◎特集　「設計最適化・設計探索」

トポロジー最適化の今昔[*1]

山　田　崇　恭[*2]　Takayuki YAMADA

Key Words: Topology Optimization, Optimum Design, Structural Design, Computer Aided Design, Sensitivity Analysis

和文概要（400 字以内）　トポロジー最適化は，ある形状設計課題において，力学的観点から最適な形状を創成する方法であり，構造最適化手法の中で，最も設計自由度の高い方法である．トポロジー最適化を用いれば，高い性能を持つ設計解が得られる可能性があるが，得られる構造は幾何学的に複雑な部分構造を含む場合が多く，一般的に製造が困難である．他方で，幾何学的に複雑な構造を造形可能とする積層造形技術が発展及び普及してきた．このような背景の中，近年，トポロジー最適化法も注目されるようになり，産業製品への展開も検討されつつある．本記事では，トポロジー最適化の方法論に関する歴史的な背景とその動向について概説する．また，トポロジー最適化を理解する上で，躓きやすい基本的な事項を中心に取り上げる．特に，最適化アルゴリズムの構築で要となる感度解析についてその導出過程を具体的に示す．

1. は じ め に

トポロジー最適化は，ある形状設計課題において，力学的観点から最適な形状を創成する方法である．与えられた形状パラメータを最適化する寸法最適化や，与えられた形状の外形形状の移流に基づいて最適形状を求める形状最適化と比較して，トポロジー最適化は，孔の数などのトポロジーの変更をも許容しながら最適な形状を求めるため，最も設計自由度が高い手法と言える．その歴史は，1970 年代及び 1980 年代の Lions や，Murat，Tartar をはじめとする応用数学者らの最適形状制御の研究に始まり，数学者を中心として均質化法に基づいたトポロジー最適化の基本的な考え方が構築された．その後，1988 年に工学問題への最初の展開 [1)]として，剛性最大化問題の具体的な数値解析方法とその数値解析例が示され，これを起点として工学分野でも研究されるようになった．当初，工業製品の設計問題への展開についてもいくつか検討されてたものの，産業界に広く普及することはなかった．その原因の一つは，トポロジー最適化により得られる最適形状は，力学的には最適な形状ではあるものの，製造方法，製造コスト，製造時間等を考慮していないがために，最終的な設計案としての採用が難しかった点である．第二に，代表的なトポロジー最適化の方法論である均質化設計法や密度法の場合，構造と空洞の中間状態であるグレースケールを部分構造として含む形状が最適形状として得られる点である．グレースケールは，無限小の孔が多数散らばっている多孔質体として解釈できるため，グレースケールを含む最適設計解は，多孔質体が最適構造であることを意味しているが，通常の機械加工を用いて，そのような形状を製造するのは困難であったため，トポロジー最適化の応用範囲は限定されていた．

学術研究領域の観点からは，1988 年の論文を起点として，均質化設計法は欧米を中心に盛んに研究されるようになった．2000 年代以降は，均質化設計法と比べて密度法の方が簡便であるため，トポロジー最適化の研究の主流は密度法に置き換わっていった．市販のトポロジー最適化のソフトウエアの多くは密度法を採用しており，2010 年頃には，均質化設計法の研究報告は急激に少なくなった．その後，密度法の適用の限界を本質的に解決する方法として，オイラー座標系に基づいた形状最適化やレベルセット法に基づく方法など，構造最適化手法の開発も活発に行われるようになった．同時に，熱問題や電磁気学問題，流体力学問題など，構造力学問題以外の領域への展開方法についても研究されるようになった．

他方，近年，積層造形技術は急速な発展を遂げ，産業界から高い注目を集めている．積層造形技術は，複雑な形状や，孔が散らばっているような多孔体の製造を可能とするため，近年，トポロジー最適化が産業界からも注目されるようになってきた．すなわち，2000 年代までは，トポロジー最適化は学術研究の領域から産業界へ広がることはほとんどなかったが，積層造形技術の発展により，トポロジー最適化の産業的な有用性についても議論されるようになってきた．中でも，一度衰退した均質化設計法に対しても再び注目を集めつつあることが興味深い．

本記事では，トポロジー最適化の方法論に関連する基本的な事項を中心に概説する．特に，トポロジー最適化を学ぶ学生や技術者が躓きやすい事項と，基礎理論の理解に必要にも関わらず日本語で適切に解説された記事等がない事項を重点的に議論する．これらがトポロジー最適化に馴染みのない方々の学習の参考になれば幸いである．

平成 30 年 8 月 30 日原稿受理　　Topology Optimization: Old and New
[*2] 京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻

2. トポロジー最適化の考え方

2.1 問題設定 構造最適化とは，ある目的関数Jが最小（あるいは最大）となる形状Ωを求める問題である.通常，目的関数は構造力学における剛性，気体力学における揚力など，物理的な特性を用いて表現される．従って，評価対象とする物理現象を表現する支配方程式を満たすことを前提として最適な形状を探索するため，支配方程式は，最適化問題における制約条件となる．すなわち，構造最適化問題は次のように定式化される．

$$\begin{aligned} &\inf_{\Omega\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \quad J(u,\Omega) \\ &\text{Subject to: governing equation system} \end{aligned} \tag{1}$$

ここで，uは支配方程式の解として得られる状態変数，$\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}$形状$\Omega$が許容される空間を表す．構造最適化問題の特徴として，目的関数Jに含まれる支配方程式の解uは，一般に，陽な形式の関数で表現されず，偏微分方程式の数値解析解として与えられる．例えば，構造力学問題の場合は弾性方程式，流体力学問題の場合は，ナビエ・ストークス方程式等を何らかの数値解析手法を用いて解析し，その数値解を用いる．

次に，構造最適化問題（1）に対して，トポロジー最適化問題への拡張を考える．トポロジー最適化問題では，次式に示す特性関数$\chi(\boldsymbol{x})$を用いて形状Ωを表現する．

$$\chi(\boldsymbol{x}) := \begin{cases} 1, & \boldsymbol{x}\in\Omega \\ 0, & \boldsymbol{x}\in D\setminus\Omega \end{cases} \tag{2}$$

ここで，領域Dは図1に示すように，形状Ωの存在が許容される領域であり，形状Ωは，領域Dに必ず包含されることが課せられる．

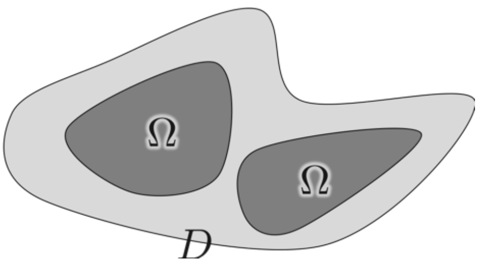

図1 固定設計領域 D

ここで，領域Dは設計解探索の過程で変化しないため，固定設計領域と呼ばれる．特性関数$\chi(\boldsymbol{x})$を用いれば，トポロジー最適化問題は，次のように定式化される．

$$\begin{aligned} &\inf_{\chi\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \quad J(u(\chi),\chi) \\ &\text{Subject to: governing equation system} \end{aligned} \tag{3}$$

式（2）に示すように，特性関数$\chi(\boldsymbol{x})$は，形状の内部で 1，外部で 0 をとる分布関数であり，トポロジー最適化問題は，最適な特性関数の分布を求める問題であると考えることができる．注目すべき点は，特性関数の値が変更されれば，形状 Ω のトポロジーの変更も含まれる可能性がある点である．すなわち，特別な操作をしなくても，形状Ωの孔の数の変化や境界の融合など，トポロジーの変更を表現できる点がトポロジー最適化の考え方の画期的な点である．

さて，式（3）のように定式化された最適化問題の最適解を何らかの手法で求めれば，トポロジー最適化法が構築できるのだろうか．残念なことに，その答えは「いいえ」であり，これがトポロジー最適化を難解にさせる原因の一つである.具体的に述べると，トポロジー最適化問題（3）は，最適解が存在しないため，最適解を得ることできない．その工学的な検討例としては，Cheng と Olhoff のリブの最適配置問題の検討 [2]が有名である．その検討では，限られた質量の制約下で最適な補強リブの配置には，無限小の厚さのリブが必要とされることが示された．つまり，ある有限の厚さのリブを考えると，より薄いリブを複数利用する方がより良い設計解であり，さらに薄いリブを検討すれば，さらに良い解となり，永遠に最適解にたどり着くことはない．したがって，トポロジー最適化問題（3）の設計解の探索を行うことができたとしても，最適解にたどり着くことはない．数学的に厳密に述べると，トポロジー最適化問題（3）は不良設定問題であるため，最適解の探索をしても意味がない．したがって，トポロジー最適化問題（3）は，何らかの手段で，不良設定問題から良設定問題に置き換えた後に最適解の探索をする必要がある．どのようにして不良設定問題を良設定問題に置き換えるかが，各種トポロジー最適化手法の本質的な特徴を表現していると言える．

次節以降において，良設定問題への置き換え方法に注目しながら，代表的なトポロジー最適化の方法論の考え方について概説する.ここでは,議論の抽象化を避けるために，次式に示す拡散方程式で記述されるスカラーポテンシャル場について考える．

$$\begin{aligned} &\inf_{\chi\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \quad J(u_\chi(\chi),\chi) \\ &\text{Subject to: } \begin{cases} -\mathrm{div}(A_\chi \nabla u_\chi) = f & \text{in} \quad D \\ \qquad u_\chi & \text{on} \quad \partial D \end{cases} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで，fは体積力，u_χは状態変数，A_χは拡散係数である．空洞領域は，物体領域Ωの拡散係数$\alpha>0$と比べて，十分に小さい拡散係数$\beta>0$を持つ材料として表現する：

$$A_\chi(\boldsymbol{x}) := \alpha\chi(\boldsymbol{x}) + \beta(1-\chi(\boldsymbol{x})) \tag{5}$$

なお，式（4）のスカラーポテンシャル問題は，物理的には，定常熱伝導問題，張力が均一かつ鉛直方向のみに荷重が作用する膜の静的な釣り合い問題がそれに対応する.ただし，薄膜の釣合問題は物理的な前提条件が崩れてしまうため，単純に式（5）を適用できない．また，これをベクトル場に拡張すれば，構造力学問題に対応することを注記する．

また，トポロジー最適化法の説明として，有限要素法に

よる要素分割を前提とする場合があるが，本来，トポロジー最適化法は，数値解析法とは独立した概念である．すなわち，トポロジー最適化法は有限要素法による離散化及び数値解析を用いなくても，差分法，境界要素法，有限体積法等の種々の数値解析手法を適切に選択して数値解を求めても良い．

2.2　均質化設計法の考え方　均質化設計法の基本的な考え方は，固定設計領域を特定の形状パラメータで表現された単位構造（ユニットセル）Y が並んだ多孔質体と考えることである．例えば，図２に示すように，固定設計領域と比べて十分に小さいスケールにおいて，固定設計領域の内部は，矩形の孔を持つ周期構造であると仮定する．すなわち，固定設計領域は，無限小のユニットセル Y が無限に並んで構成されていると仮定し，各ユニットセル Y の形状は，その幾何学的なパラメータ(a, b, θ)と，構造領域と空洞領域の体積比ρにより表現される．

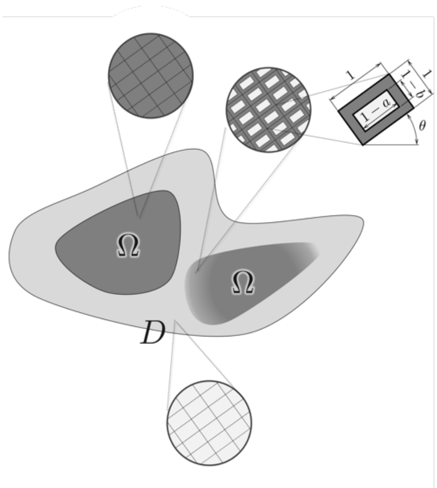

図２　均質化法の考え方

ここで，特性関数列χ_ϵを考える．拡散係数は$A_\epsilon(\boldsymbol{x}) := \alpha\chi_\epsilon(\boldsymbol{x}) + \beta(1-\chi_\epsilon(\boldsymbol{x}))$となり，支配方程式は

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A_\epsilon \nabla u_\epsilon) = f & \text{in} \quad D \\ \qquad u_\epsilon & \text{on} \quad \partial D \end{cases} \tag{6}$$

となる．このとき，連続な密度関数$0 \leq \rho(x) \leq 1$に（弱い意味で）収束する列χ_ϵが存在することが知られている．そして，拡散係数A_ϵは，均質化拡散係数A^*に（均質化の意味で）収束し，状態変数u_ϵは（強い意味で）次式の均質化問題の解に収束する．

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A^* \nabla u) = f & \text{in} \quad D \\ \qquad u & \text{on} \quad \partial D \end{cases} \tag{7}$$

直感的に述べると，固定設計領域を多孔質体と仮定して定式化すると，式（4）の支配方程式は，式（7）の均質化方程式と等価である．すなわち，無限小の空隙を含めた拡散係数A_ϵを直接扱うのではなく，その平均的な特性A^*を用いて，状態変数$u(\boldsymbol{x})$を評価する．このとき，均質化された拡散係数A^*は，単位周期領域 Y におけるミクロスケール問題

$$-\mathrm{div}\left(A_{\chi}(\nabla w_i - \boldsymbol{e}_i)\right) = 0 \qquad \text{in } Y \tag{8}$$

の周期解w_iを用いて次式で与えられる．

$$A^*_{ij} = \int_Y A_\chi(\boldsymbol{e}_i + \nabla w_i)\cdot(\boldsymbol{e}_j + \nabla w_j)\ dy \tag{9}$$

ここで，e_iは標準基底である．これらを用いてトポロジー最適化問題を定式化すると次のようになる．

$$\begin{aligned} &\inf_{(\rho, A^*)\in\mathcal{U}^*_{\mathrm{ad}}} \quad J(u(\rho, A^*), \rho, A^*) \\ &\text{Subject to:} \quad \text{Eq. (7) and Eq. (8)} \end{aligned} \tag{10}$$

ここで，$\mathcal{U}^*_{\mathrm{ad}}$は，周期構造の仮定により緩和された形状が許容される空間である．この方法を均質化法に基づくトポロジー最適化，あるいは均質化設計法と呼ぶ．均質化設計法は，目的関数を最小化させる特性関数の列χ_ϵを探索するのではなく，固定設計領域は多孔体であるとの仮定に基づいて特性関数を連続な密度関数$\rho(\boldsymbol{x})$に置き換えて最適化問題を構成する．ここで，注目すべき点は，緩和された問題(10)の解は，トポロジー最適化問題（4）の解と一致することが保証されている点である．ここで，ユニットセルの大きさϵを用いて，次式が成立する．

$$\lim_{\epsilon\to 0} J\left(u_\chi\left(\chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right), \chi\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right) = J(u(\rho, A^*), \rho, A^*) \tag{10}$$

すなわち，多孔体の仮定に基づく緩和の操作の前後で，トポロジー最適化問題が変化しないことが保証されている．また，最適な均質化拡散係数A^*は等方的な特性を持たないことが知られている．例えば，剛性最大化問題における最適な孔の角度は主応力方向により決定される．より良い設計解の実現のためには，構成する材料の異方性の積極的な利用が重要であることがわかる．

2.3　密度法の考え方　前述のように，均質化設計法では，ユニットセル Y により構成されるミクロスケールの問題(8)と，固定設計領域を構成するマクロスケール問題（7）を適切に考慮する必要がある．密度法では，この操作を簡便にするために，均質化拡散係数A^*と密度関数$\rho(\boldsymbol{x})$との関係を適当に与える方法である．その代表的な方法として，SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization)法がある．SIMP 法では，拡散係数A^+を次式により与える．

$$A^+(\rho) = (\alpha - \beta)\rho^3 + \beta \tag{11}$$

このとき，トポロジー最適化問題は次のようになる．

$$\inf_{\rho\in\mathcal{U}^+_{\mathrm{ad}}} \quad J(u_\rho(\rho),\rho)$$
$$\text{Subject to: } \begin{cases} -\mathrm{div}(A^+\nabla u_\rho)=f & \text{in} \quad D \\ u_\rho & \text{on} \quad \partial D \end{cases} \tag{12}$$

このように，密度法では，ミクロスケールを考慮しなくて良いので，均質化設計法と比べて非常に簡便である．しかしながら，式（11）の力学的及び数学的根拠はないことに注意されたい．実際に，仮想的な拡散係数A^+は均質化拡散係数A^*がとりうる範囲を超えてしまうため，均質化材料として存在しない状態を許容している．一方で，均質化設計法は，比較的煩雑な議論が必要にはなるものの，対応する多孔体が必ず存在している点で本質的に異なる．

2.4　レベルセット法に基づく方法の考え方　均質化設計法や密度法では，支配方程式に注目し，良設定問題への置き換えを図った方法である．それに対して，レベルセット法に基づく方法 [4]では，目的関数に注目し，良設定問題への置き換えを図った方法である．具体的には，次式に示すように，トポロジー最適化問題（4）を目的関数に正則化項を加えた最適化問題に置き換える方法である．

$$\inf_{\phi\in L^\infty} \quad J(u(\phi),\phi)+R(\phi)$$
$$\text{Subject to: } \begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u)=f & \text{in} \quad \Omega(\phi) \\ u & \text{on} \quad \partial D \end{cases} \tag{13}$$

ここで，$\phi(\boldsymbol{x})$はレベルセット関数と呼ばれるスカラー関数であり，次式に示すように，その等値面で物体領域の境界，正負で構造の内外を識別する．

$$\begin{cases} -1\le\phi(\boldsymbol{x})<0 & \text{for} \quad \boldsymbol{x}\in D\setminus\Omega \\ \phi(\boldsymbol{x})=0 & \text{for} \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \\ 0<\phi(\boldsymbol{x})\le 1 & \text{for} \quad \boldsymbol{x}\in\Omega \end{cases} \tag{14}$$

また，正則化項$R(\phi)$は次式により与えられる．

$$R(\phi):=\int_D \frac{1}{2}\tau|\nabla\phi|^2\, d\Omega \tag{15}$$

ここで，$\tau>0$は正則化係数であり，この値を調整することで，最適構造の幾何学的な複雑さを制御できる．前述のように，トポロジー最適化では，無限に細かい構造の存在を許容しているが，正則化項 R の追加により，過度に複雑な形状を排除して最適解を探索することになる．直感的に述べると，正則化係数は，陰的に最適構造の周長制約を与えており，幾何学的制約による最適化問題の正則化法の一方法であると言える．

レベルセット法に基づく方法の特徴は，最適解の探索を，時間発展方程式を解く問題に置き換える点である．具体的には，仮想的な時間 t を導入し，式（13）の目的関数の勾配に比例してレベルセット関数の変更を繰り返して最適解を得る．次式に示す，反応拡散方程式を解けば良いので，汎用有限要素解析ソフトウエアとの親和性が良い．

$$\frac{\partial\phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}=-K(J'-\tau\nabla^2\phi) \tag{16}$$

ここで，$K>0$ は比例係数である．

2.5　最適化問題としての正当性　本節では，トポロジー最適化の理論的な背景をより深く理解するために，良設定問題への置き換え方法の概略を述べる．初めてトポロジー最適化を学ぶ際には，直感的な理解のみで十分である．

前述のように，トポロジー最適化問題は数学的観点から不良設定問題であり，最適解を直接求めることはできない．すなわち，最適化問題の緩和(relaxation)もしくは正則化(regularization)の議論がなければ，最適解の存在の保証はなく，最適化とは言えない．良設定問題に置き換えれば，解が存在し，さらには，解が一意性及び解の連続性が保証される．直感的に述べると，性質がよい等価なモデルに置き換える，最適形状が滑らかになるように設計感度に滑らかさを持たせる，あるいは曲率が大きくならないように幾何学的制約を加えるなどの操作を適切に行えば良い．数学的に厳密に述べると，緩和とは，設計変数の空間（設計空間）の変更により，最適解が存在する問題へ置き換えることである：

$$\inf_{\chi\in\mathcal{U}_{\mathrm{ad}}} \quad J(\chi) \quad = \quad \min_{(\rho,A^*)\in\mathcal{U}^*_{\mathrm{ad}}} \quad J(\rho,A^*) \tag{17}$$

ここで，緩和前（左辺）と緩和後（右辺）の関係が等号であることが重要である．従って，均質化設計法は緩和を用いた方法と言えるが，密度法は等号が成立しないため緩和法ではない．すなわち，存在しない材料特性をも許容しながら最適解を探索するため，厳密に言えば，類似した異なる最適化問題を扱っていることになる．密度法は，最適化問題の緩和ではなく，最適化問題の凸化であると言える．より詳細な議論と均質化設計法との比較については，Allaire の書籍 [3]の中で理論的な議論及び具体的な数値解析例が示されている．数学的見地からは異なる問題を扱っていることになるが，工学的見地からみれば，密度法は，簡便に設計案の候補を与える方法として，その意義は十分にあることを注記する．

一方，幾何学的制約や滑らかさを与える操作は正則化であり，例えば，次のように表現できる．

$$\inf_{\phi\in L^2} \quad J(\phi) \;\to\; \inf_{\phi\in L^2} \quad J(\phi)+\epsilon^2\left\|\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\right\|^2_{L^2} \tag{18}$$

ここで，正則化の前後で設計空間が変化しないことが重要である．これまでに多くのトポロジー最適化法が提案されており，どのように緩和もしくは正則化を行うのかが各方法論の大きな特徴となる．

4. 最適化計算の方法

4.1 最適化アルゴリズム 一般に，トポロジー最適化問題の最適解を直接求めることは困難である．通常，適当な初期解を与え，それを勾配法に基づいて更新を繰り返し，最適解の候補となる数値解を求める．典型的な最適化アルゴリズムは，次に示す工程で構成されている．

① 適当に初期解を与える．
② 支配方程式の数値解を，有限要素法等を用いて解析する．
③ 随伴方程式の数値解を，有限要素法等を用いて解析する．
④ 随伴変数法により設計感度（勾配）を求める．
⑥ 収束判定を行い，収束していれば最適解の候補と判断する．収束していなければ，次のステップに進む．
⑤ 設計感度に基づき，解の候補を更新する．
⑥ ステップ②に戻る．

構成としては，非常に単純ではあるが，随伴方程式と設計感度の導出，いわゆる感度解析の方法は広く知られておらず，誤った記述のある文献も多くある．次節で，その方法について述べる．

4.2 随伴変数法による感度解析 目的関数の設計変数に対する勾配を設計感度と呼び，それを評価する工程を感度解析という．制約関数が多く，設計変数が少ない場合は，直接的に変分をとる方法，いわゆる直接微分法を用いれば良い．しかしながら，トポロジー最適化は設計変数の数が多いため，随伴変数法を用いて設計感度を評価する方法，いわゆる随伴変数法が一般的である．ここでは，実用的な展開を考慮して，ラグランジュ未定乗数法に基づいた随伴変数法を概説する．最初に，次式に示す最適化問題を考える．

$$\begin{aligned}&\inf_{h} \qquad J(u(h)) = \int_{\mathrm{D}} j(u) d\Omega \\ &\text{Subject to: } \begin{cases} -\mathrm{div}(Ah\nabla u) = f & \text{in} \quad D \\ \quad u & \text{on} \quad \partial D \end{cases}\end{aligned} \tag{19}$$

ここで，設計変数は連続関数$h(\boldsymbol{x})$であり，Ah を Ah^p に置き換えれば密度法に対応する．また，均質化設計法におけるコンプライアンス問題に限定すれば，最適なミクロ構造の角度パラメータ θ が一意的に与えられるため，連続関数$h(\boldsymbol{x})$を，正規化された密度関数$\rho(\boldsymbol{x})$に置き換えれば均質化設計法に対応する．

最適化問題（19）のラグランジュアン L を次式で定義する．

$$\begin{aligned}L(\tilde{u},\tilde{v},h,\lambda) \coloneqq J(\tilde{u}) &+ \int_{D} \mathrm{div}(Ah\nabla\tilde{u})\tilde{v}\ d\Omega \\ &+ \int_{D} f\tilde{v}\ d\Omega + \int_{\partial D} \lambda\tilde{u}\ d\Gamma\end{aligned} \tag{20}$$

$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$は状態変数，$\tilde{v}(\boldsymbol{x})$は領域 D で定義されるラグランジュ乗数，$\lambda(\boldsymbol{x})$は領域 D の境界上で定義されるラグランジュ乗数である．ただし，この時点では，$\tilde{u}(\boldsymbol{x}) \neq u(\boldsymbol{x})$であることに注意されたい．$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$を$u(\boldsymbol{x})$として定式化した場合，設計変数$h(\boldsymbol{x})$と状態変数$u(\boldsymbol{x})$が依存関係を持つため，後述の変分の過程で煩雑な議論を必要とする．すなわち，状態変数$u(\boldsymbol{x})$を用いてラグランジュアンを定義すると，状態方程式を満たすように変分をとる必要がある．

実際に，式（20）で定義したラグランジュアンを出発点として，感度解析の過程を示す．基本的な考え方は，ラグランジュアンの各変数の停留点の条件（停留条件）を考えることにある．最初に，ラグランジュ乗数$\lambda(\boldsymbol{x})$の停留条件は

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \lambda}, \mu \right\rangle = 0 \tag{21}$$

であるから，

$$\int_{\partial D} \mu\tilde{u}\ d\Gamma = 0 \tag{22}$$

となる．なお，ラグランジュアン L の λ に対するμ方向の変分$\langle \frac{\partial L}{\partial \lambda}, \mu \rangle$の導出は，$\lambda(t) = \lambda + t\mu$に置き換えて，$t > 0$で微分をとった後，$t \to 0$とすれば良い．ここで，任意の μ について式（22）が成立するため，結局，ラグランジュ乗数$\lambda(\boldsymbol{x})$の停留条件は

$$\tilde{u} = 0 \qquad \text{on} \quad \partial D \tag{23}$$

となる．

同様にして，ラグランジュ乗数$\tilde{v}(\boldsymbol{x})$の停留条件は

$$-\mathrm{div}(Ah\nabla\tilde{u}) = f \qquad \text{in} \quad D \tag{24}$$

となる．式（23）と式（24）より，状態変数$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$を状態方程式の解$u(\boldsymbol{x})$と等しいとすれば，ラグランジュ乗数$\tilde{v}(\boldsymbol{x})$とラグランジュ乗数$\lambda(\boldsymbol{x})$の停留条件を与えたことになる．

次に，状態変数$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$の停留条件について考える．式（22）の右辺第二項を部分積分すれば次式が得られる．

$$\begin{aligned}L = J &+ \int_{D} \mathrm{div}(A^T h\nabla\tilde{v})\tilde{u}\ d\Omega + \int_{D} f\tilde{v}\ d\Omega \\ &+ \int_{\partial D} \tilde{u}\{\lambda - A^T h\nabla\tilde{v}\cdot n\}\ d\Gamma \\ &+ \int_{\partial D} (Ah\nabla\tilde{u}\cdot n)\tilde{v}\ d\Gamma\end{aligned} \tag{25}$$

式（25）に対して，状態変数$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$の停留条件

$$\left\langle \frac{\partial L}{\partial \tilde{u}}, \psi_u \right\rangle = 0 \tag{26}$$

を考えれば，次式が得られる．

$$-\mathrm{div}(A^T h \nabla \tilde{v}) = \frac{\partial j}{\partial \tilde{u}} \quad \text{in} \quad D \tag{27}$$

$$\tilde{v} = 0 \quad \text{on} \quad \partial D \tag{28}$$

$$\lambda = A^T h \nabla \tilde{v} \cdot n \quad \text{on} \quad \partial D \tag{29}$$

境界条件（28）の下で，方程式（27）を解いた解を$v(\boldsymbol{x})$として，ラグランジュ乗数$\tilde{v}(\boldsymbol{x})$と等しいとすれば，状態変数$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$の停留条件を与えたことになる．なお，方程式（27）を随伴方程式，その解$v(\boldsymbol{x})$を随伴変数と呼び，ここでは，ラグランジュ乗数と区別して，随伴変数を$v(\boldsymbol{x})$と表記することに注意されたい．

最後に，ラグランジュアンLと目的関数Jの関係

$$J(u(h)) = L(u(h), \tilde{v}, h, \lambda) \tag{30}$$

を用いて，目的関数の設計変数に対する勾配を求める．すなわち，ラグランジュアンLの状態変数$\tilde{u}(\boldsymbol{x})$に支配方程式の状態変数$u(\boldsymbol{x})$を代入すると目的関数$J$と一致することに注目する．ここで，

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial J}{\partial h}, k \right\rangle &= \left\langle \frac{\partial L(u(h), \tilde{v}, h, \lambda)}{\partial h}, k \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial L(u(h), \tilde{v}, h, \lambda)}{\partial u}, \frac{\partial u}{\partial h}(k) \right\rangle\end{aligned} \tag{31}$$

であるから，ラグランジュ乗数$\tilde{v}(\boldsymbol{x})$として，随伴方程式の解$v(\boldsymbol{x})$を選べば，

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial h}, k \right\rangle = \left\langle \frac{\partial L(u(h), v, h, \lambda)}{\partial h}, k \right\rangle \tag{32}$$

となる．ここで，右辺は式（20）の右辺第二項を部分積分した後に，$h(\boldsymbol{x})$で変分をとれば良いので，

$$\left\langle \frac{\partial J}{\partial h}, k \right\rangle = \int_D (A \nabla u \cdot \nabla v) k \, d\Omega \tag{33}$$

となる．従って，状態方程式と随伴方程式を解き，∇uと∇vを解析すれば，設計感度$A \nabla u \cdot \nabla v$を評価できる．なお，目的関数を平均コンプライアンス

$$J(u(h)) = \int_D f u \, d\Omega \tag{34}$$

とし，拡散係数に対称性（$A = A^T$）を仮定すると，随伴方程式は状態方程式と一致し，随伴変数$v(\boldsymbol{x})$は支配方程式の状態変数$u(\boldsymbol{x})$となる．このような特殊な最適化問題を自己随伴問題と呼ぶ．自己随伴問題では，随伴方程式を解析しなくても設計感度が評価できる特徴を持つ．構造力学の場合は，平均コンプライアンス，いわゆる剛性問題が自己随伴問題となる．

なお，ラグランジュアンの定式化の手順は，制約関数や支配方程式，境界条件が複数ある最適化問題の場合においても，同様の手順で，ラグランジュ乗数をかけてラグランジアンに加えていけば良い．また，複数領域を考慮した問題や，その界面における連続条件等を含む問題の場合も，それぞれラグランジュ乗数をかけてラグランジアンに加えれば良い．

6. おわりに

本記事では，トポロジー最適化の方法論に関する歴史的な背景とその動向について概説した．また，トポロジー最適化法の構築で要となる感度解析についてその導出過程を示した．前述のように，積層造形技術とトポロジー最適化の組合せが注目を集めているが，幅広い産業界への展開には，従来の製造方法とトポロジー最適化を組合せる方法[5,6]も今後の重要課題の一つになりうる．

参　考　文　献

1) Bendsøe, M. P. and Kikuchi, N.: Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 71-2 (1988), pp.197-224.
2) Cheng, K. T. and Olhoff, N., An Investigation Concerning Optimal Design of Solid Elastic Plates, International Journal of Solid and Structures, 17 (1980), pp.305-323.
3) Allaire, G., Shape Optimization by the Homogenization Method, Springer, 2001.
4) Yamada, T., Izui, K. Nishiwaki, N. and Takezawa, A., A Topology Optimization Method Based on the Level Set Method Incorporating a Fictitious Interface Energy, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199 (2010), pp.2876-2891.
5) Sato, Y., Yamada, T., Izui, K. and Nishiwaki, S., Manufacturability Evaluation for Molded Parts Using Fictitious Physical Models, and Its Application in Topology Optimization, The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 92 (2017), pp.1391-1409.
6) 佐藤勇気，山田崇恭，泉井一浩，西脇眞二，仮想的な物理モデルに基づく幾何学的制約付きトポロジー最適化（型成形及びフライス加工のための幾何学的制約法），日本機械学会論文集，83 (2017), No. 851 pp.17-00081-17-00081.

山田　崇恭（正会員）
京都大学大学院工学研究科機械理工学専攻助教．1984 年生．岐阜県出身．2005 年岐阜工業高等専門学校機械工学科卒業．2007 年京都大学工学部物理工学科卒業．2008 年京都大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻修士課程修了．2010 年同博士後期課程修了．博士（工学）．名古屋大学大学院工学研究科機械理工学専攻助教を経て現職．この間，海外特別研究員制度によりフランス共和国エコール・ポリテクニーク応用数学センター研究員．専門は最適設計，計算力学．