RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B53 (2015), 423–442

完備コホモロジーと p 進局所 Langlands 対応 (Completed cohomology and p-adic local Langlands correspondences)

By

今井 直毅 (Naoki Imai) *

Abstract

In this survey paper, we explain a local-global compatibility for p-adic Langlands correspondences in the completed cohomology of modular curves after Emerton. We also explain its application to the Fontaine-Mazur conjecture and a compatibility between the local Langlands correspondence and the p-adic local Langlands correspondence.

序論

近年，局所 Langlands 対応の p 進版である p 進局所 Langlands 対応が，Breuil や Colmez をはじめとする多くの人々によって研究されてきた．Colmez による $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ に対する p 進局所 Langlands 対応の構成は (φ, Γ) 加群を用いた純粋に表現論的なものであるが，Colmez による一般的な構成ができる以前から，p 進局所 Langlands 対応はモジュラー曲線のエタールコホモロジーのレベルに関する極限の完備化（完備コホモロジー）に現れるべきであるということが，Breuil によって予見されていた（cf. [Br, 1.1]）．実際そのようなことが，付随する Weil-Deligne 表現がスペシャルになる場合には [Br, Théorème 5.1.6] において，可約な潜在的クリスタリン表現の場合には [BE, Théorème 5.7.3] において証明されていた．より一般的な p 進表現に対する p 進局所 Langlands 対応がモジュラー曲線の完備コホモロジーに現れるということは，[E2, 7.8] において p 進局所大域整合性として定式化され，[E4] において技術的な仮定の下で証明された．本稿では，この Emerton の結果について解説する．

まず 1 節において，$\mathbb{Q}$ 上の GL_2 に対する大域 Langlands 対応のモジュラー曲線のエタールコホモロジーにおける実現および局所 Langlands 対応との整合性について復習

Received May 20, 2014. Revised March 19, 2015.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11F70, 11F80.
Key Words: *completed cohomology, Langlands correspondence.*
*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo, 153-8914, Japan.
e-mail: naoki@ms.u-tokyo.ac.jp

する．大域 Langlands 対応および局所 Langlands 対応については，例えば [吉田] を参照されたい．2 節では，局所 Langlands 対応の変種である生成的局所 Langlands 対応について説明する．生成的局所 Langlands 対応は普通の局所 Langlands 対応と比べて p 進的な族との相性がよく，p 進局所大域整合性の証明において重要になる．3 節では，p 進局所 Langlands 対応および，その変形版について復習する．p 進局所 Langlands 対応の詳細については [Be] あるいは [中村] を参照されたい．4 節では，モジュラー曲線の完備コホモロジーを導入し，その性質を調べる．5 節では，本稿で解説する p 進局所大域整合性の主定理を述べる．6 節では，Emerton-Helm による生成的局所 Langlands 対応の族の特徴づけについて説明する．7 節では，p 進局所大域整合性の族への一般化を述べる．この一般化を考えることが p 進局所大域整合性の証明において重要になる．8 節では，前節で考えた p 進局所大域整合性の族への一般化の証明のあらすじを説明する．9 節では，p 進局所大域整合性の応用として，技術的な仮定の下で Fontaine-Mazur 予想および p 進局所 Langlands 対応と局所 Langlands 対応の整合性を証明する．10 節では，関連する最近の進展について簡単にコメントした．最後の付録 A では，本稿で必要になる表現論のいくつかの用語について説明する．

§ 1. Langlands 対応

まず，$\mathbb{Q}$ 上の GL_2 に対する大域 Langlands 対応のモジュラー曲線のエタールコホモロジーにおける実現について復習する．$\widehat{\mathbb{Z}}=\varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$，$\mathbb{A}_{\mathrm{f}}=\widehat{\mathbb{Z}}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ とおく．$GL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ の十分小さい開部分群 K_{f} に対し，K_{f} レベル構造付きの $\mathbb{Q}$ 上のモジュラー曲線を $Y(K_{\mathrm{f}})$ と書く．$f\colon E_{K_{\mathrm{f}}}\to Y(K_{\mathrm{f}})$ を $Y(K_{\mathrm{f}})$ の普遍楕円曲線とする．p を素数とする．k を 2 以上の整数とし，$\mathbb{Z}_p$ 加群のエタール局所系 $\mathcal{V}_k=\mathrm{Sym}^{k-2}R^1f_*\mathbb{Z}_p$ を考える．自然数 i に対し

$$H^i_{\mathrm{par}}(Y(K_{\mathrm{f}})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{V}_k)=\mathrm{Im}\Big(H^i_{\mathrm{c}}(Y(K_{\mathrm{f}})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{V}_k)\to H^i(Y(K_{\mathrm{f}})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{V}_k)\Big)$$

とおき，これを放物型エタールコホモロジーという．

$$H^1_{\mathrm{par}}(\mathcal{V}_k)=\varinjlim_{K_{\mathrm{f}}} H^1_{\mathrm{par}}(Y(K_{\mathrm{f}})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{V}_k)$$

とおく．体 F に対し，F の絶対 Galois 群を G_F で表す．$Y(K_{\mathrm{f}})$ が $\mathbb{Q}$ 上定義されていたことから，$H^1_{\mathrm{par}}(\mathcal{V}_k)$ に $G_{\mathbb{Q}}$ が作用している．さらにレベル構造を用いて，$H^1_{\mathrm{par}}(\mathcal{V}_k)$ に $GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ の自然な作用を定めることができる．ここでは，[Ca1] で考えている $GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ の作用を $g\mapsto (g^t)^{-1}$ で捻った作用を考える（cf. [E4, §2]）．

素数 ℓ に対し，$|\ |_\ell$ を $\mathbb{Q}_\ell$ の $|\ell|_\ell=\ell^{-1}$ で正規化された ℓ 進絶対値とする．また，$\mathbb{Q}$ の無限素点 ∞ に対し，$|\ |_\infty$ を $\mathbb{R}$ の絶対値とする．$\mathbb{A}=\mathbb{A}_{\mathrm{f}}\times\mathbb{R}$ とおき，$|\ |\colon \mathbb{A}^\times\to\mathbb{R}^\times$ を $\prod_v|\ |_v$ により定める．ただし，ここで v は $\mathbb{Q}$ の素点を走る．正規化された重さ k の尖点固有新形式 f に対し，$\Pi(f)^{\mathrm{u}}$ を [Bu, 3.2, 3.6] で定めている f に付随するユニタリ保型表現とし，$\Pi(f)=\Pi(f)^{\mathrm{u}}\otimes|\ |^{\frac{2-k}{2}}$ とおく．同型 $\iota\colon\overline{\mathbb{Q}}_p\simeq\mathbb{C}$ を固定する．

定理 1.1 (cf. [La, §4]). $G_{\mathbb{Q}} \times GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ 表現としての同型

$$H^1_{\mathrm{par}}(\mathcal{V}_k)_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \simeq \bigoplus_f V_f \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \pi(f)$$

が存在する．ただし，直和において f は，正規化された重さ k の尖点固有新形式を動き，V_f は f に付随する $G_{\mathbb{Q}}$ の p 進表現を表し，$\pi(f)$ は $\Pi(f)$ の有限部分と同型 ι から得られる $GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上のスムーズ表現を表す．また，V_f は $\mathbb{Q}$ 上の GL_2 に対する大域 Langlands 対応によって $\Pi(f) \otimes |\ |^{-\frac{1}{2}}$ と対応している．

次に，定理 1.1 と GL_2 に対する局所 Langlands 対応の関係について述べる．局所体 F に対し，F の Weil 群を W_F で表す．任意の素数 ℓ に対し，

$$\begin{aligned}\pi_\ell^{\mathrm{WD}}\colon &\left\{W_{\mathbb{Q}_\ell} \text{ の Frobenius 半単純な } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上 2 次元 Weil-Deligne 表現の同型類}\right\}\\ &\longrightarrow \left\{GL_2(\mathbb{Q}_\ell) \text{ の } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上の既約スムーズ表現の同型類}\right\}\end{aligned}$$

を Tate の意味で正規化された局所 Langlands 対応とする（cf. [De, (3.2.5)]）．Tate の正規化の利点として，V が $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体 E 上定義された Weil-Deligne 表現ならば $\pi_\ell^{\mathrm{WD}}(V)$ も E 上定義できるということがある．

p と異なる素数 ℓ に対し，$W_{\mathbb{Q}_\ell}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の Weil-Deligne 表現の同型類は $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の連続表現と対応するので，π_ℓ^{WD} によって，連続表現に対する局所 Langlands 対応

$$\begin{aligned}\pi_\ell\colon &\left\{W_{\mathbb{Q}_\ell} \text{ の Frobenius 半単純な } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上 2 次元連続表現の同型類}\right\}\\ &\longrightarrow \left\{GL_2(\mathbb{Q}_\ell) \text{ の } \overline{\mathbb{Q}}_p \text{ 上の既約スムーズ表現の同型類}\right\}\end{aligned}$$

が定まる．

定理 1.1 における $\pi(f)$ を $\bigotimes'_\ell \pi_\ell(f)$ と制限テンソル積に分解したとき，p と異なる素数 ℓ に対して $V_f|_{W_{\mathbb{Q}_\ell}}$ の Frobenius 半単純化と $\pi_\ell(f)$ が局所 Langlands 対応 π_ℓ で対応するということが，Carayol [Ca1, Théorème (A)] によって証明されている．さらに，$V_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ に付随する Weil-Deligne 表現の Frobenius 半単純化と $\pi_p(f)$ が局所 Langlands 対応 π_p^{WD} で対応することが，レベルが p と素な場合は Scholl [Sc, Theorem 1.2.4.(ii)] によって，一般には斎藤 [Sa, Theorem] によって証明されている．これらのことを，大域 Langlands 対応が局所 Langlands 対応と整合的であるという．

しかし，素点 p における整合性において，p 進表現に付随する Weil-Deligne 表現を取る際に表現の情報の一部が落ちている．p 進表現から情報を落とさずに大域 Langlands 対応との整合性を主張するのが，本稿で解説する p 進局所大域整合性である．

§2. 生成的局所 Langlands 対応

この節では，局所 Langlands 対応の変種である生成的局所 Langlands 対応について説明する．

まず生成的表現を，後で必要になる少し一般的な状況で定義する．Σ_0 を素数の有限集合とする．$G_{\Sigma_0} = \prod_{\ell \in \Sigma_0} GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ とおき，

$$P_{\Sigma_0} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\Sigma_0} \;\middle|\; a \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbb{Z}_\ell^\times,\ b \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbb{Z}_\ell \right\}$$
$$N_{\Sigma_0} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G_{\Sigma_0} \;\middle|\; b \in \prod_{\ell \in \Sigma_0} \mathbb{Z}_\ell \right\}$$

とおく．

Σ_0 が p を含まないと仮定する．k を標数 p の有限体とし，k の 有限次拡大体 $\widetilde{k}$ を，全ての $\ell \in \Sigma_0$ に対して $\widetilde{k}$ が 1 の ℓ 乗根をすべて含むようにとっておく．さらに，$\ell \in \Sigma_0$ に対して，加法的な指標 $\psi_\ell \colon \mathbb{Q}_\ell \to W(\widetilde{k})^\times$ を $\operatorname{Ker} \psi_\ell = \mathbb{Z}_\ell$ となるようにとる．$(\psi_\ell)_{\ell \in \Sigma_0}$ によって定まる N_{Σ_0} の指標を ψ_{Σ_0} と書く．位相群 Γ と可換環 A に対して，A 上のスムーズ Γ 表現の圏を $\mathrm{Rep}_A(\Gamma)$ で表す．

$\widetilde{A}$ を $W(\widetilde{k})$ 代数とする．$\widetilde{V} \in \mathrm{Rep}_{\widetilde{A}}(P_{\Sigma_0})$ に対し，N_{Σ_0} が ψ_{Σ_0} で作用するような $\widetilde{V}$ の最大商を $\widetilde{V}_{\psi_{\Sigma_0}}$ とおくと，$\widetilde{V} \mapsto \widetilde{V}_{\psi_{\Sigma_0}}$ によって関手

$$\Phi_{\widetilde{A}} \colon \mathrm{Rep}_{\widetilde{A}}(P_{\Sigma_0}) \to \widetilde{A}\text{-}\mathrm{Mod}$$

が定まる．

命題 2.1. A を $W(k)$ 代数とする．関手 $\Phi_A \colon \mathrm{Rep}_A(P_{\Sigma_0}) \to A\text{-}\mathrm{Mod}$ であって，$V \in \mathrm{Rep}_A(P_{\Sigma_0})$ に対し

$$\Phi_A(V) \otimes_{W(k)} W(\widetilde{k}) \simeq \Phi_{A \otimes_{W(k)} W(\widetilde{k})}(V \otimes_{W(k)} W(\widetilde{k}))$$

となるものが存在する．

証明．[EH, Proposition 3.1.4] から従う． □

K を $W(k)$ 代数である体とし，Φ_K を命題 2.1 で定まる関手とする．

定義 2.2. V を K 上の絶対既約スムーズ許容 G_{Σ_0} 表現とする．$\Phi_K(V) \neq 0$ となるとき，V は生成的であるという．

注意． 定義 2.2 の $\Phi_K(V) \neq 0$ という条件は，$\dim \Phi_K(V) = 1$ に変えても同じである（cf. [EH, Theorem 3.1.15]）．

K 上のスムーズ G_{Σ_0} 表現 V に対し，V の全ての既約部分表現の和を $\mathrm{soc}(V)$ と書く．

定義 2.3. K 上のスムーズ G_{Σ_0} 表現 V が以下をみたすとき，本質的に絶対既約生成的であるという．

1. $\mathrm{soc}(V)$ が絶対既約かつ生成的である．

2. $\Phi_K\big(V/\mathrm{soc}(V)\big) = 0$.

3. V は，長さ有限の部分表現の和になっている．

ℓ を素数とし，局所類体論によって $|\ |_\ell$ を $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ の指標とみなす．ここで，局所類体論の同型の正規化は，素元が幾何学的 Frobenius 元の持ち上げにうつるものを考える．

ℓ が p と異なるとする．V_ℓ を $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の Frobenius 半単純な 2 次元連続 $W_{\mathbb{Q}_\ell}$ 表現とする．ある連続指標 $\chi\colon W_{\mathbb{Q}_\ell} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ が存在して $V_\ell \simeq \chi|\ |_\ell \oplus \chi$ となるとき $\pi'_\ell(V_\ell) = \mathrm{Ind}_{P_{\{\ell\}}}^{GL_2(\mathbb{Q}_\ell)}\big(\chi|\ |_\ell \otimes \chi|\ |_\ell^{-1}\big)$ とおき，そうでないときは $\pi'_\ell(V_\ell) = \pi_\ell(V_\ell)$ とおく．すると $\pi'_\ell(V_\ell)$ は，本質的に絶対既約生成的になっている．この π'_ℓ で定まる対応を生成的局所 Langlands 対応という．

同様に，$W_{\mathbb{Q}_p}$ の Frobenius 半単純な $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上 2 次元 Weil-Deligne 表現 V_p に対して，あるスムーズ指標 $\chi\colon W_{\mathbb{Q}_p} \to \overline{\mathbb{Q}}_p^\times$ が存在して Weil-Deligne 表現として $V_p \simeq \chi|\ |_p \oplus \chi$ となるとき $\pi'_p(V_p) = \mathrm{Ind}_{P_{\{p\}}}^{GL_2(\mathbb{Q}_p)}\big(\chi|\ |_p \otimes \chi|\ |_p^{-1}\big)$ とおき，そうでないときは $\pi'_p(V_p) = \pi_p^{\mathrm{WD}}(V_p)$ とおく．この π'_p で定まる対応も，生成的局所 Langlands 対応という．

§3. p 進局所 Langlands 対応

E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする．E の整数環を $\mathcal{O}$ と書き，$\mathcal{O}$ の剰余体を k と書く．$\mathcal{O}$ の素元 ϖ を取る．$\epsilon\colon G_{\mathbb{Q}_p} \to \mathcal{O}^\times$ を p 進円分指標とする．$G = GL_2(\mathbb{Q}_p)$ とおく．$G_{\mathbb{Q}_p}$ の E 上 2 次元連続表現に対して，G の E 上の Banach 表現を対応させる p 進局所 Langlands 対応を B で表す．ただし，p 進局所 Langlands 対応の正規化は，$G_{\mathbb{Q}_p}$ の E 上 2 次元連続表現 V_E に対して，$B(V_E)$ の中心指標が $\det(V_E)\epsilon$ と局所類体論で対応するようにとっておく．これは [E4, §3] で説明されている正規化であり，[Co2] における正規化を p 進円分指標で捻ったものになっている．

次の結果は，Fontaine-Mazur 予想への応用において重要な役割を果たす．

定理 3.1 ([Co2, Théorème VI.6.18])**.** V_E を E 上の 2 次元連続 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現で de Rham なものとする．V_E の Hodge-Tate 重さが異なると仮定する．このとき $B(V_E)$ には G の作用が局所的に代数的になる零でない元が存在する．

$\overline{\epsilon}\colon G_{\mathbb{Q}_p} \to k^\times$ を mod p 円分指標とする．$\overline{\rho}_0$ を k 上の 2 次元 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現とし，$G_{\mathbb{Q}_p}$ の k 上の任意の指標 χ に対して

$$\overline{\rho}_0 \not\simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{\epsilon} \end{pmatrix} \otimes \chi$$

と仮定する．$\overline{\pi}_0$ を mod p Langlands 対応で $\overline{\rho}_0$ と対応する k 上のスムーズ許容 G 表現とする．

剰余体が k の有限次拡大である完備 Noether 局所 $\mathcal{O}$ 代数の圏を $\mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ で表す．$A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ に対し，その極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ と書く．射が全て同型である圏を亜群という．亜群の圏を (Groupoids) で表す．

定義 3.2. 関手 $\mathrm{Def}(\overline{\rho}_0)\colon \mathrm{Comp}(\mathcal{O}) \to (\mathrm{Groupoids})$ を次のように定める．$A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ に対して，亜群 $\mathrm{Def}(\overline{\rho}_0)(A)$ の対象は，A 上自由で階数 2 の連続 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現 ρ と $G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な $A/\mathfrak{m}_A$ 線型同型 $\xi\colon \rho/\mathfrak{m}_A\rho \xrightarrow{\sim} \overline{\rho}_0 \otimes_k A/\mathfrak{m}_A$ の組であり，(ρ,ξ) から (ρ',ξ') への射は，$G_{\mathbb{Q}_p}$ 同変な A 線型同型 $\rho \xrightarrow{\sim} \rho'$ で ξ, ξ' と整合的なものである．

定義 3.3. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とする．A 加群 X が $\mathfrak{m}_A$ 進的位相で完備かつ分離的で，任意の自然数 i に対して $X/\mathfrak{m}_A^i X$ が $A/\mathfrak{m}_A^i$ 上自由であるとき，X は直正規化可能であるという．

定義 3.4. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とする．π を A 上の G 表現とする．任意の自然数 i に対して $\pi/\mathfrak{m}_A^i\pi$ が $A/\mathfrak{m}_A^i$ 上のスムーズ許容 G 表現になるとき，π は許容 G 表現であるという．

定義 3.5. 関手 $\mathrm{Def}(\overline{\pi}_0)\colon \mathrm{Comp}(\mathcal{O}) \to (\mathrm{Groupoids})$ を次のように定める．$A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ に対して，亜群 $\mathrm{Def}(\overline{\pi}_0)(A)$ の対象は，A 上の直正規化可能な許容 G 表現 π（cf. 定義 3.3）と G 同変な $A/\mathfrak{m}_A$ 線型同型 $\xi\colon \pi/\mathfrak{m}_A\pi \xrightarrow{\sim} \overline{\pi}_0 \otimes_k A/\mathfrak{m}_A$ の組であり，(π,ξ) から (π',ξ') への射は，G 同変な A 線型同型 $\pi \xrightarrow{\sim} \pi'$ で ξ, ξ' と整合的なものである．

Colmez の Montreal 関手により，関手の自然変換

$$\mathrm{MF}\colon \mathrm{Def}(\overline{\pi}_0) \longrightarrow \mathrm{Def}(\overline{\rho}_0)$$

が定まる（cf. [Ki, (2.2)]）．

定義 3.6. 関手 $\mathrm{Def}^*(\overline{\pi}_0)\colon \mathrm{Comp}(\mathcal{O}) \to (\mathrm{Groupoids})$ を次のように定める．$A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ に対して，亜群 $\mathrm{Def}^*(\overline{\pi}_0)(A)$ は $\mathrm{Def}(\overline{\pi}_0)(A)$ の充満部分圏で，その対象は $(\pi,\xi) \in \mathrm{Def}(\overline{\pi}_0)(A)$ で π の中心指標が $\det(\mathrm{MF}(\pi))\epsilon$ と一致するもの全体とする．ただし，ここで $\det(\mathrm{MF}(\pi))\epsilon$ は，局所類体論により $\mathbb{Q}_p^\times$ の指標とみなした．

$p > 2$ とすると，関手の同値

$$\mathrm{MF}\colon \mathrm{Def}^*(\overline{\pi}_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Def}(\overline{\rho}_0) \tag{3.1}$$

が存在することが，[E4, Theorem 3.3.13] と，$\mathrm{Def}(\overline{\rho}_0)$ におけるクリスタリン表現に対応する点の Zariski 稠密性に関する結果（[Ki, Corollary 1.3.12] および [Bo, Theorem 1.1] の後のコメント）からわかる．

§4. 完備コホモロジー

$\widehat{\mathbb{Z}}^p = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_\ell$ とおく．K^p を $GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)$ の十分小さい開部分群とし，s を自然数とする．自然数 i に対し

$$H^i(K^p)_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}} = \varinjlim_{K_p \subset GL_2(\mathbb{Z}_p)} H^i(Y(K^pK_p)_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})$$

$$\widehat{H}^i(K^p)_{\mathcal{O}} = \varprojlim_{s} H^i(K^p)_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}}$$

$$\widehat{H}^i_E = \varinjlim_{K^p \subset GL_2(\widehat{\mathbb{Z}}^p)} \widehat{H}^i(K^p)_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathcal{O}} E$$

とおき，$\widehat{H}^i_E$ の G の作用が局所的に代数的な元全体と局所的に解析的な元全体を，それぞれ $\widehat{H}^i_{E,\mathrm{lalg}}$ および $\widehat{H}^i_{E,\mathrm{lan}}$ と書く．

W を GL_2 の $\mathbb{Q}_p$ 上有限次元既約代数的表現とする．$GL_2(\widehat{\mathbb{Z}})$ の十分小さい開部分群 K_{f} に対し，W に付随する $Y(K_{\mathrm{f}})$ 上の $\mathbb{Q}_p$ 係数のエタール局所系を $\mathcal{V}_W$ と書く．自然数 i に対し，

$$H^i(\mathcal{V}_W) = \varinjlim_{K_{\mathrm{f}}} H^i(Y(K_{\mathrm{f}})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{V}_W),$$

$$H^i(\mathcal{V}_W)_E = H^i(\mathcal{V}_W) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$$

とおき，$\widehat{H}^i_E$ の G の作用が局所的に W と同型な元全体を $\widehat{H}^i_{E,W\text{-lalg}}$ と書く．$\mathfrak{gl}_2$ を GL_2 の Lie 環とする．このとき，次が成り立つ．

命題 4.1 ([E1, Corollary 2.2.18])**.** $GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ 同変なスペクトル系列

$$E_2^{i,j} = \mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{gl}_2}(W^\vee, \widehat{H}^j_{E,\mathrm{lan}}) \Longrightarrow H^{i+j}(\mathcal{V}_W)_E$$

が存在する．

さらに，このスペクトル系列の E_2 項の消滅に関して次が成り立つ．

補題 4.2 ([E1, Corollary 4.3.2])**.** $i \neq 0, 3$ のとき，$\mathrm{Ext}^i_{\mathfrak{gl}_2}(W^\vee, \widehat{H}^0_{E,\mathrm{lan}}) = 0$ となる．

これらを用いて次の命題を証明する．

命題 4.3. $G_{\mathbb{Q}} \times GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ 表現としての同型

$$\bigoplus_{k \geq 2,\, n \in \mathbb{Z}} H^1(\mathcal{V}_k)_E \otimes (\mathrm{Sym}^{k-2} E^2)^\vee \otimes E(n) \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1_{E,\mathrm{lalg}}$$

が存在する．ただし，Tate 捻り $E(1)$ に対して $G_{\mathbb{Q}}$ は p 進円分指標で作用し，$GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ は

$$GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}}) \xrightarrow{\det} \mathbb{A}_{\mathrm{f}}^\times \to \mathbb{A}_{\mathrm{f}}^\times/\mathbb{Q}^\times \simeq \widehat{\mathbb{Z}}^\times \to \mathbb{Z}_p^\times$$

によって作用する．

証明． 命題 4.1 と補題 4.2 より，同型

$$H^1(\mathcal{V}_W)_E \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{gl}_2}(W^\vee, \widehat{H}^1_{E,\mathrm{lan}})$$

を得る．すると，[E3, Proposition 4.2.4] より，同型

$$H^1(\mathcal{V}_W)_E \otimes_{\mathbb{Q}_p} W^\vee \xrightarrow{\sim} \widehat{H}^1_{E,W\text{-lalg}}$$

が得られる．GL_2 の $\mathbb{Q}_p$ 上有限次元既約代数的表現は，同型を除いて，$k \geq 2$ と $n \in \mathbb{Z}$ に対する $(\mathrm{Sym}^{k-2}\,\mathbb{Q}_p^2) \otimes \det^n$ で尽くされることから主張が従う． □

§ 5. p 進局所大域整合性

$\rho\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL(V)$ を E 上の odd な 2 次元既約連続 $G_{\mathbb{Q}}$ 表現で，有限個の素点を除いて不分岐なものとする．$G_{\mathbb{Q}}$ 安定な V の lattice を取り，その mod ϖ 還元の半単純化を $\overline{\rho}\colon G_{\mathbb{Q}} \to GL(\overline{V})$ と書く．$\overline{\rho}$ は同型を除いて V の lattice のとり方によらない．以下を仮定する．

1. $p > 2$.
2. $\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}(\zeta_p)}}$ は絶対既約である．
3. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の k 上の任意の指標 χ に対して

$$\overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \not\simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \chi, \quad \overline{\rho}|_{G_{\mathbb{Q}_p}} \not\simeq \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & \overline{\epsilon} \end{pmatrix} \otimes \chi.$$

このとき，次の定理の意味で，大域 Langlands 対応と p 進局所 Langlands 対応は整合的になっている．

定理 5.1. $GL_2(\mathbb{A}_{\mathrm{f}})$ 表現としての同型

$$B(V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \otimes {\bigotimes_{\ell \neq p}}' \pi'_\ell(V|_{W_{\mathbb{Q}_\ell}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V, \widehat{H}^1_E)$$

が存在する．

§ 6. 生成的局所 Langlands 対応の族

Emerton-Helm は，[EH] において，生成的局所 Langlands 対応の p 進族が，いくつかの条件で特徴づけられることを示した．ここでは，本稿で必要となる形で定理を述べる．

$G_{\Sigma_0} = \prod_{\ell \in \Sigma_0} GL_2(\mathbb{Q}_\ell)$ とおく．$A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ の素イデアル $\mathfrak{p}$ と A 加群 X に対して，

$$X[\mathfrak{p}] = \{x \in X \mid ax = 0 \text{ for all } a \in \mathfrak{p}\}$$

とおき，A の $\mathfrak{p}$ における剰余体を $\kappa(\mathfrak{p})$ と書く．

定理 6.1. $A\in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とし，A が被約かつ $\mathcal{O}$ 上平坦であるとする．各 $\ell\in\Sigma_0$ に対して，連続表現 $\rho_\ell\colon G_{\mathbb{Q}_\ell}\to GL_2(A)$ が与えられているとする．スムーズ余許容 G_{Σ_0} 表現 X （*cf.* 定義 *A.7*）で，以下を満たすものは高々一つしかない．

1. X は余捻じれがない（*cf.* 定義 *A.5*）．

2. $(X/\varpi X)[\mathfrak{m}]$ は本質的に絶対既約生成的である．

3. $\mathrm{Spec}\,A[1/p]$ の閉点からなる Zariski 稠密な部分集合 Π が存在し，任意の $\mathfrak{p}\in\Pi$ に対し，G_{Σ_0} 表現の同型
$$X[\mathfrak{p}]\otimes_{\mathcal{O}} E\xrightarrow{\sim}\bigotimes_{\ell\in\Sigma_0}\pi'(\rho_{\ell,\mathfrak{p}})$$
が存在する．ただし，$\rho_{\ell,\mathfrak{p}}=\rho_\ell\otimes_A\kappa(\mathfrak{p})$.

証明. [EH, Theorem 6.2.1, Proposition 6.3.14] の双対版から従う． □

定義 6.2. 定理 6.1 のような X が存在するとき，X は生成的局所 Langlands 対応の族によって $\{\rho_\ell\}_{\ell\in\Sigma_0}$ と対応しているという．

§7. p 進局所大域整合性の族

$\Sigma=\Sigma_0\cup\{p\}$ とおき，Σ_0 を $\overline{\rho}$ が Σ の外で不分岐になるようにとっておく．$K_0^\Sigma=\prod_{\ell\notin\Sigma}GL_2(\mathbb{Z}_\ell)$ とおく．

K_p，K_{Σ_0} をそれぞれ G，G_{Σ_0} のコンパクト開部分群とする．素数 $\ell\notin\Sigma$ に対し $H^1(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}},E)$ への Hecke 作用素 T_ℓ と S_ℓ を考える．
$$\mathbb{T}\big(K_pK_{\Sigma_0}K_0^\Sigma\big)=\mathcal{O}[T_\ell,S_\ell]_{\ell\notin\Sigma}\subset\mathrm{End}\Big(H^1\big(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^\Sigma)_{\overline{\mathbb{Q}}},E\big)\Big)$$
とおき，$\mathbb{T}\big(K_pK_{\Sigma_0}K_0^\Sigma\big)$ に p 進位相を入れる．
$$\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})=\varprojlim_{K_p\subset G}\mathbb{T}\big(K_pK_{\Sigma_0}K_0^\Sigma\big)$$
とおき，$\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ に射影極限位相を入れる．$\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ は，$\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0}K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}}$ への Hecke 作用素 $\{T_\ell,S_\ell\mid\ell\notin\Sigma\}$ で位相的に生成される $\mathrm{End}(\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0}K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}})$ の位相部分環と一致する．

定義 7.1. $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ の極大イデアル $\mathfrak{m}$ で，剰余体が k になり，
$$\mathrm{tr}\big(\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell)\big)=T_\ell\mod\mathfrak{m},\quad\det\big(\overline{\rho}(\mathrm{Frob}_\ell)\big)=\ell S_\ell\mod\mathfrak{m}$$
となるものが存在するとき，K_{Σ_0} は $\overline{\rho}$ に対し許容可能レベルであるという．また，このとき $\mathfrak{m}$ は $\overline{\rho}$ から一意に決まり，$\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})$ の $\mathfrak{m}$ での局所化を $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\overline{\rho}}$ と書く．

注意. $\overline{\rho}$ は絶対既約かつ odd なので，Serre 予想（cf. [KW1], [KW2], [田口]）の帰結として，十分小さい K_{Σ_0} は $\overline{\rho}$ に対し許容可能レベルになる.

$\overline{\rho}$ に対する許容可能レベル $K_{\Sigma_0}, K'_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}$ で $K_{\Sigma_0} \subset K'_{\Sigma_0}$ となるものに対し，自然な射 $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\overline{\rho}} \to \mathbb{T}(K'_{\Sigma_0})_{\overline{\rho}}$ が存在する.

$$\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma} = \varprojlim_{K_{\Sigma_0}} \mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\overline{\rho}}$$

とおく．ただし，ここで K_{Σ_0} は $\overline{\rho}$ に対する許容可能レベルを動く．$\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}$ は局所環になり，その極大イデアルを再び $\mathfrak{m}$ と書く．素数 $\ell \notin \Sigma$ に対し，任意の $\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\overline{\rho}}$ に射影して T_ℓ になる $\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}$ の元を再び T_ℓ と書く.

命題 7.2. $\overline{\rho}$ の $\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}$ への変形 $\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}$ で

$$\mathrm{tr}\bigl(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_\ell)\bigr) = T_\ell, \quad \det\bigl(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}(\mathrm{Frob}_\ell)\bigr) = \ell S_\ell$$

となるものが，ただ一つ存在する.

証明. 一意性は，$\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}$ が $\{T_\ell, S_\ell \mid \ell \notin \Sigma\}$ で位相的に生成されることからわかる．存在は，射影極限をとることによって [Ca2, Théorème 3] から従う. □

定義 7.3. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とし，Γ を位相群とする．A 加群 V と，A 上のスムーズ余許容 Γ 表現 X に対し，

$$V \overset{\curlywedge}{\otimes}_A X = \varinjlim_H V \widehat{\otimes}_A X^H$$

とおく．ただし，上の順極限において H は Γ の開部分群を動き，$V \widehat{\otimes}_A X^H$ は $V \otimes_A X^H$ の ϖ 進完備化を表す.

(3.1) より，$\mathrm{MF}(\pi_\Sigma^{\mathfrak{m}}) = \rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ となる $\pi_\Sigma^{\mathfrak{m}}$ が存在する.

$$\begin{aligned} H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}} &= \mathbb{T}(K_{\Sigma_0})_{\overline{\rho}} \otimes_{\mathbb{T}(K_{\Sigma_0})} H^1(K_{\Sigma_0}K_0^\Sigma)_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}} \\ \widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O},\overline{\rho}} &= \varprojlim_s H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}} \\ \widehat{H}^1_{\mathcal{O},\overline{\rho},\Sigma} &= \varinjlim_{K_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}} \widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O},\overline{\rho}} \end{aligned}$$

とおく．さらに

$$\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}[G_{\mathbb{Q}} \times G]}\bigl(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}} \pi_\Sigma^{\mathfrak{m}}, \widehat{H}^1_{\mathcal{O},\overline{\rho},\Sigma}\bigr)$$

とおく．代入によって定まる $\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}[G_{\mathbb{Q}} \times G \times G_{\Sigma_0}]$ 加群としての自然な射

$$\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}})} \colon \rho_\Sigma^{\mathfrak{m}} \otimes_{\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}} \pi_\Sigma^{\mathfrak{m}} \overset{\curlywedge}{\otimes}_{\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}} \pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathfrak{m}}) \to \widehat{H}^1_{\mathcal{O},\overline{\rho},\Sigma}$$

を考える.

定理 7.4. $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{V})=k$ と仮定する．このとき $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma})}$ は同型である．

この定理を用いて，$\pi_{\Sigma_0}(\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma})$ の性質を調べると，次が得られる．証明は [E4, Theorem 6.4.11] を参照．

系 7.5. $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{V})=k$ と仮定する．このとき $\pi_{\Sigma_0}(\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma})$ は，生成的局所 Langlands 対応の族によって，$\{\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma}|_{G_{\mathbb{Q}_\ell}}\}_{\ell\in\Sigma_0}$ と対応している．

$\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{V})=k$ の場合，同型 $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma})}$ の特殊化を考えることによって，定理 5.1 を示すことができる．$\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{V})=k$ でないときは，定理 7.4 は，より弱い形（cf. [E4, Theorem 6.4.20]）でしか証明されていないが，定理 5.1 への応用上はそれで十分である．本稿では，簡単のため $\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{V})=k$ の場合のみを扱う．

§8. 証明のあらすじ

この節では，定理 7.4 の証明のあらすじについて述べる．以下，この節の終わりまで，$\mathrm{End}_{G_{\mathbb{Q}_p}}(\overline{V})=k$ を仮定する．まず，一般論として次が成り立つ．

補題 8.1 ([E4, Lemma C.46]). $A\in\mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とし，Γ を位相群とする．X を直正規化可能な A 加群とし，Y を A 上のスムーズ余許容 Γ 表現とし，W を $\mathcal{O}$ 上平坦な A 加群とする．A 加群の射 $f\colon X\mathbin{\hat{\otimes}}_A Y\to W$ に対し，以下は同値である．

1. f が単射かつ $\mathrm{Coker}\,f$ は $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがない．
2. f から誘導される射
$$(X/\mathfrak{m}_A X)\otimes_k(Y/\varpi Y)[\mathfrak{m}_A]\to(W/\varpi W)[\mathfrak{m}_A]$$
が単射である．

この補題を用いると次が示せる．

命題 8.2. $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma})}$ は単射である．

証明. 簡単のため，$\overline{V}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が絶対既約の場合を考える．
$$H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}=\varinjlim_{K_{\Sigma_0}\subset G_{\Sigma_0}}H^1(K_{\Sigma_0})_{k,\overline{\rho}}$$
とおく．補題 8.1 より，代入写像
$$\overline{\rho}\otimes_k\overline{\pi}\otimes_k\mathrm{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}\times G]}\big(\overline{\rho}\otimes_k\overline{\pi},H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]\big)\to H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]\tag{8.1}$$
が単射になることを示せばよい．$\overline{\rho}$ は絶対既約なので，代入写像
$$\overline{\rho}\otimes_k\mathrm{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}]}\big(\overline{\rho},H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]\big)\to H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]$$

は単射である．よって，(8.1) が単射であることを示すには，代入写像

$$\overline{\pi}\otimes_k \mathrm{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}\times G]}\big(\overline{\rho}\otimes_k \overline{\pi}, H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]\big)\to \mathrm{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}]}\big(\overline{\rho}, H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]\big) \tag{8.2}$$

が単射であることを示せばよい．$\overline{V}|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が絶対既約であることから，π も絶対既約である．よって，(8.2) が単射でないと仮定すると，ある非自明な元

$$f\in \mathrm{Hom}_{k[G_{\mathbb{Q}}\times G]}\big(\overline{\rho}\otimes_k \overline{\pi}, H^1_{k,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{m}]\big)$$

が存在し，(8.2) の $\overline{\pi}\otimes_k kf$ への制限が零射になる．これは (8.2) の射の定義から f が非自明であることに矛盾する．よって，(8.2) が単射になることが示された． □

あとは，$\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho^{\mathfrak{m}}_{\Sigma})}$ が全射であることを示せばよい．そのためにいくつか補題を準備する．

補題 8.3. K_p を G のコンパクト開部分群とし，K_{Σ_0} を G_{Σ_0} の十分小さい開部分群とする．このとき，$H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}}$ は $(\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})[K_p]$ 加群として単射的.

証明. M を $\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}$ 上の有限生成 K_p 表現とする．M の Pontryagin 双対 $M^\vee$ を $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}}(M,\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})$ で定める．K'_p を K_p の正規開部分群とし，$\mathcal{M}^\vee$ を $M^\vee$ から得られる $Y(K'_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})$ 上のエタール局所系とする．このとき，

$$\mathrm{Hom}_{K_p}(M,H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}})\simeq \varinjlim_{K'_p} H^1(Y(K'_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{M}^\vee)^{K_p} \tag{8.3}$$

が成り立つ．一方，Hochschild-Serre スペクトル系列から，完全系列

$$\begin{aligned}&0\to \varinjlim_{K'_p} H^1\big(K_p/K'_p, H^0(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{M}^\vee)\big)\\ &\to H^1(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{M}^\vee)\to \varinjlim_{K'_p} H^1(Y(K'_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{M}^\vee)^{K_p}\to 0\end{aligned} \tag{8.4}$$

が得られる．$\overline{\rho}$ は絶対既約なので，(8.3) と (8.4) を $\overline{\rho}$ に対応する極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化すると 0 次のコホモロジーの寄与が消えて，

$$H^1(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}},\mathcal{M}^\vee)_{\overline{\rho}}\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{K_p}(M,H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}})$$

が得られる．よって主張を示すには，$\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O}$ 上の有限生成 K_p 表現の短完全系列

$$0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$$

に対して，その Pontryagin 双対から定まるエタール局所系を

$$0\to \mathcal{M}_3^\vee\to \mathcal{M}_2^\vee\to \mathcal{M}_1^\vee\to 0$$

と書いたときに，

$$
\begin{aligned}
0 \to H^1(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}_3^{\vee})_{\overline{\rho}} &\to H^1(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}_2^{\vee})_{\overline{\rho}} \\
&\to H^1(Y(K_pK_{\Sigma_0}K_0^{\Sigma})_{\overline{\mathbb{Q}}}, \mathcal{M}_1^{\vee})_{\overline{\rho}} \to 0
\end{aligned}
$$

が完全系列であることを示せばよい．これは，$\overline{\rho}$ に対応する極大イデアル $\mathfrak{m}$ で局所化すると 0 次のコホモロジーが消えることから従う． □

位相群 Γ と位相環 A に対して，$\mathcal{C}(\Gamma, A)$ で Γ 上の A に値を持つ連続関数全体の集合を表し，$f \in \mathcal{C}(\Gamma, A)$ と $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ に対して，$(\gamma f)(\gamma') = f(\gamma^{-1}\gamma')$ と定めることによって，$\mathcal{C}(\Gamma, A)$ を Γ 表現とみなす．

補題 8.4. K_p を G の副 p 開部分群とし，K_{Σ_0} を G_{Σ_0} の十分小さい開部分群とする．このとき，ある自然数 r が存在して，K_p 表現として $\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O},\overline{\rho}} \simeq \mathcal{C}(K_p, \mathcal{O})^r$ となる．

証明． ある自然数 r が存在して，K_p 表現として

$$H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}} \simeq \mathcal{C}(K_p, \mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})^r \tag{8.5}$$

となることを示せばよい．$H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}}$ がスムーズ許容的であることに注意すると，(8.5) を示すためには，Pontryagin 双対を取って，$(H^1(K_{\Sigma_0})_{\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O},\overline{\rho}})^{\vee}$ が $(\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})[[K_p]]$ 上自由であることを示せばよい．これは $(\mathcal{O}/\varpi^s\mathcal{O})[[K_p]]$ が局所環であることと，補題 8.3 から従う． □

$GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の E 上の連続表現 X に対して，X の元で $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の作用が代数的である元全体を $X_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\text{-alg}}$ と書く．

補題 8.5. $K_{\Sigma_0} \subset G_{\Sigma_0}$ を許容可能レベルとする．このとき $(\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{E,\overline{\rho}})_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\text{-alg}}$ は $\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{E,\overline{\rho}}$ の中で稠密である．

証明． 補題 8.4 を用いて，ある自然数 r が存在して，$\widehat{H}^1(K_{\Sigma_0})_{E,\overline{\rho}}$ が $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の表現として $\mathcal{C}(GL_2(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O})^r$ の位相的な直和因子になることが示せる．Mahler 展開（cf. [Co1, Théorème I.2.3]）によって，$\mathcal{C}(GL_2(\mathbb{Z}_p), \mathcal{O})$ の中で多項式の空間が稠密であることがわかるので，主張が従う． □

定義 8.6. $\mathfrak{p}$ を $\operatorname{Spec} \mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}[1/p]$ の閉点とする．$\mathfrak{p}$ に対応する

$$\operatorname{Spec} \mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}[1/p] \to \operatorname{Spec} \kappa(\mathfrak{p})$$

が重さ 2 以上の尖点固有保型形式の Hecke 固有値から定まるとき，$\mathfrak{p}$ は古典的であるという．

$\mathrm{Spec}\,\mathbb{T}_{\overline{\rho},\Sigma}[1/p]$ の古典的な閉点のうちで，対応する Galois 表現が p でクリスタリンであるもの全体の集合を $\mathcal{C}$ とかく．

命題 8.7. $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}} \widehat{H}^1_{E,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{p}]_{\mathrm{lalg}}$ は $\widehat{H}^1_{E,\overline{\rho},\Sigma}$ の中で稠密である．

証明． 命題 4.3 と素点 p においてレベルがない場合の局所大域整合性 [Sc, Theorem 1.2.4] から

$$E[G]\big(\widehat{H}^1_{E,\overline{\rho},\Sigma}\big)_{GL_2(\mathbb{Z}_p)\text{-alg}} = \bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}} \widehat{H}^1_{E,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{p}]_{\mathrm{lalg}}$$

がわかる．これと補題 8.5 より，主張が従う． □

ここで表現論の用語を一つ定義する．

定義 8.8. $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とする．A 上の G 表現 X は，以下の条件をみたすとき，ϖ 進的な許容表現であるという．

1. X は ϖ 進的に完備かつ分離的である．
2. X の $\mathcal{O}$ 捻じれ部分を $X[\varpi^\infty]$ と書くと，ある自然数 i が存在して，$X[\varpi^\infty]$ は ϖ^i 倍で消える．
3. 任意の自然数 i に対し，$X/\varpi^i X$ は G のスムーズ表現であり，$X/\varpi^i X$ の任意の元 $\bar{x}$ に対し，ある自然数 j が存在し，$\mathfrak{m}_A^j \bar{x} = 0$ となる．
4. $(X/\varpi X)[\mathfrak{m}_A]$ は $A/\mathfrak{m}_A$ 上のスムーズ許容 G 表現になる．

表現論の一般論として次が成り立つ．

補題 8.9 ([E4, Proposition 3.1.3])**.** $A \in \mathrm{Comp}(\mathcal{O})$ とし，$f\colon X_1 \to X_2$ を A 上の ϖ 進的な許容 G 表現の間の $A[G]$ 加群としての射とする．このとき，f が誘導する $(A \otimes_{\mathcal{O}} E)[G]$ 加群の射

$$f \otimes \mathrm{id}_E\colon X_1 \otimes_{\mathcal{O}} E \to X_2 \otimes_{\mathcal{O}} E$$

の像は閉である．

命題 8.10 (cf. [E4, Theorem 6.4.7] の証明)**.** $\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathrm{m}})}$ は全射である．

証明． クリスタリン表現に対する p 進局所 Langlands 対応が具体的に記述できること（cf. [BB]）を用いて，$\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathrm{m}})}$ の像が $\bigoplus_{\mathfrak{p}\in\mathcal{C}} \widehat{H}^1_{E,\overline{\rho},\Sigma}[\mathfrak{p}]_{\mathrm{lalg}}$ を含むことを証明できる．補題 8.9 を用いて，$\mathrm{ev}_{\pi_{\Sigma_0}(\rho_\Sigma^{\mathrm{m}})}$ の像が閉になることを示せるので，命題 8.7 より主張が従う． □

§ 9. 応用

最後に，いくつかの応用について述べる．

定理 9.1 (Fontaine-Mazur 予想). V を E 上の odd な 2 次元既約連続 $G_{\mathbb{Q}}$ 表現で，有限個の素点を除いて不分岐なものとし，5 節で課した条件をみたしていると仮定する．さらに，$V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ が de Rham で Hodge-Tate 重さが異なるとする．このとき V は，重さが 2 以上の尖点固有新形式に付随する Galois 表現の指標による捻りになっている．

証明. 定理 5.1 より，G 表現の単射準同型

$$B(V|_{G_{\mathbb{Q}_p}}) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V, \widehat{H}^1_E) \tag{9.1}$$

が存在する．(9.1) から局所的に代数的な元全体を取ると，定理 3.1 より，

$$\mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V, \widehat{H}^1_{E,\mathrm{lalg}}) \neq 0$$

を得る．これと，命題 4.3 より主張が得られる． □

定理 9.2. V_E を E 上の 2 次元連続 $G_{\mathbb{Q}_p}$ 表現で de Rham なものとする．V_E^{WD} を V_E に付随する Weil-Deligne 表現とする．V_E の Hodge-Tate 重さを a, b とし，$a<b$ と仮定する．このとき $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ 表現としての同型

$$B(V_E)_{\mathrm{lalg}} \xrightarrow{\sim} \pi'_p(V_E^{\mathrm{WD}}) \otimes (\mathrm{Sym}^{b-a-1} E^2) \otimes \det{}^{a+1}$$

が存在する．

証明. あらすじのみ述べる．V_E^{WD} が可約な場合は [Co2, Théorème VI.6.50] で証明されているので，ここでは V_E^{WD} が既約な場合を扱う．円分指標で捻ることによって $b=0$ としてよい．$k=1-a$ とおく．

このとき，V_E を不分岐指標で捻ったものに取り換え，E を有限次拡大体で取り換えることによって，次をみたすような重さ k の尖点固有新形式 f を見つけることができる．

1. f に付随する保型表現 $\Pi(f)$ の p 成分は，同型 $\iota\colon \overline{\mathbb{Q}}_p \simeq \mathbb{C}$ で $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の表現とみなすと，$\pi'_p(V_E^{\mathrm{WD}})$ と同型である．
2. f に付随する Galois 表現 V_f は 5 節における $\overline{\rho}$ の仮定をみたす．

[Co2, Théorème VI.6.42] において，$B(V_E)_{\mathrm{lalg}}$ が V_E^{WD} と V_E の Hodge-Tate 重さ a, b にしかよらないことが，証明されているので，$V_E = V_f|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ の場合に定理の主張が成り立つことを示せばよい．

$\Pi(f)$ の導手を N とし，

$$K_1^p(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \prod_{\ell \neq p} GL_2(\mathbb{Z}_\ell) \;\middle|\; c \equiv 0 \mod N,\ d \equiv 1 \mod N \right\}$$

とおく．V_f に対して定理 5.1 を使って，

$$B(V_E) \otimes {\bigotimes_{\ell \neq p}}' \pi'_\ell(V_f|_{W_{\mathbb{Q}_\ell}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{G_{\mathbb{Q}}}(V_f, \widehat{H}^1_E) \tag{9.2}$$

を得る．(9.2) から局所的に代数的な元全体を取って，さらに $K_1^p(N)$ 不変部分を取ると，命題 4.3 より

$$B(V_E)_{\mathrm{lalg}} \simeq \pi'_p(V_E^{\mathrm{WD}}) \otimes (\mathrm{Sym}^{k-2} E^2) \otimes \det{}^{2-k}$$

が得られる． □

§10. 最近の進展

完備コホモロジーと p 進局所 Langlands 対応については，[E4] 以降も盛んに研究がおこなわれている．この節では，それらの研究のうちで特に [E4] と関係の深いものについて，いくつか簡単にコメントする．以下では，技術的な条件を省略したところもあるので，正確な主張については各論文を参照されたい．

モジュラー曲線の局所版，あるいはその高次元化である Lubin-Tate 空間の完備コホモロジーは，現時点では一般には構成されていない p 進局所 Langlands 対応を実現することが期待されている．[Ch] では，[E4] の結果を用いて，$G_{\mathbb{Q}}$ の副保型的な 2 次元 p 進表現の $G_{\mathbb{Q}_p}$ への制限として得られる絶対既約表現に対し，p 進局所 Langlands 対応が $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ に対する Lubin-Tate 空間の完備コホモロジーに現れることを証明している．

[CS] では，[E4] と同様の手法を用いて，p で分裂する 2 変数定符号ユニタリ群に付随する数論的多様体の完備コホモロジーを，p 進局所 Langlands 対応および局所 Langlands 対応を用いて記述している．ここで，考えている数論的多様体は 0 次元になっており，完備コホモロジーは関数空間とみなすことができる．

p 進局所 Langlands 対応の一般化を考えるうえで自然に現れる予想として，Breuil-Schneider 予想がある．以下で，この予想について大雑把に説明する．詳細は [BS, Conjecture 4.3] を参照されたい．

F を p 進体として，E が F の $\mathbb{Q}_p$ 上の Galois 閉包を含むとする．n を自然数とし，X を W_F の E 上 n 次元 Weil-Deligne 表現とする．$GL_n(F)$ に対する生成的局所 Langlands 対応で X と対応する $GL_n(F)$ のスムーズ表現を π とする．$1 \leq j \leq n$ と $\mathbb{Q}_p$ 代数の埋め込み $\tau\colon F \hookrightarrow E$ に対し，整数 $i_{j,\tau}$ が与えられて，任意の τ に対し $i_{1,\tau} < \cdots < i_{n,\tau}$ が成り立っているとする．$a < b$ となる整数 a, b に対して，$GL_2(E)$ の代数的既約表現 $(\mathrm{Sym}^{b-a-1} E^2) \otimes \det^{a+1}$ （cf. 定理 9.2）を対応させる操作を一般化して，整数の組 $\{i_{j,\tau}\}_{j,\tau}$ に対して，$GL_n(F) \otimes_{\mathbb{Q}_p} E$ の代数的既約表現 ξ を対応させることができる．制限により ξ を $GL_n(F)$ の表現とみなす．このとき，次の二つが同値であるというのが予想である．

(1) X と $\{i_{j,\tau}\}_{j,\tau}$ は，G_F のある de Rham 表現から，付随する Weil-Deligne 表現および，その Hodge-Tate 重さとして得られる．

(2) $\pi \otimes_E \xi$ に $GL_n(F)$ 不変なノルムが存在する．

予想のうち (2) ⇒ (1) は，[Hu] において一般に示されている．また $GL_2(\mathbb{Q}_p)$ の場合，(1) ⇒ (2) は，定理 9.2 の同型を用いて $B(V_E)$ のノルムを制限することにより従う．

(1) ⇒ (2) が示せると，de Rham 表現から得られた $\pi \otimes_E \xi$ をノルムで完備化することで，p 進局所 Langlands 対応で対応する Banach 表現の候補が得られる．ただし，ノルムは一意とは限らないので，どのようにノルムを選ぶべきかは別問題である．

付随する Weil-Deligne 表現が分解不可能な場合は，[So] において (1) ⇒ (2) が示されている．実際には，より一般に次のことが示されている．

定理 10.1. H を $\mathbb{Q}_p$ 上の連結簡約代数群とする．π を $H(\mathbb{Q}_p)$ の $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 上の既約スムーズ本質的二乗可積分表現とし，ξ を $H_{\overline{\mathbb{Q}}_p}$ の既約代数的表現とする．制限により ξ を $H(\mathbb{Q}_p)$ の表現とみなす．このとき，$\pi \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xi$ に $H(\mathbb{Q}_p)$ 不変なノルムが存在することと，$\pi \otimes_{\overline{\mathbb{Q}}_p} \xi$ の中心指標が値を $\mathcal{O}_{\overline{\mathbb{Q}}_p}^{\times}$ に持つことは同値である．

この定理には，もはや Galois 表現は現れておらず，純粋に代数群の表現に関する主張になっている．証明は，H がいくつかの条件をみたす場合に帰着した後に，π や ξ の情報を尖点保型表現に大域化し，保型表現の空間と完備な関数空間を関係付けて行う．この関数空間は，0 次元の数論的多様体の完備コホモロジーとみなすことができる．

一方で，中心指標を固定すると尖点保型表現は可算個しかないので，$GL_n(F)$ の全ての主系列表現に対して同様の議論をすることはできない．[C–S] では，捻じれ係数コホモロジーに対して Taylor-Wiles-Kisin の張り合わせの議論を適用して大きな完備空間を作り，その完備空間に埋め込むことによって，いくつかの強い条件のもとで潜在的クリスタリン表現に対して (1) ⇒ (2) を示している．

§ A. 表現論の用語

A を可換環とし，Γ を位相群とする．

定義 A.1. Γ が A 加群 X に A 線型に作用しているとする．任意の $x \in X$ に対し，x を固定する Γ の開部分群が存在するとき，X はスムーズ表現であるという．

定義 A.2. A 上のスムーズ許容 Γ 表現とは，A 上のスムーズ Γ 表現 X で，Γ の任意の開部分群に対し X の H 不変部分 X^H が A 上有限生成になるもの．

p を素数とし，E を $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする．E の整数環を $\mathcal{O}$ と書き，$\mathcal{O}$ の剰余体を k と書く．$\mathcal{O}$ の素元 ϖ を取る．A が完備 Noether 局所 $\mathcal{O}$ 代数で，剰余体が k の有限次拡大であると仮定する．A の極大イデアルを $\mathfrak{m}_A$ とかく．

定義 A.3. X を A 加群とする．X が捻じれのない A 加群であるとは，A の任意の非零因子 a に対して，X への a 倍写像が単射であることである．

定義 A.4. X を A 上のスムーズ Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとする．$\phi \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X, \mathcal{O})$，$\gamma \in \Gamma$，$x \in X$ に対して

$$(\gamma\phi)(x) = \phi(\gamma^{-1}x)$$

とすることで，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X,\mathcal{O})$ に Γ の作用を定める．

$$\widetilde{X}=\left\{\phi\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(X,\mathcal{O})\;\middle|\;\phi \text{ は } \Gamma \text{ のある開部分群で固定される}\right\}$$

とおき，$\widetilde{X}$ に誘導される Γ の表現をスムーズ反傾表現という．

定義 A.5. X を A 上のスムーズ Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとする．$\widetilde{X}$ が捻じれのない A 加群であるとき，X は余捻じれがないという．

定義 A.6. A 加群 X が余有限生成であるとは，以下を満たすことである．

1. X は ϖ 進完備かつ分離的である．
2. X は捻じれのない $\mathcal{O}$ 加群である．
3. X に ϖ 進位相を入れ，A に $\mathfrak{m}_A$ 進位相を入れたとき，X は連続 A 加群になる．
4. $(X/\varpi X)[\mathfrak{m}_A]$ は k 上有限次元である．

定義 A.7. X を A 上のスムーズ Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとする．Γ の任意の開部分群 H に対し，X の H 不変部分 X^H が余有限生成であるとき，X はスムーズ余許容であるという．

次の命題が示すように，実用的な条件のもとで，スムーズ余許容表現はスムーズ許容表現と双対の関係になっている．

命題 A.8 ([E4, Proposition C.5, Lemma C.26])**.** Γ の開副有限部分群で副位数が p と素であるものが存在すると仮定する．X を A 上のスムーズ許容 Γ 表現で $\mathcal{O}$ 加群として捻じれがないものとし，X に $\mathfrak{m}_A$ 進位相を入れる．

$$\widetilde{X}_{\mathrm{cont}}=\left\{\phi\in\widetilde{X}\;\middle|\;\phi \text{ は連続である}\right\}$$

とおく．このとき，$\widetilde{X}_{\mathrm{cont}}$ は，$\widetilde{X}$ への Γ 作用で安定であり，A 上のスムーズ余許容 Γ 表現になる．さらに，対応 $X\mapsto\widetilde{X}_{\mathrm{cont}}$ は，$\mathcal{O}$ 加群として捻じれがない A 上のスムーズ許容 Γ 表現の圏と，A 上のスムーズ余許容 Γ 表現の間の反変圏同値を与える．

References

[Be] L. Berger, *La correspondance de Langlands locale p-adique pour* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Séminaire Bourbaki. Vol. 2009/2010. Exposés 1012–1026. Astérisque No. 339 (2011), Exp. No. 1017, viii, 157–180.

[BB] L. Berger and C. Breuil, *Sur quelques représentations potentiellement cristallines de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque, No. 330 (2010), 155–211.

[Bo] G. Böckle, *Deformation rings for some mod* 3 *Galois representations of the absolute Galois group of* $\mathbf{Q}_3$, Astérisque No. 330 (2010), 529–542.

[Br] C. Breuil, *Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée*, Astérisque No. 331 (2010), 65–115.

[BE] C. Breuil and M. Emerton, *Représentations p-adiques ordinaires de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et compatibilité local-global*, Astérisque No. 331 (2010), 255–315.

[BS] C. Breuil and P. Schneider, *First steps towards p-adic Langlands functoriality*, J. Reine Angew. Math. 610 (2007), 149–180.

[Bu] D. Bump, *Automorphic forms and representations*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 55. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[C–S] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paskunas and S. W. Shin, *Patching and the p-adic local Langlands correspondence*, preprint. arXiv:1310.0831.

[Ca1] H. Carayol, *Sur les représentations l-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 19 (1986), no. 3, 409–468.

[Ca2] H. Carayol, *Formes modulaires et représentations galoisiennes à valeurs dans un anneau local complet*, p-adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture (Boston, MA, 1991), 213–237, Contemp. Math., 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.

[Ch] P. Chojecki, *On non-abelian Lubin-Tate theory and analytic cohomology*, preprint. arXiv:1402.5606.

[CS] P. Chojecki and C. Sorensen, *Strong local-global compatibility in the p-adic Langlands program for* $U(2)$, preprint. arXiv:1406.1828.

[Co1] P. Colmez, *Fonctions d'une variable p-adique*, Astérisque, No. 330 (2010), 13–59.

[Co2] P. Colmez, *Représentations de* $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ *et* (φ,Γ)*-modules*, Astérisque, No. 330 (2010), 281–509.

[De] P. Deligne, *Formes modulaires et représentations de* $\mathrm{GL}(2)$, Modular functions of one variable II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 55–105. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[E1] M. Emerton, *On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms*, Invent. Math., 164 (2006), no. 1, 1–84.

[E2] M. Emerton, *A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure Appl. Math. Q., 2 (2006), no. 2, Special Issue: In honor of John H. Coates. Part 2, 279–393.

[E3] M. Emerton, *Locally analytic vectors in representations of locally p-adic analytic groups*, to appear in Mem. Amer. Math. Soc.

[E4] M. Emerton, *Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for* $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, preprint.

[EH] M. Emerton and D. Helm, *The local Langlands correspondence for* GL_n *in families*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 47 (2014), no. 4, 655–722.

[Hu] Y. Hu, *Normes invariantes et existence de filtrations admissibles*, J. Reine Angew. Math. 634 (2009), 107–141.

[KW1] C. Khare and J-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture. I*, Invent. Math. 178 (2009), no. 3, 485–504.

[KW2] C. Khare and J-P. Wintenberger, *Serre's modularity conjecture. II*, Invent. Math. 178 (2009), no. 3, 505–586.

[Ki] M. Kisin, *Deformations of* $G_{\mathbb{Q}_p}$ *and* $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ *representations*, Astérisque, No. 330 (2010), 511–528.

[La] R. P. Langlands, *Modular forms and ℓ-adic representations*, Modular functions of one variable, II (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 361–500. Lecture Notes in Math., Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.

[Sa] T. Saito, *Modular forms and p-adic Hodge theory*, Invent. Math. 129 (1997), no. 3, 607–620.

[Sc] A. J. Scholl, *Motives for modular forms*, Invent. Math. 100 (1990), no. 2, 419–430.

[So] C. M. Sorensen, *A proof of the Breuil-Schneider conjecture in the indecomposable case*, Ann. of Math. (2) 177 (2013), no. 1, 367–382.

[田口] 田口 雄一郎, Serre の保型性予想の紹介, 数理解析研究所講究録別冊, B19 (2010), 7–22.

[中村] 中村 健太郎, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応, 本報告集原稿.

[吉田] 吉田 輝義, 保型表現と Galois 表現, 第 17 回整数論サマースクール「ℓ 進ガロア表現とガロア変形の整数論」報告集, 227–247.