pi^{\mathfrak{B}} \neq 0$ ならばこの操作を帰納的に繰り返すことで，相異なる同値類 $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}, \mathfrak{B}_2, \cdots, \mathfrak{B}_d$ が存在して同様な分解 $\Pi = \Pi_{\mathfrak{B}_1} \oplus \cdots \oplus \Pi_{\mathfrak{B}_d} \oplus (\Pi)^{\cup_{i=1}^d \mathfrak{B}_i}$ を得る．ここで，コンパクト開プロ p 部分群 $K_1 := \begin{pmatrix} 1+p\mathbb{Z}_p & p\mathbb{Z}_p \\ p\mathbb{Z}_p & 1+p\mathbb{Z}_p \end{pmatrix}$ は G の k 上の任意の許容的 smooth 表現 τ に対して $\tau^{K_1} \neq 0$ となる (これは任意の有限 p 群 H と位数 p ベキ H 加群 $M \neq 0$ に対して $M^H \neq \{0\}$ となる (p-Sylow の定理) ことから従う) ので，Π の許容性からこの操作は有限回で止まり有限直和となる． □

この命題によって，同値類 $\mathfrak{B}$ を記述することが重要になるが，これに関して次の定理 ([Pa11]Corollary 1.2) が知られている．

定理 6.9. 同値類 $\mathfrak{B}$ が絶対既約表現を含むと仮定する．このとき，$\mathfrak{B}$ は次のいずれかの形の集合になる．

(1) 既約 supersingular な π があり，$\mathfrak{B} = \{\pi\}$.

(2) $\delta_1, \delta_2 : \mathbb{Q}_p^\times \to k^\times$ が存在して，$\mathfrak{B} = \{\pi\{\delta_1, \delta_2\}$ の既約因子 $\}$．より正確に，$\mathfrak{B}$ は次の集合となる．

(i) $\mathfrak{B} = \{\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_2\omega^{-1})_{\mathrm{sm}}, \mathrm{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \delta_1\omega^{-1})_{\mathrm{sm}}\}$ *if* $\delta_1/\delta_2 \neq \mathbf{1}, \omega^{\pm 1}$,

(ii) $\mathfrak{B} = \{\mathrm{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \delta_1\omega^{-1})_{\mathrm{sm}}\}$ *if* $\delta_1 = \delta_2, p \geqq 3$,

(iii) $\mathfrak{B} = \{\mathrm{Ind}_B^G(\delta_2\omega \otimes \delta_2\omega^{-1})_{\mathrm{sm}}, \delta_2 \circ \det, \mathrm{St} \otimes (\delta_2 \circ \det)\}$ *if* $\delta_1/\delta_2 = \omega, p \geqq 5$,

(iv) $\mathfrak{B} = \{(\delta_2\omega) \circ \det, \mathrm{St} \otimes ((\delta_2\omega) \circ \det), \delta_2 \circ \det, \mathrm{St} \otimes (\delta_2 \circ \det)\}$ *if* $\delta_1/\delta_2 = \omega, p = 3$,

(v) $\mathfrak{B} = \{\delta_1 \circ \det, \mathrm{St} \otimes (\delta_1 \circ \det)\}$ *if* $\delta_1 = \delta_2, p = 2$.

特に, $\mathfrak{B}$ が絶対既約表現を含めば $\mathfrak{B}$ の全ての表現は絶対既約になる.

注意 6.10. 絶対既約表現を含まず, かつ $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ が非自明な同値類 $\mathfrak{B}$ に対しては, 指標 $\delta : \mathbb{Q}_p^\times \to (k')^\times$ で $\delta^\sigma \neq \delta$ となるものが存在して,

$$\mathfrak{B} = \left\{ \left(\mathrm{Ind}_B^G(\delta \otimes \delta^\sigma\omega^{-1})_{\mathrm{sm}} \bigoplus \mathrm{Ind}_B^G(\delta^\sigma \otimes \delta\omega^{-1})_{\mathrm{sm}} \right)^{\sigma=1} \right\}$$

となる ([Pa13]Corollary 5.44).

$\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ の有界 $\mathcal{O}$ 格子 Θ と各 $\pi \in \mathfrak{B}$ に対して π の $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ における重複度を $d_\Pi(\pi) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とおく (これは Θ の取り方によらない).

以上の議論から, 定理 6.1 の証明は $d_\Pi(\pi)$ の計算に帰着される (例えば $\mathfrak{B} = \{\pi\}$ (π: supersingular) の場合は $d_\Pi(\pi) = 1$ を示すことに帰着される). $d_\Pi(\pi)$ の計算方法を解説するために, さらに以下の準備をする. $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}$ における単射 $\pi_1 \hookrightarrow \pi_2$ が π_1 の injective envelope であるとは, π_2 は $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}$ において injective な対象であり, さらに π_2 のゼロでない任意の部分対象 $\pi_3 \subseteq \pi_2$ に対して $\pi_1 \cap \pi_3 \neq \{0\}$ が成り立つこととする. 局所的に長さ有限のアーベル群の一般論 [Ga62] から $\mathrm{Mod}_G^{\mathrm{l.adm}}$ の任意の対象は injective envelope を持つ ([Pa13]Corollary 2.3). 反圏同値性から圏 $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ の任意の対象は (injective envelope の双対概念である)projective envelope を持つ. π を G の k 上の絶対既約許容的 smooth 表現とし, $P \to \pi^*$ を $\pi^* \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})$ の projective envelope とする. P に対して (一般には非可換な)$\mathcal{O}$ 代数 $E := \mathrm{End}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P)$ を定義する. 与えられた全射 $P \to \pi^*$ から自然に誘導される射 $E \to \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \pi^*)$ の核を $\mathfrak{m}_E$ と表す. projective envelope の性質と π の絶対既約性から自然な同型 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \pi^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(\pi^*, \pi^*) = k$ があり, $\mathfrak{m}_E$ は E の右極大イデアルとなる. さらに, $\mathfrak{m}_E$ は両側イデアルとなり E は $\mathfrak{m}_E$ 進完備な副有限 (特にコンパクト) 局所 $\mathcal{O}$ 代数となる ([Pa13]Definition 3.6 の直後のコメントと Corollary 3.9, Corollary 3.11). $M \in \mathfrak{C}(\mathcal{O})$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, M)$ は自然に右 E 加群となるが, (E がコンパクトであることと同様にして) さらにコンパクト右 E 加群となる. また, π と同型でない既約な π' に対しては $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, (\pi')^*) = 0$ となることが容易に分かる.

以上の準備の下, (簡単のため) 絶対既約な π に対して $d_\Pi(\pi)$ を調べる方法について解説する (注意 6.10 から, $\mathfrak{B}$ が絶対既約な表現を含まない場合は, L の不分岐 2 次拡大に係数を拡大すれば, この場合に帰着される). $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ とその有界 $\mathcal{O}$ 格子 Θ に対して右 $E[1/p]$ 加群 $\mathfrak{m}(\Pi) := \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \Theta^*) \otimes_{\mathcal{O}} L$ を定義する (これは Θ の取り方によらない). 次の命題により, $d_\Pi(\pi)$ の計算は右 $E[1/p]$ 加群 $\mathfrak{m}(\Pi)$ を調べることに帰着される.

命題 6.11. $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)$ に対して次が成立する.

(1) $\dim_L \mathfrak{m}(\Pi) = d_\Pi(\pi)$ が成り立つ (特に, 一方が有限であることともう一方が有限であることは同値).

(2) Π は既約で $\mathfrak{m}(\Pi) \neq 0$ とすると次が成り立つ.

(*i*) $\mathfrak{m}(\Pi)$ は既約右 $E[1/p]$ 加群.

(*ii*) 自然な L 代数の射 $\mathrm{End}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi) \to \mathrm{End}_{E[1/p]}(\mathfrak{m}(\Pi))^{\mathrm{op}}$ は同型 (ここで環 R に対して R^{op} は R の反対環とする).

証明. (概略) まずは (1) の証明について. $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \Theta^*)$ はコンパクト平坦 $\mathcal{O}$ 加群なので (コンパクト $\mathcal{O}$ 加群の) 中山の補題と $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, -)$ の完全性から等式 $\dim_L \mathfrak{m}(\Pi) = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \Theta^*) \otimes_{\mathcal{O}} k = \dim_k \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \Theta^* \otimes_{\mathcal{O}} k)$ が成り立つ. ここで, 自然な同型 $\Theta^* \otimes_{\mathcal{O}} k \xrightarrow{\sim} (\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k)^*$ があるのでこれは $\dim_k \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, (\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k)^*)$ と等しいが, projective envelope の性質 (関手 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, -)$ の完全性, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \pi^*) \xrightarrow{\sim} k$, π と同型でない既約な π' に対して $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, (\pi')^*) = 0$ となること) からこれは $\Theta \otimes_{\mathcal{O}} k$ に現れる π の重複度と等しくなり, 従って (1) が成り立つ.

(2) は $\mathfrak{m}(\Pi)$ から Π の情報が復元できることを示せばよい. これは $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ における自然な射 $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P, \Theta^*) \hat{\otimes}_E P \to \Theta^* : f \hat{\otimes} x \mapsto f(x)$(左辺は自然に $\mathfrak{C}(\mathcal{O})$ の対象になる) を用いて示される ([Pa13] Proposition 4.18 と Proposition 4.19).

□

注意 6.12. $\mathfrak{B}$ が一つの元からなる (つまり $\mathfrak{B} = \{\pi\}$ (π: supersingular) となる) 場合はより強く, 関手 $\Pi \mapsto \mathfrak{m}(\Pi)$ は長さ有限な対象からなる $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ の部分圏から L 上有限次元な右 $E[1/p]$ 加群の圏への反圏同値を導くことが知られている ([Pa13]Theorem 4.34). ここで, $\mathfrak{m}(\Pi)$ が L 上有限次元となることは, 系 6.15 によって保証される.

この命題によって $d_\Pi(\pi)$ の計算は既約 $E[1/p]$ 加群 $\mathfrak{m}(\Pi)$ の L 上の次元の計算に帰着され, 特に圏 $\mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ をある意味統制している環 $E[1/p]$ 自身の構造を調べることに帰着された. [Pa13] 及び [CDP14] では, 変形理論的な議論を用いて L 代数 $E[1/p]$ の構造, 特にその非可換性の度合いを調べることでこの問題を解決している. これに関する彼らの結果, 特に [CDP14] の結果を説明するために次の定義をする. $n \geqq 2$ とする. (可換とは限らない) 環 R が標準等式 (standard identity) s_n を満たすとは, R の任意の n 個の元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して等式 $\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} = 0$ を満たすことと定義する (ここで $\mathfrak{S}_n$ は $\{1, \cdots, n\}$ の置換群). 例えば, 可換環であることは s_2 を満たすことと同値であり, より一般に可換環 R に対して $n \times n$ の行列環 $M_n(R)$ は標準等式 s_{2n} を満たすことなどが知られている. 我々の目的のためには「s_{2n} を満たす R の任意の既約右 R 加群 M に対して不等式 $\dim_{\mathrm{End}_R(M)} M \leqq n$ が成り立つ」という事実 (Kaplansly の定理 [MR87] Thm.II.1.1, Cor. II.1.2) が重要である. 定理 6.1 の証明では環 $E[1/p]$ に関する次の定理 ([CDP14]Theorem 2.21 の証明の中で証明されている) が最も重要である.

定理 6.13. 絶対既約な $\pi \in \mathfrak{B}$ に対して π が supersingular の場合は $d(\pi) := 1$ と定義し, $\mathfrak{B} = \{\pi\{\delta_1, \delta_2\}$ の既約因子 $\}$ の場合は $d(\pi)$ を $\pi\{\delta_1, \delta_2\}$ の中での π の重複度と定義する. $P \to \pi^*$ を π^* の projective envelope とし $E = \mathrm{End}_{\mathfrak{C}(\mathcal{O})}(P)$ とする. このとき $E[1/p]$ は標準等式 $s_{2d(\pi)}$ を満たす.

注意 6.14. [Pa13] では, $p \geqq 5$ の場合に π (supersingular) または $\pi\{\delta_1, \delta_2\}$ に対応する $G_{\mathbb{Q}_p}$ の mod p 表現の普遍変形環と (我々の設定と少し異なる設定で定義された)E を結びつけることで同様の定理を証明している ([Pa13]Proposition 6.3, Corollary 8.7, Corollary 9.27, Theorem 10.71). ここでは, G の mod p 表現の様々な複雑な計算 (特に Ext の計算) が必要であり, $p \geqq 5$ という条件は本質的である. [CDP14] では標数ゼロの表現のみを扱う別証明が発見され, (定理 6.9 の証明以外は) これらの複雑な計算を回避することが可能となり, 任意の素数 p に対して定理が証明できるようになった. いずれの証明においても G 整合性の証明のときと同様にして変形理論的な議論でクリスタリン表現の場合 (注意 6.2) に帰着させることで証明される. 帰着する際には, [Pa13] では定理 5.11 のクリスタリン表現の Zariski 稠密性が用いられ, [CDP14] では Emerton による稠密性 ([今井] 補題 8.5) と類似の稠密性 ([CDP14]Proposition 2.12) が用いられている.

最後に, この定理を用いて定理 6.1 の前半の主張 (つまり (1)(2) の主張) を証明する. そのためには次の系を示せばよい.

系 6.15. 任意の $\pi \in \mathfrak{B}$ と任意の絶対既約な $\Pi \in \mathrm{Ban}_L^{\mathrm{adm}}(G)_{\mathfrak{B}}$ に対して不等式 $d_\Pi(\pi) \leqq d(\pi)$ が成り立つ.

証明. 命題 6.11(1) より不等式 $\dim_L \mathfrak{m}(\Pi) \leqq d(\pi)$ を示せばよい. $\mathfrak{m}(\Pi) \neq 0$ は明らかなので, 命題 6.11 (2) より L 代数の同型 $\mathrm{End}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{E[1/p]}(\mathfrak{m}(\Pi))^{\mathrm{op}}$ がある. Π は位相的絶対既約なので Schur の補題 ([DS13]) から $L = \mathrm{End}_G^{\mathrm{cont}}(\Pi)$ が成り立つ. 最後に, これらと定理 6.13 及び (その直前に解説した)Kaplansky の定理より不等式 $\dim_L \mathfrak{m}(\Pi) = \dim_{\mathrm{End}_{E[1/p]}(\mathfrak{m}(\Pi))}(\mathfrak{m}(\Pi)) \leqq d(\pi)$ を得る.

□

References

[Be02] L. Berger, Représentations p-adiques et équations diférentielles, Invent. Math. 148 (2002), no. 2, 219-284.

[Be04] L. Berger, Limites de représentations cristallines, Compos. Math. 140 (2004), no. 6, 1473-1498.

[Be10] L. Berger, Représentations modulaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2, Astérisque 330 (2010), 263-279.

[BL94] L. Barthel, R. Livné, Irreducible modular representations of GL_2 of a local field, Duke Math. J. 75 (1994), 261-292.

[BB10] L. Berger, C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010), 155-211.

[Bo10] G. Böckle, Deformation rings for some mod 3 Galois representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_3$, Astérisque 330 (2010), 529-542.

[BJ14] G. Böckle, A.K. Juschka, Irreducibility of versal deformation rings in the (p,p)-case for 2-dimensional representations, preprint.

[Br03a] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. I, Compositio Math. 138 (2003), 165-188.

[Br03b] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. II, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), 1-36.

[Br04] C. Breuil, Invariant L et série spéciale p-adique, Ann. Scient. de l' E.N.S. 37 (2004), 559-610.

[Br08] C. Breuil, Introduction générale, Astérisque 319 (2008), 1-12.

[Br10] C. Breuil, The emerging p-adic Langlands programme, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India (2010).

[BS07] C. Breuil, P. Schneider, First steps towards p-adic Langlands functoriality, J. Reine Angew. Math. (2007), 149-180.

[Ch09] G. Chenevier, Sur la variété des caractères p-adiques du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$, preprint (2009).

[CEGGPS13] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paskunas, S. Shin, Paching and the p-adic local Langlands correspondence, preprint. arXiv:1310.0831.

[Co08] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque 319 (2008), 213-258.

[Co10a] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique, Astérisque 330 (2010),13-59.

[Co10b] P. Colmez, (φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010), 61-153.

[Co10c] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330 (2010), 213-262.

[Co10d] P. Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules, Astérisque 330 (2010), 281-509.

[Co11] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.

[CD13] P. Colmez, G. Dospinescu, Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Algebra and Number Theory 8 (2014), 1447-1519.

[CDP13a] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paskunas, Irreducible components of deformation spaces: wild 2-adic exercices, to appear in Int Math Res Notices.

[CDP14] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paskunas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Cambridge Journal of Mathematics, Volume 2, Number 1 (2014), 1-47.

[Do11] G. Dospinescu, Equations différentielles p-adiques et modules de Jacquet analytiques, Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.

[Do12] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique, Mathematische Annalen 354 (2012), 627-657.

[DS13] G. Dospinescu, B. Schraen, Endomorphism algebras of p-adic representations of p-adic Lie groups, Representation Theory 17 (2013), 237-246.

[Em10a] M. Emerton, Ordinary parts of admissible representations of p-adic reductive groups I. Definition and first properties, Astérisque 331 (2010), 355-381.

[Em10b] M. Emerton, Completed cohomology and the p-adic Lang- lands program, Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India (2010).

[Em11] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{/\mathbb{Q}}$,

preprint, available at http://www.math.uchicago.edu emerton/preprints.html.
[Fo91] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, The Grothendieck Festschrift, vol 2, Prog. in Math. 87, Birkhäuser (1991), 249-309.
[Fo94] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques potentiellement semi-stables, Périodes p-adiques, Astérisque 223 (1994), 321-348.
[FW79] J.-M. Fontaine, J.-P. Wintenberger, Le "corps des normes" de certaines extensions algebriques de corps locaux, C.R.A.S. 288 (1979), 367-370.
[Ga62] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Math. Soc. France 90 (1962), 323-448.
[Go90] F. Gouvêa, Deforming Galois representations:controlling the conductor, Journal of number theory 34 (1990), 95-113.
[GM97] F. Gouvêa, B. Mazur, On the density of modular representations, Computational perspectives in number theory (Chicago, 1995), AMS/IP Stud. Adv. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI (1997), 127-142.
[Ki09] M. Kisin, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2, J. Amer. Math. Soc. 22 (2009), no. 3, 641-690.
[Ki10] M. Kisin, Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$-representations, Astérisque 330 (2010), 511-528.
[La65] M. Lazard, Groupes analytiques p-adiques, Publications Mathématiques de l'IHÉS 26 (1965), 5-219.
[Li12] R. Liu, Locally Analytic Vectors of some crystabeline representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Compos. Math. 148 (2012), 28-64.
[LXZ12] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Annales de l ' E.N.S. vol. 45, no1 (2012), 167-190.
[Ma89] B. Mazur, Deforming Galois representations. Galois groups over Q (Berkeley, CA, 1987), Math. Sci. Res. Inst. Publ., 16, Springer, New York (1989), 385-437.
[MR87] J.C. McConnell, J.C. Robson, Noncommutative noetherian rings, Wiley series in pure and applied mathematics (1987).
[Pa11] V. Paskunas, Blocks for mod p representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *Proceedings of the LMS Durham Symposium 2011.*
[Pa13] V. Paskunas, The image of Colmez's Montreal functor, Publications Mathématiques de l'IHÉS 118, Issue 1 (2013), 1-191.
[ST02a] P. Schneider, J. Teitelbaum, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. 127 (2002), 359-380.
[ST02b] P. Schneider, J. Teitelbaum, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2. J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 443-468.
[ST03] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. Math. 153 (2003), 145-196.
[So13] C. Sorensen, A proof of the Breuil-Schneider conjecture in the indecomposable case, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 1, 367-382.
[So14] C. Sorensen, Eigenvarieties and invariant norms, Pac. J. Math. 275-1 (2015), 191-230.
[Wi83] J.-P. Wintenberger, Le corps des normes de ceriaines extensions infinies des corps locaux; applications, Ann. Sci. E.N.S. 16 (1983), 59-89.
[今井] 今井 直毅, 完備コホモロジーと p 進局所 Langlands 対応, 本報告集.