

断層近傍地震動を模擬したダブルインパルスを受ける非線形粘性減衰を有する
1自由度系弾塑性構造物の極限応答CRITICAL EARTHQUAKE RESPONSE OF ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES WITH
NONLINEAR VISCOUS DAMPING UNDER DOUBLE IMPULSE AS SUBSTITUTE FOR
NEAR-FAULT GROUND MOTION田村 豪基^{*1}, 小島 紘太郎^{*2}, 藤田 皓平^{*3}, 竹脇 出^{*4}Goki TAMURA, Kotaro KOJIMA, Kohei FUJITA
and Izuru TAKEWAKI

The double impulse is introduced as a substitute for the fling-step near-fault ground motion and a closed-form expression is derived for the elastic-plastic response of a structure with nonlinear viscous damping under the 'critical double impulse'. It is shown that, since only the free vibration appears under such double impulse, the energy approach enables the derivation of the closed-form expression of a complicated elastic-plastic response with nonlinear damping. The quadratic or elliptical-function approximation for the damping force-deformation relationship is introduced. The validity and accuracy of the theory are investigated by using the response analysis to the corresponding one-cycle sinusoidal input.

Keywords : Critical Earthquake Response, Elastic-plastic Response, Near-fault Ground Motion, Double Impulse, Oil Damper, Relief Force

極限地震応答, 弾塑性応答, 断層近傍地震動, ダブルインパルス, オイルダンパー, リリーフ荷重

1. 序

最近の高密な地震観測網を用いた研究により、断層近傍で観測される地震動の特性が明らかにされつつある。断層近傍地震動の主要部分は、少数のパルス的な波群から構成されるという特徴を有しており、その地震動およびそれに対する建物の応答については、多くの研究が存在する¹⁻⁵⁾。最近の研究から、fling-step 入力(断層面平行方向)と forward-directivity 入力(断層面直交方向)は、近似的に2個もしくは3個の正弦半波としてその特徴が表現できることが明らかとなっている^{1,4,6,7)}。また、このようなパルス波が、弾塑性構造物に大きな変形をもたらすことが指摘されており、パルス性の地震動に対する最大応答は、建物1次固有周期に対するパルス波周期の比により特徴づけられることが知られている。南と林は、多層建物をせん断棒でモデル化し、1次固有周期とパルス周期の比に応じて変形集中を表す際に考慮すべきモード数が異なることを示している⁸⁾。また、断層近傍地震動に限定したものではないが、地震動を正弦波一波等に置換する有効な方法もいくつか提案されており、境らは、最大地動加速度と有効周期の2つのパラメータで地震時の弾塑性応答を近似的に評価できることを示している⁹⁾。

それに対して、小島らは、1サイクル正弦波や1.5サイクル正弦波で近似的に表現される断層近傍地震動の主要部分を対象として、

それとフーリエ振幅スペクトルの形状が類似で最大値が等価なダブルインパルスやトリプルインパルスを導入し、完全弾塑性復元力特性やノーマルバイリニア型復元力特性を有する非減衰もしくは線形粘性減衰1質点系モデルの「極限的ダブルインパルス」(あるいはトリプルインパルス)と、そのような入力に対する弾塑性応答の閉形表現を導出している¹⁰⁻¹⁴⁾。インパルス入力に対する応答は、質点の瞬間的な速度変化で表され、インパルスが作用した後は自由振動となるため、複雑な弾塑性応答の閉形表現をエネルギーの平衡から簡潔に導出することが可能となる。特に最大変位応答を極大にする最悪なインパルスのタイミングに注目している点が大きな特徴であり、このような概念は極限外乱法に基づく^{15,16)}。非減衰系と線形粘性減衰系の両方において、第2インパルスの極限的タイミング(応答が最悪となるタイミング)は、第1インパルスが作用してから最初の最大変位到達後に復元力が0となるときであり、これを極限的ダブルインパルスという。エネルギー平衡において、第2インパルス作用時にひずみエネルギーが0となるため、運動エネルギーのみを考えればよいこととなり扱いが容易となる。弾塑性モデルの共振応答を求めるには、入力レベルや振動数ごとに等価線形化^{17,18)}や時刻歴応答解析などを多数回繰り返す必要があるのに対して、小島らの方法は、入力レベルに対しても繰り返しの必要がない極めて効

*1 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 大学院生
*2 京都工芸繊維大学デザイン・建築学系 助教・博士(工学)
*3 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 助教・博士(工学)
*4 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・工博

Grad. Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ.
Assist. Prof., Faculty of Design and Architecture, Kyoto Institute of Technology, Dr.Eng.
Assist. Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.
Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.

率的な方法である。

さらに、この極限的ダブルインパルスに関する理論を免震建物のロバスト設計に適用した研究も存在する。Fujita et al.は弾塑性復元力特性を有する高層免震建物を縮約した非減衰1自由度系モデルに対して、小島らが導出した閉形表現¹⁰⁾を利用することにより、免震層の剛性や降伏変位等の構造特性が変動した際の弾塑性最大応答の上限値に関するロバスト性評価法を示している¹⁹⁾。また、Hayashi et al.は、弾塑性履歴減衰と粘性減衰の両方を有する免震建物と耐震建物を線形オイルダンパーで連結したハイブリッド構造システムに対して、多自由度系を1自由度系に縮約する手法を提案するとともに、小島らが導出した閉形表現¹⁴⁾を長周期長時間地震動を模擬したマルチインパルスに拡張している²⁰⁾。このように、想定される断層近傍地震動や長周期長時間地震動に対して最悪な応答を求めることで、ロバスト性や冗長性に優れた免震建物の設計が可能となる。

本研究では、小島らが展開した極限的ダブルインパルスに対する線形粘性減衰を有する完全弾塑性1自由度系の最大変位応答の閉形表現¹⁴⁾を、非線形粘性減衰を有する完全弾塑性1自由度系に拡張する。非線形粘性減衰を有する完全弾塑性1自由度系として、ここでは、鋼材ダンパーと天然ゴム系積層ゴム支承、及びリリーフ機構付オイルダンパー²¹⁾を組み合わせさせた免震装置を建物基礎に設置した免震建物を想定している。鋼材ダンパーと天然ゴム系積層ゴム支承を合わせた復元力特性を完全弾塑性型で簡易的にモデル化し、オイルダンパーはリリーフ機構付きの非線形粘性減衰モデルとして扱う。本論文では、このような弾塑性復元力特性と非線形減衰力特性の両方を有する1自由度系に対して、第2インパルスの極限的タイミングを見出すとともに、そのような極限的ダブルインパルスに対する最大変位応答の閉形解を導出することを目的とする。これにより、免震建物のより安全性の高い設計が可能となると期待される。

弾塑性復元力特性と非線形粘性減衰の両方を有する1自由度系において、ダブルインパルスに対する最大変位応答を、微分方程式を厳密に解いて解析的に求めることは困難である。そこで、本論文では、小島らの研究¹⁴⁾を参考として、減衰力-変位関係を2次関数または楕円で近似することで減衰力がなす仕事を簡易的に評価し、エネルギーの平衡に基づき最大弾塑性応答を陽に導く。減衰力-変位関係の近似方法や閉形解の精度と妥当性の検討は、最後に時刻歴応答解析を用いて行う。

2. 断層近傍地震動のダブルインパルスへの置換

断層近傍地震動の断層面平行方向入力、Fig.1に示すように、正弦波1波（以降では、1サイクル正弦波と呼ぶ）で特徴づけられ、断層面直交方向入力は3つの正弦半波で特徴づけられる^{6,7)}。前述の通り、小島らは、このような断層近傍地震動の両入力を、それぞれFig.1(a),(b)に示すようなダブルインパルスとトリプルインパルスで近似する方法を提案している¹⁰⁻¹⁴⁾。本論文では、特にダブルインパルスを取り扱う。

ダブルインパルスによる地動加速度は、ディラックのデルタ関数 $\delta(t)$ を用いて次式で表される。

$$\ddot{u}_g(t) = V\delta(t) - V\delta(t - t_0) \quad (1)$$

ここで、 V は入力速度レベル、 t_0 はインパルス時間間隔である。ダ

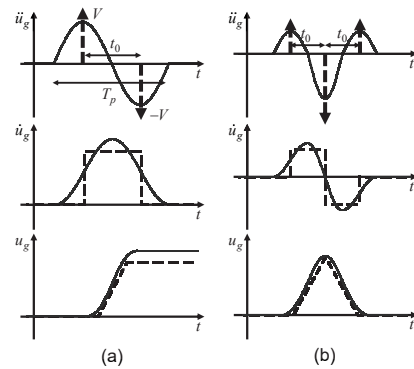


Fig.1 Modeling of near-fault ground motion:(a) Fling-step input and double impulse,(b) Forward-directivity input and triple impulse¹⁰⁻¹⁴⁾

ブルインパルスと1サイクル正弦波の速度と変位をFig.1(a)に示す。ダブルインパルス入力のフーリエ変換は、次式のようにになる。

$$\ddot{U}_g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \{V\delta(t) - V\delta(t - t_0)\} e^{-i\omega t} dt = V(1 - e^{-i\omega t_0}) \quad (2)$$

ここで i は虚数単位を表す。

弾塑性応答の比較を行う場合には、入力速度レベルの基準化に注意が必要である。ここでは、2つの入力のレベルを等しくする方法として、ダブルインパルスと1サイクル正弦波の加速度フーリエ振幅スペクトルの最大値を等しくする方法を用いる^{10,12-14)}。2つの入力の加速度フーリエ振幅スペクトルの最大値を等しくすることで、ダブルインパルスの入力レベル V と1サイクル正弦波の最大速度 V_p の比が一定となる^{13,14)}。このことより、ダブルインパルスと加速度フーリエ振幅スペクトルの最大値が等しい1サイクル正弦波（以下、等価1サイクル正弦波）は、次式で表される。

$$\ddot{u}_g^{SW}(t) = 0.5\omega_p V_p \sin(\omega_p t) \quad (0 \leq t \leq T_p = 2t_0) \quad (3)$$

ここで、 $V_p/V = 1.2222$ である^{13,14)}。 T_p と $\omega_p = 2\pi/T_p$ は、それぞれ等価1サイクル正弦波の周期と円振動数を表す。インパルス時間間隔 t_0 と周期 T_p の関係は $T_p = 2t_0$ である。式(3)の等価1サイクル正弦波は、極限的ダブルインパルスに対する弾塑性応答の閉形表現の検証に用いる。

3. 非線形粘性減衰を有する完全弾塑性1自由度系モデル

3.1 モデルの設定

本研究では、免震建物をFig.2(a)のような1自由度系に縮約したものを扱う。免震層は鋼材ダンパーと天然ゴム系積層ゴム支承を考え、リリーフ機構付オイルダンパーを組み合わせさせたものを想定する。これを非線形粘性減衰付完全弾塑性1自由度系としてモデル化する。

復元力特性については、Fig.2(b)のように初期剛性を k 、降伏変位を d_y とし、降伏変位超過後の復元力は降伏荷重 $f_{Ry} = kd_y$ で一定とする。他方、減衰力特性については、Fig.2(c)のように、初期剛性を用いて計算した減衰定数が h となるように初期減衰係数 $c = 2h\sqrt{mk}$ を決定する。また、リリーフ速度を V_{DR} で表し、リリーフ速度超過後の減衰力はリリーフ荷重 $f_{DR} = cV_{DR}$ で一定とする。

1自由度系の質量を m とする。このとき、1自由度系の初期剛性時の非減衰固有円振動数を $\omega = \sqrt{k/m}$ 、非減衰固有周期を $T = 2\pi/\omega$ で表す。さらに、降伏速度 $V_y = \omega d_y$ を定義する。これは非減衰系の第1インパルス後の最大変位が丁度降伏変位に達するときの入力速

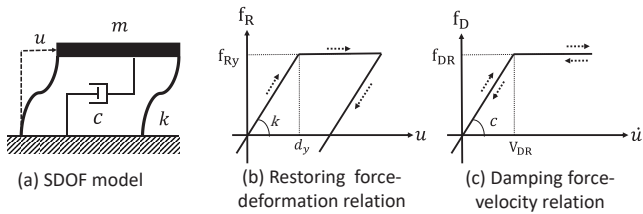


Fig.2 Elastic-plastic SDOF model with nonlinear viscous damper

度レベルであり、建物の強度を表す指標である。以降は入力速度 V を降伏速度 V_y で除した値 $\bar{V} = V/V_y$ を入力速度レベル、リリース速度 V_{DR} を降伏速度 V_y で除した値 $\bar{V}_{DR} = V_{DR}/V_y$ をリリース速度比と呼ぶ。変位の次元の値については d_y 、速度の次元の値については V_y で無次元化を行い、無次元化後の値には上付きのバーを付ける。

3.2 第2インパルスの極限的タイミング

3.1節で示したモデルについて、入力速度レベル V/V_y およびインパルス時間間隔 t_0 の異なる種々のダブルインパルスを入力とした時刻歴解析を行ったときの、第2インパルス後の最大応答が極大となるタイミング t_0^c (クリティカルタイミング) の入力速度レベル V/V_y に対する推移を Fig.3 に示す。このとき、 t_0^c は、1 サイクル正弦波における共振周期の 1/2 に対応する。ここではリリース速度比 $V_{DR}/V_y = 0.5, 1.5$ 、減衰定数 $h = 0.15, 0.30$ としている。

Fig.3 より、リリース機構付オイルダンパーを付加した弾塑性 1 自由度系においては、第2インパルスのクリティカルタイミングが、入力レベルの増大に伴い、復元力 0 のタイミングから速度最大のタイミングに移行することが分かる。これにはリリース機構により減衰力がリリース荷重で頭打ちとなることが関係していると考えられる。そこで、以降は、復元力 0 または速度最大のタイミングで第2インパルスが作用するような入力を「極限的ダブルインパルス」と呼ぶとともに、復元力 0 において第2インパルスが作用する場合の閉形解と、速度最大において第2インパルスが作用する時の閉形解の2つを導出する。導出した2つの閉形解のうち大きい方を極限的ダブルインパルスに対する最大応答の閉形解として採用する。各閉形解の導出については4節で述べる。

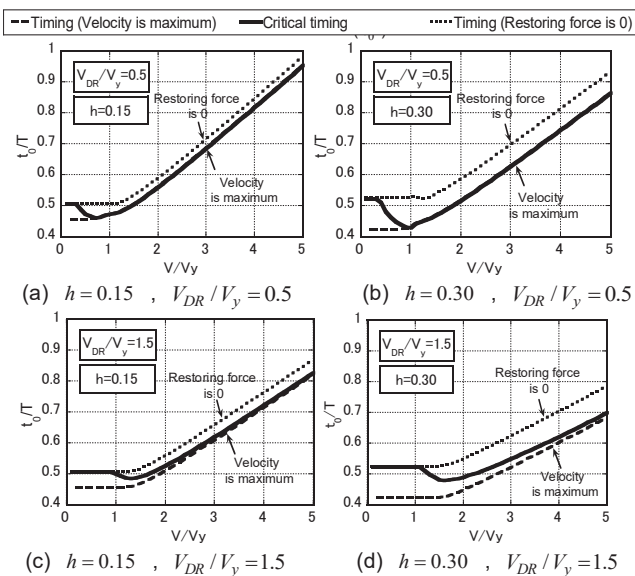


Fig.3 Critical timing of elastic-plastic SDOF model with nonlinear viscous damping under double impulse

4. 極限的ダブルインパルスに対する非線形粘性減衰を有する完全弾塑性 1 自由度系の最大応答

4.1 エネルギー平衡則と減衰力 - 変位関係の近似

小島らは、線形粘性減衰を有する完全弾塑性 1 自由度系について、極限的ダブルインパルスに対する最大変位応答の閉形表現を導出している¹⁴⁾。線形粘性減衰を有する完全弾塑性モデルにおいて、極限的ダブルインパルスに対する弾塑性応答の最大値は、微分方程式を解く代わりに、エネルギーの平衡より求めることが可能である。すなわち、「第1及び第2インパルスが作用した直後の時間における速度から求めた運動エネルギー」=「ひずみエネルギー (弾性ひずみエネルギーと塑性変形による消費エネルギーの和)」+「減衰力がなした仕事」が成立することより、最大変位を閉形表現として陽に求めることができる。ただし、このとき減衰力-変位関係を単純な関数で近似することが必要であり、小島らは減衰力-変位関係を近似する関数として2次関数を採用している。

本研究では、小島らの研究を参考として、減衰力-変位関係の非線形部分を以降で定義するCASEに応じて2次関数あるいは楕円で適宜近似することにより、非線形粘性減衰を有する完全弾塑性 1 自由度系における極限的ダブルインパルスに対する最大変位の閉形表現を導出する。

4.2 降伏とリリースの生起タイミングによる極限応答の場合分け

非線形粘性減衰を有する完全弾塑性 1 自由度系において、復元力特性に着目すると、極限的ダブルインパルスに対する最大変位応答は、入力速度レベル V/V_y によって3つのCASEに分けられる。CASE R1は、第2インパルス後も弾性域にある場合、CASE R2は、第2インパルス後にはじめて塑性化する場合、CASE R3は、第1インパルス後に塑性化する場合である。

一方、減衰力特性に着目すると、極限的ダブルインパルスに対する最大変位応答は、入力速度レベル V/V_y によって大きく3つのCASEに分けられる。CASE D1は第2インパルス後もリリース荷重に到達しない場合、CASE D2は第2インパルス後にはじめてリリース荷重に到達する場合、CASE D3は第1インパルス後にリリース荷重に到達する場合である。以上のCASEについて、極限応答の閉形解を導出する。

4.3 閉形解 (復元力 0 のタイミングで第2インパルスが作用)

本節では、復元力 0 のタイミングで第2インパルスが作用する場合について最大変位の閉形表現を導出する。このとき、減衰力特性におけるCASE D3は、第2インパルス作用前の状態に応じてさらに3つに分けられる。CASE D3aは第2インパルス作用前の最大減衰力がリリース荷重以下の場合、CASE D3bは最大減衰力がリリース荷重に到達しているが復元力 0 における減衰力はリリース荷重以下の場合、CASE D3cは復元力 0 における減衰力がリリース荷重に到達している場合である。従って、想定するCASEは計15となる。

各CASEの復元力-変位関係をFig.4に、減衰力-変位関係をFig.5に示す。また、第1、第2インパルス後の最大変位 u_{max1}, u_{max2} を導出する際の減衰力-変位関係の近似の概念図をFig.6に示す。Fig.6より、復元力 0 のタイミングで第2インパルスが作用する場合、第2インパルス後の最大変位 u_{max2} は、第1インパルス後の最大変位 u_{max1} との類似性を利用して求めることができる。つまり、第2インパルス後の最大変位 \bar{u}_{max2} は、復元力と減衰力の状態を対応する

CASEにおける第1インパルス後の最大変位 \bar{u}_{max1} の導出過程において、 $\bar{V} \rightarrow \bar{V} + \bar{v}_c$ 、 $\bar{u}_{max1} \rightarrow \bar{u}_{max2} + \bar{u}_{p1}$ と置き換えることによって得られる。従って、本節では第1インパルス後の最大変位 u_{max1} 及び復元力0における速度 v_c の導出方法を示す。ただし、 \bar{v}_c は復元力0における速度、 $\bar{u}_{p1}(=\bar{u}_{max1}-1)$ は第1インパルスによる塑性変形量であり、前述の通り、上付きバーは無次元量を表す。

4.3.1 CASE R1, R2 かつ CASE D3a, D3b, D3c の場合

これは、第1インパルスが作用してから最大変位 u_{max1} を迎えるまでの過程で、復元力が線形、減衰力が非線形であり、第1インパルスによる塑性変形量 $\bar{u}_{p1} = 0$ の場合である。4.3.2節で示すように、減衰力が線形の場合(CASE D1, D2)はこれを簡略化したものに相当するため、ここでは先に減衰が非線形の場合について考える。

はじめに、第1インパルス後の最大変位 u_{max1} を導出する。

第1インパルス後に減衰力が初めてリリース荷重を下回る時の変位を u_{DR1} とする。 \bar{u}_{DR1} は、点 $(0, -cV_{DR})$ ・点 $(-u_{DR1}, -cV_{DR})$ 間のエネルギー平衡則により次のように得られる。

$$0.5mV^2 = 0.5mV_{DR}^2 + 0.5ku_{DR1}^2 + cV_{DR}u_{DR1} \quad (4)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{DR1} = \sqrt{(4h^2 - 1)\bar{V}_{DR}^2 + \bar{V}^2} - 2h\bar{V}_{DR} \quad (5)$$

また、減衰力-変位関係における点 $(-u_{DR1}, -cV_{DR})$ ・点 $(-u_{max1}, 0)$ 間を、点 $(-u_{max1}, 0)$ を頂点として点 $(-u_{DR1}, -cV_{DR})$ を通る2次関数で近似する(Fig.6(a))。この近似により、この区間における減衰力 f_D は変位 u の関数として次式で表される。

$$f_D = -cV_{DR} \sqrt{1 + (u + u_{DR1}) / (u_{max1} - u_{DR1})} \quad (6)$$

このとき、第1インパルスが作用してから最大変位に達するまでに減衰力がなす仕事は次式となる。

$$E_{D1} = \int_0^{-u_{DR1}} (-cV_{DR}) du + \int_{-u_{DR1}}^{-u_{max1}} f_D du = cV_{DR}(2u_{max1} + u_{DR1}) / 3 \quad (7)$$

これを用いると、点 $(0, -cV_{DR})$ ・点 $(-u_{max1}, 0)$ 間のエネルギー平衡則より、 \bar{u}_{max1} は次のように得られる。

$$0.5mV^2 = 0.5ku_{max1}^2 + E_{D1} \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{max1} = \sqrt{(16/9)h^2\bar{V}_{DR}^2 - (4/3)h\bar{V}_{DR}\bar{u}_{DR1} + \bar{V}^2} - (4/3)h\bar{V}_{DR} \quad (9)$$

これに、式(5)を代入することで次式が得られる。また、Table 1及びTable 2に閉形解をまとめて表記する都合上、このときの \bar{u}_{max1} を入力速度レベル \bar{V} の関数として $\bar{u}_{max}^{(2)}(\bar{V})$ とおく。

$$\bar{u}_{max}^{(2)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{max1} = \sqrt{\frac{40}{9}h^2\bar{V}_{DR}^2 - \frac{4}{3}h\bar{V}_{DR}\sqrt{(4h^2-1)\bar{V}_{DR}^2 + \bar{V}^2} + \bar{V}^2} - \frac{4}{3}h\bar{V}_{DR} \quad (10)$$

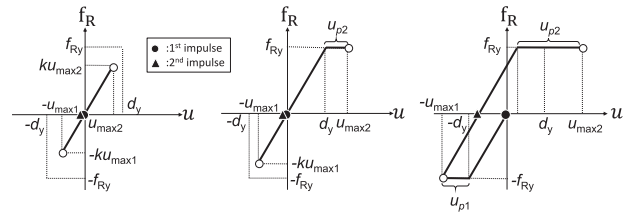
以降も、閉形解を導出した際には同様の置き換えを行うこととする。

次に、復元力0の時点の速度 v_c を導出する。

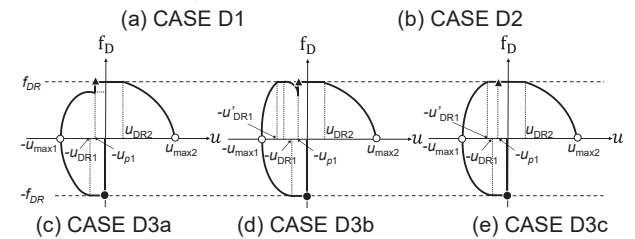
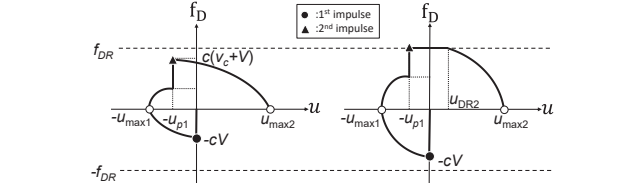
第2インパルス作用前の最大減衰力がリリース荷重に達しない場合(CASE D3a)、復元力0における速度 v_c は微分方程式を解くことにより次のように求めることができる。

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \\ u(0) = -u_{max1}, \dot{u}(0) = 0, u(t_c) = 0, \dot{u}(t_c) = v_c \end{cases} \quad (11)$$

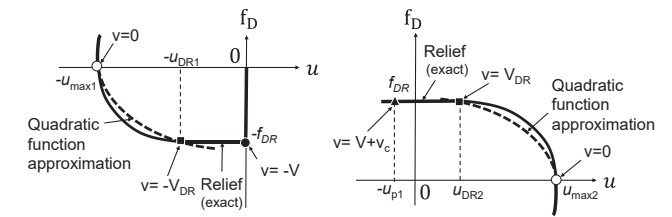
$$\Leftrightarrow \bar{v}_c^{(2)} \equiv \bar{v}_c = \bar{u}_{max1} \exp\left\{-\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right)\left(0.5\pi + \arctan\left(\frac{h}{\sqrt{1-h^2}}\right)\right)\right\} \quad (12)$$



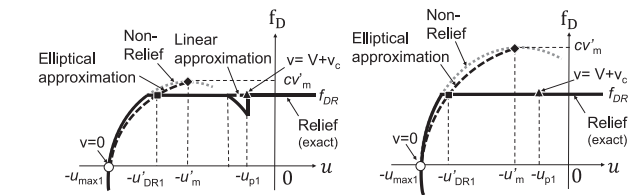
(a) CASE R1 (b) CASE R2 (c) CASE R3
Fig. 4 Restoring force-deformation relation (2nd impulse timing: Restoring force is zero)



(a) CASE D1 (b) CASE D2
(c) CASE D3a (d) CASE D3b (e) CASE D3c
Fig. 5 Damping force-deformation relation (2nd impulse timing: Restoring force is zero)



(a) 3rd quadrant (b) 1st quadrant
Fig. 6 Quadratic function approximation of damping force-deformation relation



(a) CASE D3b (b) CASE D3c
Fig. 7 Elliptical approximation of damping force-deformation relation

一方、第2インパルス作用前の最大減衰力が既にリリース荷重に達している場合(CASE D3b, D3c)、減衰力-変位関係の非線形部分を単純な関数で近似する必要がある。ここでは、点 $(-u_{max1}, 0)$ とリリース機構がないと仮定した場合に減衰力が最大となる点 $(-u'_m, cv'_m)$ の2点を頂点とする楕円で近似することにより、復元力0における速度 v_c の閉形表現を導出する(Fig.7)。

リリース機構がないと仮定した場合の減衰力-変位関係において、第2インパルスが作用する前に減衰力が最大となる点 $(-u'_m, cv'_m)$ は、微分方程式を解くことにより次のように得られる。

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \\ u(0) = -u_{max1}, \dot{u}(0) = 0, u(t'_m) = -u'_m, \dot{u}(t'_m) = v'_m, \ddot{u}(t'_m) = 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}'_m = 2h\bar{v}'_m, \bar{v}'_m = a_m \bar{u}'_{max1} \quad (14)$$

$$a_m = \exp\left\{-h/\sqrt{1-h^2}\left(0.5\pi - \arctan(h/\sqrt{1-h^2})\right)\right\} \quad (15)$$

これを用いると、点 $(-u_{\max 1}, 0)$ と点 $(-u'_m, cv'_m)$ を頂点とする楕円の方程式は、 $f_D \geq 0$ の範囲では次式で与えられる。

$$f_D = cv'_m \sqrt{1 - \left\{ (u + u'_m) / (u_{\max 1} - u'_m) \right\}^2} \quad (16)$$

さらに、この楕円と直線 $f_D = cV_{DR}$ の交点の座標を $(-u'_{DR1}, cV_{DR})$ とすると、 \bar{u}'_{DR1} は次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{u}'_{DR1} &= \bar{u}'_m + (\bar{u}_{\max 1} - \bar{u}'_m) \sqrt{1 - \bar{V}_{DR}^2 / \bar{v}_m^2} \\ &= 2ha_m \bar{u}_{\max 1} + (1 - 2ha_m) \sqrt{\bar{u}_{\max 1} - \bar{V}_{DR} / a_m^2} \end{aligned} \quad (17)$$

点 $(-u'_{DR1}, cV_{DR})$ から復元力0の点の間のエネルギー平衡則より、 \bar{v}_c の閉形表現を求めることができる。ここで、CASE D3bでは復元力0に達する前に減衰力がリリーフ荷重を下回る現象が生じるが、ここではそのような減衰力低下を無視し、点 $(-u'_{DR1}, cV_{DR})$ から復元力0の点の間の減衰力はリリーフ荷重で一定であると近似する。このような近似を行うと、CASE D3b, D3cに対して \bar{v}_c は次式のように得られる。

$$0.5mV_{DR}^2 + 0.5ku_{DR1}^2 = 0.5mv_c^2 + cV_{DR}u'_{DR1} \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow \bar{v}_c = \sqrt{\bar{V}_{DR}^2 + \bar{u}_{DR1}^2 - 4h\bar{V}_{DR}\bar{u}'_{DR1}} \quad (19)$$

これに式(17)を代入することにより、 \bar{v}_c は次式となる。

$$\begin{aligned} \bar{v}_c^{(3)} \equiv \bar{v}_c &= \left\{ \bar{V}_{DR}^2 + (2ha_m \bar{u}_{\max 1})^2 + (1 - 2ha_m)^2 \left(\bar{u}_{\max 1} - \bar{V}_{DR} / a_m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - 8h^2 a_m \bar{V}_{DR} \bar{u}_{\max 1} + 4h(1 - 2ha_m) \left(a_m \bar{u}_{\max 1} - \bar{V}_{DR} \right) \sqrt{\bar{u}_{\max 1} - \bar{V}_{DR} / a_m^2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (20)$$

4.3.2 CASE R1, R2 かつ CASE D1, D2 の場合

これは、第1インパルスが作用してから最大変位 $u_{\max 1}$ を迎えるまでの過程で、復元力と減衰力がともに線形の場合であり、4.3.1節を簡略化したものに相当する。

CASE D3a, D3b, D3cにおける第1インパルス作用直後の減衰力が $f_D = cV_{DR}$ であるのに対し、CASE D1, D2における第1インパルス作用直後の減衰力は $f_D = cV$ と表される。従って、第1インパルス後の最大変位 $\bar{u}_{\max 1}$ は式(10)において $\bar{V}_{DR} \rightarrow \bar{V}$ とすることで次のように得られる。

$$\bar{u}_{\max 1}^{(1)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{\max 1} = \bar{V} \left\{ \sqrt{(16/9)h^2 + 1} - (4/3)h \right\} \quad (21)$$

また、 \bar{v}_c については近似を用いることなく微分方程式を解くことで次のように得られる。

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \\ u(0) = 0, \dot{u}(0) = -V, u(t_c) = 0, \dot{u}(t_c) = v_c \end{cases} \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow \bar{v}_c^{(1)} \equiv \bar{v}_c = \bar{V} \exp(-\pi h / \sqrt{1-h^2}) \quad (23)$$

4.3.3 CASE R3 かつ CASE D3a, D3b, D3c の場合

これは、第1インパルスが作用してから最大変位 $u_{\max 1}$ を迎えるまでの過程で、復元力と減衰力がともに非線形であり、第1インパルスによる塑性変形量 $\bar{u}_{p1} > 0$ の場合である。4.3.4節で示すように、減衰力が線形の場合(CASE D1, D2)はこれを簡略化したものに相当するため、ここでは先に減衰が非線形の場合について考える。

第1インパルス後に減衰力が初めてリリーフ荷重を下回る時の変位 u_{DR1} は、4.3.1節と同様にエネルギー平衡式を解くことによって導出することができる。ただし、このとき降伏変位 d_y との大小関係による場合分けが必要である。降伏するよりも先に減衰力がリリーフ荷重を下回る場合($u_{DR1} < d_y$)、 \bar{u}_{DR1} は式(5)で表される。一方、減衰力がリリーフ荷重を下回るよりも先に降伏が起きる場合($d_y < u_{DR1}$)、 \bar{u}_{DR1} はエネルギー平衡則により次のように得られる。

$$0.5mV^2 = 0.5mV_{DR}^2 + 0.5kd_y^2 + kd_y(u_{DR1} - d_y) + cV_{DR}u_{DR1} \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{DR1} = 0.5(\bar{V}^2 - \bar{V}_{DR}^2 + 1) / (1 + 2h\bar{V}_{DR}) \quad (25)$$

式(5)と式(25)の境界は $u_{DR1} = d_y$ とすることにより次式で表される。

$$\bar{V}_{b1} \equiv \bar{V} = \sqrt{1 + 4h\bar{V}_{DR} + \bar{V}_{DR}^2} \quad (26)$$

第1インパルスが作用してから最大変位に達するまでに減衰力がなす仕事は式(7)と同じである。従って、点 $(0, -cV_{DR})$ ・点 $(-u_{\max 1}, 0)$ 間のエネルギー平衡式より、 $\bar{u}_{\max 1}$ は次のように得られる。

$$0.5mV^2 = 0.5kd_y^2 + kd_y(u_{\max 1} - d_y) + E_{D1} \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{\max 1} = (3\bar{V}^2 - 4h\bar{V}_{DR}\bar{u}_{DR1} + 3) / (6 + 8h\bar{V}_{DR}) \quad (28)$$

これに、式(5)あるいは式(25)を代入することで次式が得られる。

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\max 1}^{(4)}(\bar{V}) &\equiv \bar{u}_{\max 1} \\ &= \begin{cases} \frac{3\bar{V}^2 + 3 + 8h^2\bar{V}_{DR}^2}{2(3 + 4h\bar{V}_{DR})} - \frac{2h\bar{V}_{DR}}{3 + 4h\bar{V}_{DR}} \sqrt{(4h^2 - 1)\bar{V}_{DR}^2 + \bar{V}^2} \dots (\bar{V} < \bar{V}_{b1}) \\ \frac{\bar{V}^2 + 1}{2(1 + 2h\bar{V}_{DR})} + \frac{h\bar{V}_{DR}^3}{(1 + 2h\bar{V}_{DR})(3 + 4h\bar{V}_{DR})} \dots (\bar{V}_{b1} < \bar{V}) \end{cases} \end{aligned} \quad (29)$$

また、 \bar{v}_c については、式(12)及び式(20)において $\bar{u}_{\max 1} = 1$ とすることにより得られる。なぜならば、CASE R1, R2では点 $(-u_{\max 1}, 0)$ から復元力0の点までの距離が $u_{\max 1}$ であるのに対し、CASE R3ではその距離が d_y となるからである。従って、 \bar{v}_c は次のように得られる。

(CASE D3a の場合)

$$\bar{v}_c^{(4)} \equiv \bar{v}_c = \exp\left\{-\left(h/\sqrt{1-h^2}\right)\left(0.5\pi + \arctan(h/\sqrt{1-h^2})\right)\right\} \quad (30)$$

(CASE D3b, D3c の場合)

$$\begin{aligned} \bar{v}_c^{(5)} \equiv \bar{v}_c &= \left\{ \bar{V}_{DR}^2 + (2ha_m)^2 + (1 - 2ha_m)^2 \left(1 - \bar{V}_{DR}^2 / a_m^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - 8h^2 a_m \bar{V}_{DR} + 4h(1 - 2ha_m) \left(a_m - \bar{V}_{DR} \right) \sqrt{1 - \bar{V}_{DR}^2 / a_m^2} \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (31)$$

4.3.4 CASE R3 かつ CASE D1, D2 の場合

これは、第1インパルスが作用してから最大変位 $u_{\max 1}$ を迎えるまでの過程で、復元力が非線形、減衰力が線形の場合であり、4.3.3節を簡略化したものに相当する。

このとき、第1インパルス後の最大変位 $u_{\max 1}$ は、4.3.2節と同様に、式(29)の第1式において $\bar{V}_{DR} \rightarrow \bar{V}$ とすることで得られる。

$$\bar{u}_{\max 1}^{(3)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{\max 1} = 1.5(1 + \bar{V}^2) / (3 + 4h\bar{V}) \quad (32)$$

また、点 $(-u_{\max 1}, 0)$ から復元力0の点までの距離は d_y で表されるため、 \bar{v}_c は式(30)と同じ形となる。

Table 1 All Cases (2nd impulse timing: Restoring force is zero)

		Damping force-deformation relation				
		CASE D1	CASE D2	CASE D3a	CASE D3b	CASE D3c
Restoring force-deformation relation	Case R1	$\bar{u}_{\max 1}$	$\bar{u}_{\max}^{-(1)}(\bar{V})$		$\bar{u}_{\max}^{-(2)}(\bar{V})$	
		\bar{v}_c	$V_c^{-(1)}$	$V_c^{-(2)}$	$V_c^{-(3)}$	$V_c^{-(3)}$
		$\bar{u}_{\max 2}$	$\bar{u}_{\max}^{-(1)}(\bar{V} + \bar{v}_c)$		$\bar{u}_{\max}^{-(2)}(\bar{V} + \bar{v}_c)$	
	Case R2	$\bar{u}_{\max 1}$	$\bar{u}_{\max}^{-(1)}(\bar{V})$		$\bar{u}_{\max}^{-(2)}(\bar{V})$	
		\bar{v}_c	$V_c^{-(1)}$	$V_c^{-(2)}$	$V_c^{-(3)}$	$V_c^{-(3)}$
		$\bar{u}_{\max 2}$	$\bar{u}_{\max}^{-(3)}(\bar{V} + \bar{v}_c)$		$\bar{u}_{\max}^{-(4)}(\bar{V} + \bar{v}_c)$	
	Case R3	$\bar{u}_{\max 1}$	$\bar{u}_{\max}^{-(3)}(\bar{V})$		$\bar{u}_{\max}^{-(4)}(\bar{V})$	
		\bar{v}_c	$V_c^{-(4)}$	$V_c^{-(5)}$	$V_c^{-(5)}$	$V_c^{-(5)}$
		$\bar{u}_{\max 2}$	$\bar{u}_{\max}^{-(3)}(\bar{V} + \bar{v}_c) - \bar{u}_{p1}$		$\bar{u}_{\max}^{-(4)}(\bar{V} + \bar{v}_c) - \bar{u}_{p1}$	

4.3.5 CASE 間の境界

Table 1に各 CASE に対して $\bar{u}_{\max 1}, \bar{v}_c, \bar{u}_{\max 2}$ をまとめて示す。復元力特性について、CASE R1 と CASE R2 の境界は $\bar{u}_{\max 2} = 1$ 、CASE R2 と CASE R3 の境界は $\bar{u}_{\max 1} = 1$ である。一方、減衰力特性については、CASE D1 と CASE D2 の境界は $\bar{v} + \bar{v}_c = \bar{v}_{DR}$ 、CASE D2 と CASE D3a の境界は $\bar{v} = \bar{v}_{DR}$ 、CASE D3a と CASE D3b の境界は $\bar{v}_m = \bar{v}_{DR}$ である。また、前述の減衰力-変位関係の直線近似により、CASE D3b は CASE D3c と同等の CASE として扱われる。

4.4 閉形解 (速度最大のタイミングで第 2 インパルスが作用)

次に、速度最大のタイミングで第 2 インパルスが作用する場合について最大変位の閉形表現を導出する。このとき、CASE D3 は、第 2 インパルス作用前の状態に応じてさらに 2 つに分けられる。CASE D3a は第 2 インパルス作用前の最大減衰力がリリース荷重以下の場合、CASE D3c は第 2 インパルス作用前の最大減衰力が既にリリース荷重に到達している場合である。速度最大のタイミングで第 2 インパルスが作用する場合、4.3 節で示した CASE D3b は生じない。従って、想定する CASE は計 12 となる。

各 CASE の復元力-変位関係を Fig.8 に、減衰力-変位関係を Fig.9 に示す。第 1 インパルス後の最大変位 $u_{\max 1}$ は 4.3 節にて導出済みである。しかし、速度最大のタイミングで第 2 インパルスが作用する場合、4.3 節のように第 1 インパルス後の最大変位 $u_{\max 1}$ との類似性を利用して第 2 インパルス後の最大変位 $u_{\max 2}$ を求めることはできない。従って、本節では第 2 インパルス作用前の最大速度 v_m 、及び第 2 インパルス後の最大変位 $u_{\max 2}$ の導出方法を示す。

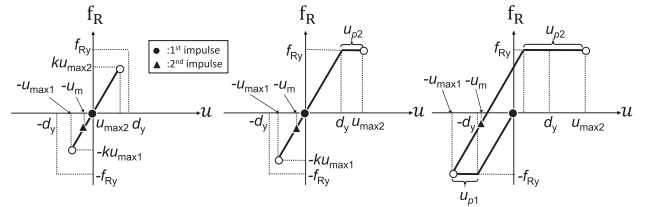
4.4.1 CASE R1 かつ CASE D2, D3a, D3c の場合

これは、第 2 インパルスが作用してから最大変位 $u_{\max 2}$ を迎えるまでの過程で、復元力が線形、減衰力が非線形であり、第 1 インパルスによる塑性変形量 $\bar{u}_{p1} = 0$ の場合である。減衰力が線形の場合 (CASE D1) はこれを簡略化したものに相当するため、ここでは先に減衰が非線形の場合について考える。

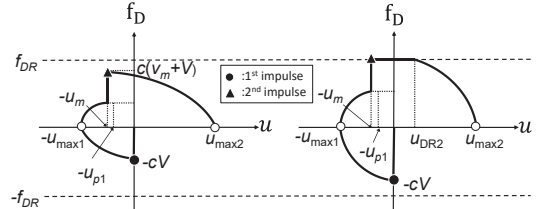
はじめに、第 2 インパルス作用前の最大速度 v_m を導出する。

第 1 インパルス後の減衰力がリリース荷重以下の場合 (CASE D2)、 v_m は近似を用いることなく微分方程式を解くことで次のように得られる。

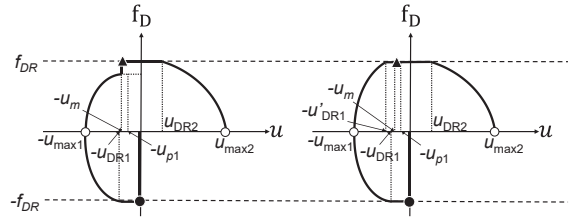
$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \\ u(0) = 0, \dot{u}(0) = -\bar{V}, u(t_m) = -u_m, \dot{u}(t_m) = v_m, \ddot{u}(t_m) = 0 \end{cases} \quad (33)$$



(a) CASE R1 (b) CASE R2 (c) CASE R3
Fig.8 Restoring force-deformation relation (2nd impulse timing: Velocity is maximum)



(a) CASE D1 (b) CASE D2



(c) CASE D3a (d) CASE D3c

Fig.9 Damping force-deformation relation (2nd impulse timing: Velocity is maximum)

$$\Leftrightarrow \bar{u}_m = 2h\bar{v}_m, \bar{v}_m^{(1)} \equiv \bar{v}_m = a_m^2 \bar{V} \quad (34)$$

また、第 2 インパルス作用前の最大減衰力がリリース荷重以下の場合 (CASE D3a)、第 2 インパルス作用前の最大速度 v_m は、第 1 インパルス後の最大変位 $u_{\max 1}$ を用いると、微分方程式を解くことにより次のように得られる。

$$\begin{cases} m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \\ u(0) = -u_{\max 1}, \dot{u}(0) = 0, u(t_m) = -u_m, \dot{u}(t_m) = v_m, \ddot{u}(t_m) = 0 \end{cases} \quad (35)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_m = 2h\bar{v}_m, \bar{v}_m^{(2)} \equiv \bar{v}_m = a_m \bar{u}_{\max 1} \quad (36)$$

一方、第 2 インパルス作用前の最大減衰力が既にリリース荷重に達している場合 (CASE D3c)、第 2 インパルス作用前の最大速度 v_m は、減衰力-変位関係の非線形部分を 4.3 節と同様に楕円で近似することにより近似的に得られる。楕円と直線 $f_D = cV_{DR}$ の交点の u 座標 u'_{DR1} は式(17)で表される。この u'_{DR1} を用いると、 v_m は微分方程式を解くことにより次のように求めることができる。

$$\begin{cases} m\ddot{u} + cV_{DR} + ku = 0 \\ u(0) = -u'_{DR1}, \dot{u}(0) = V_{DR}, u(t_m) = -u_m, \dot{u}(t_m) = v_m, \ddot{u}(t_m) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_m = 2h\bar{V}_{DR}, \bar{v}_m = \sqrt{(\bar{u}'_{DR1} - 2h\bar{V}_{DR})^2 + \bar{V}_{DR}^2} \quad (38)$$

これに式(17)を代入すると次式が得られる。

$$\bar{v}_m^{(3)} \equiv \bar{v}_m = \sqrt{2h(a_m \bar{u}_{\max 1} - \bar{V}_{DR}) + (1 - 2ha_m)\sqrt{u_{\max 1}^2 - \bar{V}_{DR}^2 / a_m^2}} + \bar{V}_{DR} \quad (39)$$

次に、第 2 インパルス後の最大変位 $u_{\max 2}$ を導出する。

CASE D2, D3a, D3c のいずれについても、第 2 インパルス後に減

衰力が初めてリリーフ荷重を下回る時の変位 u_{DR2} は、点 $(-u_m, cV_{DR})$ ・点 (u_{DR2}, cV_{DR}) 間のエネルギー平衡則により、次のように得られる。

$$0.5m(V+v_m)^2 + 0.5ku_m^2 = 0.5mV_{DR}^2 + 0.5ku_{DR2}^2 + cV_{DR}(u_{DR2} + u_m) \quad (40)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{DR2} = \sqrt{(4h^2 - 1)\bar{V}_{DR}^2 + (\bar{V} + \bar{v}_m)^2} + \bar{u}_m(\bar{u}_m - 4h\bar{V}_{DR}) - 2h\bar{V}_{DR} \quad (41)$$

また、4.3 節と同様に、減衰力・変位関係の非線形部分を、点 $(u_{max2}, 0)$ を頂点として点 (u_{DR2}, cV_{DR}) を通る 2 次関数で近似すると、第 2 インパルスが作用してから最大変位に達するまでに減衰力がなす仕事 E_{D2} は次式となる。

$$E_{D2} = cV_{DR}(2u_{max2} + 3u_m + u_{DR2})/3 \quad (42)$$

これを用いると、点 $(-u_m, cV_{DR})$ ・点 $(u_{max2}, 0)$ 間のエネルギー平衡則より、 \bar{u}_{max2} は次のように得られる。

$$0.5m(V+v_m)^2 + 0.5ku_m^2 = 0.5ku_{max2}^2 + E_{D2} \quad (43)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{max2} = \left\{ (16/9)h^2\bar{V}_{DR}^2 - (4/3)h\bar{V}_{DR}\bar{u}_{DR2} + (\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + \bar{u}_m(\bar{u}_m - 4h\bar{V}_{DR}) \right\}^{1/2} - (4/3)h\bar{V}_{DR} \quad (44)$$

これに、 \bar{u}_{DR2} として式(41)、 \bar{u}_m として CASE D2, D3a の場合は $\bar{u}_m = 2h\bar{v}_m$ 、CASE D3c の場合は $\bar{u}_m = 2h\bar{V}_{DR}$ を代入することで次式が得られる。

(CASE D2, D3a の場合)

$$\bar{u}_{max2}^{(6)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{max2} = \left\{ -(4/3)h\bar{V}_{DR}\sqrt{(4h^2 - 1)\bar{V}_{DR}^2 + (\bar{V} + \bar{v}_m)^2} + 4h^2\bar{v}_m(\bar{v}_m - 2\bar{V}_{DR}) + (40/9)h^2\bar{V}_{DR}^2 + (\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 4h^2\bar{v}_m(\bar{v}_m - 2\bar{V}_{DR}) \right\}^{1/2} - (4/3)h\bar{V}_{DR} \quad (45)$$

(CASE D3c の場合)

$$\bar{u}_{max2}^{(7)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{max2} = \sqrt{\frac{4}{9}h^2\bar{V}_{DR}^2 - \frac{4}{3}h\bar{V}_{DR}\sqrt{(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 - \bar{V}_{DR}^2} + (\bar{V} + \bar{v}_m)^2} - \frac{4}{3}h\bar{V}_{DR} \quad (46)$$

4.4.2 CASE R1 かつ CASE D1 の場合

これは、第 2 インパルスが作用してから最大変位 u_{max2} を迎えるまでの過程で、復元力と減衰力がともに線形の場合であり、4.4.1 節を簡略化したものに相当する。

このとき、第 2 インパルス作用前の最大速度 v_m は式(34)で表される。また、第 2 インパルス後の最大変位 u_{max2} は、4.3.2 節と同様の考え方により、式(45)において $\bar{V}_{DR} \rightarrow \bar{V} + \bar{v}_m$ とすることで得られる。

$$\bar{u}_{max2}^{(5)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{max2} = \sqrt{(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 \left(\frac{16}{9}h^2 + 1 \right) - \frac{4}{3}h^2\bar{v}_m(4\bar{V} + \bar{v}_m) - \frac{4}{3}h(\bar{V} + \bar{v}_m)} \quad (47)$$

4.4.3 CASE R2 かつ CASE D2, D3a, D3c の場合

これは、第 2 インパルスが作用してから最大変位 u_{max2} を迎えるまでの過程で、復元力、減衰力がともに非線形であり、第 1 インパルスによる塑性変形量 $\bar{u}_{p1} = 0$ の場合である。減衰力が線形の場合 (CASE D1) はこれを簡略化したものに相当するため、ここでは先に減衰が非線形の場合について考える。このとき、第 2 インパルス作用前の最大速度 v_m は、CASE D2 の場合は式(34)、CASE D3a の場合は式(36)、CASE D3c の場合は式(39)で表される。

また、第 2 インパルス後の最大変位 u_{max2} は以下のようにして求められる。まず、第 2 インパルス後に減衰力が初めてリリーフ荷重を下回る時の変位 u_{DR2} は、4.4.1 節と同様にエネルギー平衡式を解くことによって導出することができる。ただし、このとき降伏変位 d_y

との大小関係による場合分けが必要であることを注意する。降伏するよりも先に減衰力がリリーフ荷重を下回る場合 ($u_{DR2} < d_y$)、 \bar{u}_{DR2} は式(41)で表される。一方、減衰力がリリーフ荷重を下回るよりも先に降伏が起きる場合 ($d_y < u_{DR2}$)、 \bar{u}_{DR2} はエネルギー平衡則により次のように得られる。

$$0.5m(V+v_m)^2 + 0.5ku_m^2 = 0.5mV_{DR}^2 + 0.5kd_y^2 + kd_y(u_{DR2} - d_y) + cV_{DR}(u_{DR2} + u_m) \quad (48)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{DR2} = 0.5 \left\{ (\bar{V} + \bar{v}_m)^2 - \bar{V}_{DR}^2 + 1 + \bar{u}_m(\bar{u}_m - 4h\bar{V}_{DR}) \right\} / (1 + 2h\bar{V}_{DR}) \quad (49)$$

式(41)と式(49)の境界は $u_{DR2} = d_y$ とすることにより次式で表される。

$$\bar{V} + \bar{v}_m = \sqrt{1 + 4h\bar{V}_{DR} + \bar{V}_{DR}^2 - \bar{u}_m(\bar{u}_m - 4h\bar{V}_{DR})} \quad (50)$$

また、第 2 インパルスが作用してから最大変位に達するまでに減衰力がなす仕事は式(42)で表される。従って、点 $(-u_m, cV_{DR})$ ・点 $(u_{max2}, 0)$ 間のエネルギー平衡式より、 \bar{u}_{max2} は次式となる。

$$0.5m(V+v_m)^2 + 0.5ku_m^2 = 0.5kd_y^2 + kd_y(u_{max2} - d_y) + E_{D2} \quad (51)$$

$$\Leftrightarrow \bar{u}_{max2} = \frac{3(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 3 - 4h\bar{V}_{DR}\bar{u}_{DR2} + 3\bar{u}_m(\bar{u}_m - 4h\bar{V}_{DR})}{6 + 8h\bar{V}_{DR}} \quad (52)$$

式(50)、式(52)に、 \bar{u}_{DR2} として式(41)または式(49)、 \bar{u}_m として CASE D2, D3a の場合は $\bar{u}_m = 2h\bar{v}_m$ 、CASE D3c の場合は $\bar{u}_m = 2h\bar{V}_{DR}$ を代入することで次式が得られる。

(CASE D2, D3a の場合)

$$\bar{u}_{max2}^{(9)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{max2} = \begin{cases} \frac{3(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 3 + 12h^2\bar{v}_m(\bar{v}_m - 2\bar{V}_{DR}) + 8h^2\bar{V}_{DR}^2}{2(3 + 4h\bar{V}_{DR})} - \frac{2h\bar{V}_{DR}}{3 + 4h\bar{V}_{DR}} \sqrt{(4h^2 - 1)\bar{V}_{DR}^2 + (\bar{V} + \bar{v}_m)^2} + 4h^2\bar{v}_m(\bar{v}_m - 2\bar{V}_{DR})}{\dots(\bar{V} + \bar{v}_m < \bar{V}_{b2})} \\ \frac{(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 1 + 4h^2\bar{v}_m(\bar{v}_m - 2\bar{V}_{DR})}{2(1 + 2h\bar{V}_{DR})} + \frac{h\bar{V}_{DR}^3}{(1 + 2h\bar{V}_{DR})(3 + 4h\bar{V}_{DR})} \\ \dots(\bar{V}_{b2} < \bar{V} + \bar{v}_m) \end{cases} \quad (53)$$

$$V_{b2} = \sqrt{1 + 4h\bar{V}_{DR} + \bar{V}_{DR}^2 - 4h^2\bar{v}_m(\bar{v}_m - 2\bar{V}_{DR})} \quad (54)$$

(CASE D3c の場合)

$$\bar{u}_{max2}^{(10)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{max2} = \begin{cases} \frac{3(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 3 - 4h^2\bar{V}_{DR}^2}{2(3 + 4h\bar{V}_{DR})} - \frac{2h\bar{V}_{DR}}{3 + 4h\bar{V}_{DR}} \sqrt{(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 - \bar{V}_{DR}^2} \\ \dots(\bar{V} + \bar{v}_m < \bar{V}_{b3}) \\ \frac{(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 1}{2(1 + 2h\bar{V}_{DR})} - \frac{6h^2\bar{V}_{DR}^2}{3 + 4h\bar{V}_{DR}} + \frac{(4h^2 + 1)h\bar{V}_{DR}^3}{(1 + 2h\bar{V}_{DR})(3 + 4h\bar{V}_{DR})} \\ \dots(\bar{V}_{b3} < \bar{V} + \bar{v}_m) \end{cases} \quad (55)$$

$$V_{b3} = \sqrt{1 + 4h\bar{V}_{DR} + (4h^2 + 1)\bar{V}_{DR}^2} \quad (56)$$

4.4.4 CASE R2 かつ CASE D1 の場合

これは、第 2 インパルスが作用してから最大変位 u_{max2} を迎えるまでの過程で、復元力が非線形、減衰力が線形の場合であり、4.4.3 節を簡略化したものに相当する。

このとき、第2インパルス作用前の最大速度 \bar{v}_m は式(34)で表される。また、第2インパルス後の最大変位 $\bar{u}_{\max 2}$ は、4.3.2節と同様の考え方により、式(53)の第1式において $\bar{V}_{DR} \rightarrow \bar{V} + \bar{v}_m$ とすることで次のように得られる。

$$\bar{u}_{\max}^{(8)}(\bar{V}) \equiv \bar{u}_{\max 2} = \frac{3(\bar{V} + \bar{v}_m)^2 + 3 - 4h^2 \bar{v}_m (4\bar{V} + \bar{v}_m)}{2\{3 + 4h(\bar{V} + \bar{v}_m)\}} \quad (57)$$

4.4.5 CASE R3 の場合

これは、第2インパルスが作用してから最大変位 $u_{\max 2}$ を迎えるまでの過程で復元力が非線形であり、 $\bar{u}_{p1} > 0$ の場合である。

このとき、第2インパルス作用前の最大速度 \bar{v}_m は、4.3.3節と同様の考え方により、式(36)、式(39)において $\bar{u}_{\max 1} = 1$ とすることにより、次のように得られる。

(CASE D1, D2, D3a の場合)

$$\bar{v}_m^{(4)} \equiv \bar{v}_m = a_m \quad (58)$$

(CASE D3c の場合)

$$\bar{v}_m^{(5)} \equiv \bar{v}_m = \sqrt{\left\{2h(a_m - \bar{V}_{DR}) + (1 - 2ha_m)\sqrt{1 - \bar{V}_{DR}^2/a_m^2}\right\}^2 + \bar{V}_{DR}^2} \quad (59)$$

また、第2インパルス後の最大変位 $u_{\max 2}$ については、CASE D2, D3a の場合は式(53)、CASE D3c の場合は式(55)、CASE D1 の場合は式(57)に対して、第1インパルスによる塑性変形量 \bar{u}_{p1} を考慮し、 $\bar{u}_{\max 2} \rightarrow \bar{u}_{\max 2} + \bar{u}_{p1}$ とすることで得られる。

4.4.6 CASE 間の境界

Table 2 に各 CASE に対する $\bar{u}_{\max 1}, \bar{v}_m, \bar{u}_{\max 2}$ をまとめて示す。復元力特性について、CASE R1 と CASE R2 の境界は $\bar{u}_{\max 2} = 1$ 、CASE R2 と CASE R3 の境界は $\bar{u}_{\max 1} = 1$ である。一方、減衰力特性については、CASE D1 と CASE D2 の境界は $\bar{V} + \bar{v}_m = \bar{V}_{DR}$ 、CASE D2 と CASE D3a の境界は $\bar{V} = \bar{V}_{DR}$ 、CASE D3a と CASE D3c の境界は $\bar{v}_m = \bar{V}_{DR}$ である

5. ダブルインパルス入力を用いた時刻歴応答解析との比較による精度検証

入力速度レベル V/V_y に対する、ダブルインパルス入力による最大変位の近似解 (Approximation) と、減衰力-変位関係の近似を用いない時刻歴応答解析による解析結果 (Time History Response

Table 2 All Cases (2nd impulse timing: Velocity is maximum)

		Damping force – deformation relation			
		Case D1	Case D2	Case D3a	Case D3c
Restoring force – deformation relation	Case R1	$\bar{u}_{\max 1}$	$\bar{u}_{\max}^{(1)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(2)}(\bar{V})$	
		\bar{v}_m	$\bar{v}_m^{(1)}$	$\bar{v}_m^{(2)}$	$\bar{v}_m^{(3)}$
		$\bar{u}_{\max 2}$	$\bar{u}_{\max}^{(5)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(6)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(7)}(\bar{V})$
	Case R2	$\bar{u}_{\max 1}$	$\bar{u}_{\max}^{(1)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(3)}(\bar{V})$	
		\bar{v}_m	$\bar{v}_m^{(1)}$	$\bar{v}_m^{(2)}$	$\bar{v}_m^{(3)}$
		$\bar{u}_{\max 2}$	$\bar{u}_{\max}^{(8)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(9)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(10)}(\bar{V})$
	Case R3	$\bar{u}_{\max 1}$	$\bar{u}_{\max}^{(3)}(\bar{V})$	$\bar{u}_{\max}^{(4)}(\bar{V})$	
		\bar{v}_m	$\bar{v}_m^{(4)}$		$\bar{v}_m^{(5)}$
		$\bar{u}_{\max 2}$	$\bar{u}_{\max}^{(8)}(\bar{V}) - \bar{u}_{p1}$	$\bar{u}_{\max}^{(9)}(\bar{V}) - \bar{u}_{p1}$	$\bar{u}_{\max}^{(10)}(\bar{V}) - \bar{u}_{p1}$

Analysis) について、最大応答値の比較を Fig.10 に、減衰力-変位関係の比較を Fig.11 に示す。ここでは減衰定数 $h=0.15, 0.30$ とする。ただし、近似解については、復元力0のタイミングで第2インパルスが作用する場合の閉形解 (closed-form A) と、速度最大のタイミングで第2インパルスが作用する場合の閉形解 (closed-form B) のうち、大きい方を採用している。また、時刻歴応答解析では Newmark の β 法を用いており、インパルス時間間隔 t_0 をパラメトリックに変動させて最大変位が極大となるときの応答を採用している。また、Non-Relief はリリース速度比 $\bar{V}_{DR} \rightarrow \infty$ とした場合の時刻歴解析結果を表す。Fig.10 には、入力速度レベル V/V_y を 0.1 刻みで漸増させたときに現れる CASE 番号を合わせて示している。

Fig.10 より、 $V_{DR}/V_y = 0.5, 1.0$ の場合には、入力レベル V/V_y を増大させたときに、減衰力のリリース荷重到達が降伏に先行して生じており、 $V_{DR}/V_y = 1.5$ の場合には、逆に降伏開始が減衰力のリリース荷重到達に先行して生じている。このとき、降伏速度 V_y は非減衰1自由度系に対して定義された値であるため、 $V_{DR}/V_y = 1.0$ であっても減衰力のリリース荷重到達と降伏は同時に起こらないことに注意する。また、時刻歴解析結果より、初期減衰定数 h が大きくリリース速度比 V_{DR}/V_y が小さいほど、リリース機構の影響が強く現われていることが分かる。

時刻歴応答解析結果と4節で導出した近似解による最大応答値を

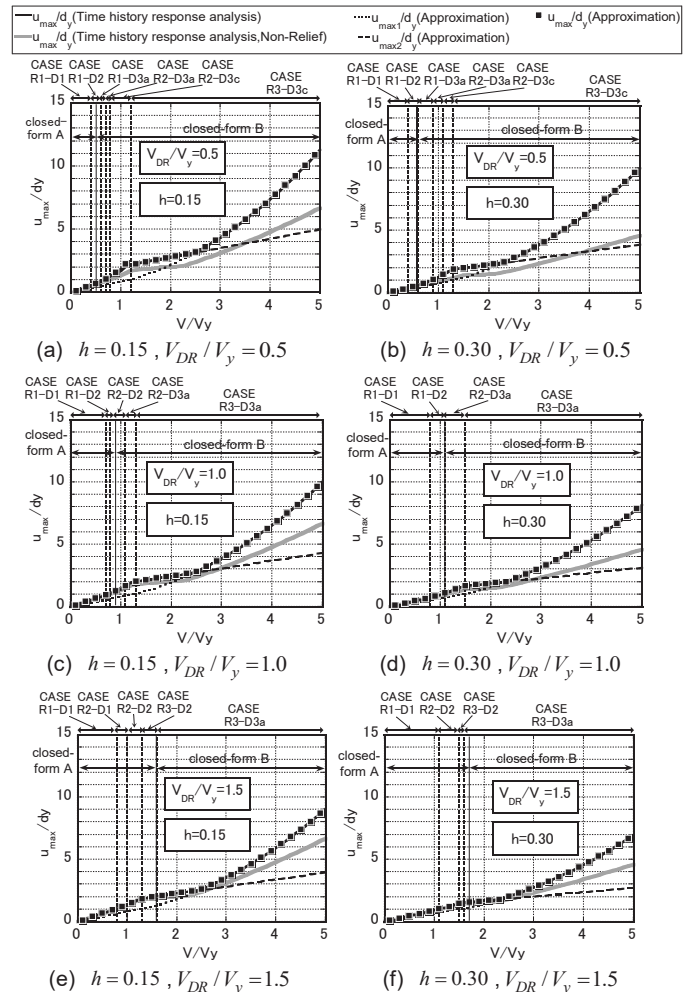


Fig.10 Comparison of maximum elastic-plastic deformation of model with nonlinear viscous damping under critical double impulse by approximation with that by time history response analysis

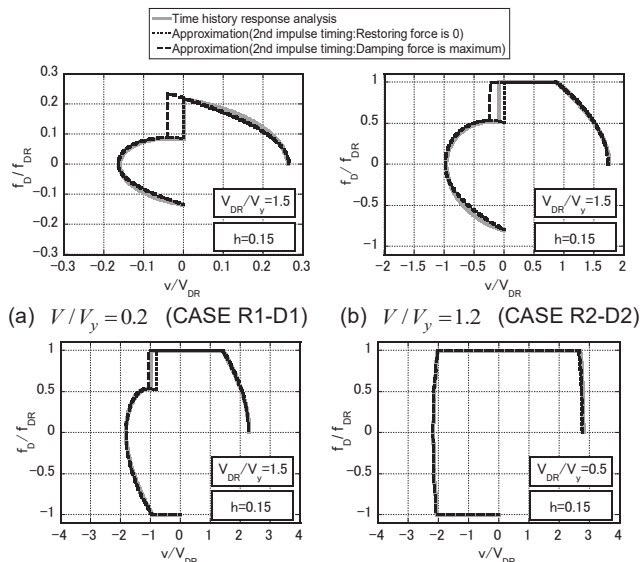


Fig.11 Comparison of elastic-plastic response under critical double impulse using approximation of damping force-deformation relation with that by time history response analysis

比較すると、初期減衰定数 h やリリーフ速度比 V_{DR}/V_y の大小によらず、閉形解は極限的ダブルインパルスに対する非線形粘性減衰系の弾塑性応答を精度よく評価できているといえる。このとき、入力レベルが小さい範囲では closed-form A、入力レベルが大きい範囲では closed-form B が採用されており、これは 3.2 節の結果と対応する。

6. 等価 1 サイクル正弦波を用いた時刻歴応答解析との比較による精度検証

本節では、断層近傍地震動の主要部分の特徴を捉えた 1 サイクル正弦波の近似としてダブルインパルスを用いることの精度検証を行う。ダブルインパルスと等価 1 サイクル正弦波は、加速度のフーリエ振幅の最大値が等しくなるように入力レベルを調整している。等価 1 サイクル正弦波の加速度波形として式(3)を用いる。

Fig.12 に、入力速度レベル V/V_y に対する最大変位の近似解 (Approximation) と、等価 1 サイクル正弦波を入力した場合の時刻歴応答解析による解析結果 (1-cycle sine wave) の比較を示す。近似解については前述の通り、closed-form A と closed-form B のうち大きい方の値を用いている。また、時刻歴解析においては、等価 1 サイクル正弦波の周期 $T_p = 2\pi/\omega_p$ (インパルス時間間隔 t_0 の 2 倍に相当) を、地動最大速度 V_p 一定条件でパラメトリックに変動させて最大変位が極大となる時の応答を採用している。

Fig.12 より、入力レベル V/V_y が小さい範囲では、リリーフ速度比 V_{DR}/V_y の値によらず両者は精度よく一致していることが分かる。一方、入力レベル V/V_y が増大するにつれて両者の差は大きくなるが、減衰定数 h 及びリリーフ速度比 V_{DR}/V_y が大きくなるほど、その誤差は小さくなっている。また、近似解は等価 1 サイクル正弦波に対する応答を概ね安全側に評価できている。これらの結果から、非線形粘性減衰を有する弾塑性 1 自由度系に対しても、断層近傍地震動の近似としてダブルインパルスを用いることは妥当であると考えられる。

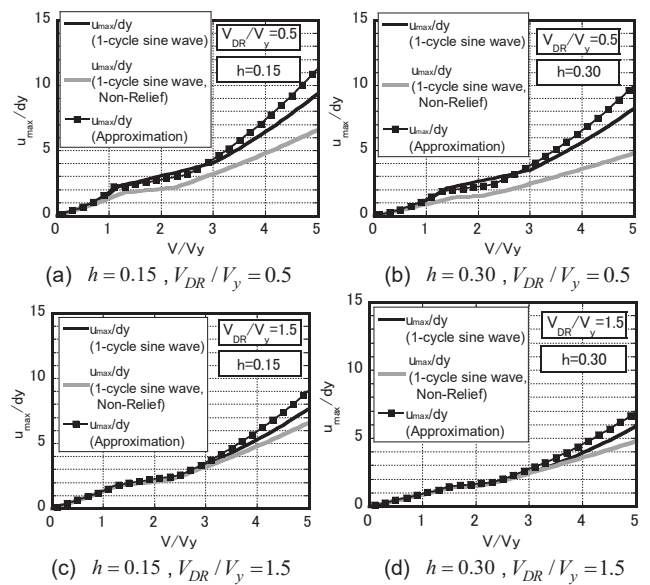


Fig.12 Comparison of maximum elastic-plastic deformation of model with nonlinear viscous damping under critical double impulse (approximation) with that under equivalent one-cycle sine wave (time history response analysis)

7. 結論

本論文では、断層近傍地震動の主要部分の特徴づける 1 サイクル正弦波の近似としてダブルインパルスを導入し、非線形粘性減衰ダンパーを有する 1 自由度弾塑性構造物の極限的ダブルインパルスに対する最大変位応答を閉形表現で導出する方法を提案した。本論文の成果は以下の通りである。

- (1) 非線形粘性減衰ダンパーを有する 1 自由度弾塑性構造物に対してダブルインパルスを入力したときの、第 2 インパルスのクリティカルタイミングについて、時刻歴応答解析による検討を行った。線形粘性減衰ダンパーを有する完全弾塑性 1 自由度系の場合、復元力 0 の時が第 2 インパルスのクリティカルタイミングである。一方、非線形粘性減衰ダンパーを有する完全弾塑性 1 自由度系の場合、入力レベルの増大に伴い、第 2 インパルスのクリティカルタイミングが復元力 0 の時から速度最大の時へと移行することを明らかにした。
- (2) 非線形粘性減衰ダンパーを有する 1 自由度弾塑性構造物の極限的ダブルインパルスに対する最大変位応答の閉形表現を近似的に導出した。本論文では、既往の研究を参考に、減衰力-変位関係を 2 次関数あるいは楕円で近似し、第 2 インパルスのクリティカルタイミングが復元力 0 または速度最大の時であるという仮定とエネルギー平衡則より、近似的に極限応答の閉形表現を導出する方法を提案した。本手法により、近似的ではあるが、断層近傍地震動の主要部分をモデル化したダブルインパルス入力に対する弾塑性極限応答を効率的に評価することが可能である。
- (3) 減衰力-変位関係の 2 次関数あるいは楕円近似と、仮定したクリティカルタイミングの妥当性と精度について、時刻歴応答解析を用いて検討を行った。時刻歴応答解析との比較から、非線形粘性減衰を有する弾塑性 1 自由度系についても、減衰力-変位関係を 2 次関数や楕円を用いて良好な近似が可能であること

とを明らかにした。また、復元力0の時がクリティカルタイミングであると仮定して導出した閉形解と速度最大の時がクリティカルタイミングであると仮定して導出した閉形解のうち、大きい方を極限応答の閉形解として採用することにより、閉形解と時刻歴応答解析結果が良好に対応することを示した。

- (4) 極限的ダブルインパルスと等価1サイクル正弦波に対する弾塑性応答との比較から、断層近傍地震動の近似としてダブルインパルスを用いることの妥当性を検討した。入力レベルの小さい範囲では、両入力に対する応答は精度よく一致している。また、減衰定数やリリーフ速度比が大きいモデルについては、入力レベルの大きい範囲でも両入力の応答が良好に対応することを明らかにした。

謝辞

本研究の一部は、JSPS 科研費 (No.17K18922, 18H01584) による。ここに記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Sasaki, M. and Bertero, VV., Importance of severe pulse-type ground motions in performance-based engineering: historical and critical review, in Proceedings of the Twelfth World Conference on Earthquake Engineering, Auckland, New Zealand, 2000.
- 2) Hisada, Y., Evaluation of the input ground motion of the revised seismic code 2000 considering the characteristics of near-source strong ground motions, The 29th Symposium of Earthquake Ground Motion, pp99-110, 2001.
久田嘉章：震源近傍の強震動 — 改正基準法の設計用入力地震動は妥当か？ —, 第29回地盤震動シンポジウム, 日本建築学会, pp99-110, 2001.
- 3) Mavroedidis, GP. and Papageorgiou, AS., A mathematical representation of near-fault ground motions, Bull. Seism. Soc. Am., **93**(3), pp1099-1131, 2003.
- 4) Makris, N. and Black, C.J., Dimensional analysis of rigid-plastic and elastoplastic structures under pulse-type excitations, J. Eng. Mech., ASCE, **130**, pp1006-1018, 2004.
- 5) Mavroedidis, GP., Dong, G. and Papageorgiou, AS., Near-fault ground motions, and the response of elastic and inelastic single-degree-freedom (SDOF) systems, Earthquake Eng. Struct. Dyn. **33**, pp1023-1049, 2004.
- 6) Kalkan, E. and Kunnath, SK., Effects of fling step and forward directivity on seismic response of buildings, Earthquake Spectra, **22**(2), pp367-390, 2006.
- 7) Khaloo, A.R., Khosravi, H. and Hamidi Jamnani, H., Nonlinear interstory drift contours for idealized forward directivity pulses using "Modified Fish-Bone" models, Advances in Structural Eng., **18**(5), pp603-627, 2015.
- 8) Minami, H., Hayashi, Y., Response characteristics evaluation of elastic shear beam for pulse waves, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.78, No.685, pp453-461, 2013.3.
南 博之, 林 康裕：パルス波地動を受けるせん断弾性棒の応答特性評価, 日本建築学会構造系論文集, 第78巻, 第685号, pp453-461, 2013.3.
- 9) Sakai, Y., Minami, T., Kabeyasawa, T., A method to simplify strong ground motion to a 1 cycle sine wave by taking into account inelastic responses of structures, Journal of Structural Engineering, Vol.45B, pp81-86, 1999.
境 有紀, 南 忠夫, 壁谷澤寿海：構造物の弾塑性地震応答を考慮して地震動をサイン波1波に単純化する方法, 構造工学論文集, Vol.45B, pp81-86, 1999.
- 10) Kojima, K. and Takewaki, I., Critical earthquake response of elastic-plastic structures under near-fault ground motions (Part 1: Fling-step input), Frontiers in Built Environment, **1**: 12, 2015.
- 11) Kojima, K. and Takewaki, I., Critical earthquake response of elastic-plastic structures under near-fault ground motions (Part 2: Forward-directivity input), Frontiers in Built Environment, **1**: 13, 2015.
- 12) Kojima, K. and Takewaki, I., Closed-form critical earthquake response of elastic-plastic structures on compliant ground under near-fault ground motions, Frontiers in Built Environment, **2**: 1, 2016.
- 13) Kojima, K. and Takewaki, I., Closed-form critical earthquake response of elastic-plastic structures with bilinear hysteresis under near-fault ground motions, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.81, No.726, pp1209-1219, 2016.8.
小島紘太郎, 竹脇 出：バイリニア型復元力特性を有する弾塑性構造物の断層近傍地震動に対する極限応答の閉形表現, 日本建築学会構造系論文集, 第81巻, 第726号, pp1209-1219, 2016.8.
- 14) Kojima, K., Saotome, Y. and Takewaki, I., Critical earthquake response of SDOF elastic-perfectly plastic model with viscous damping under double impulse as substitute of near-fault ground motions, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.82, No.735, pp643-652, 2017.5.
小島紘太郎, 五月女義人, 竹脇 出：断層近傍地震動を受ける粘性減衰を有する完全弾塑性1自由度系の極限応答, 日本建築学会構造系論文集, 第82巻, 第735号, pp643-652, 2017.5.
- 15) Drenick, RF., Model-free design of aseismic structures. J. Eng. Mech. Div., ASCE, **96**(EM4), pp483-493, 1970.
- 16) Takewaki, I., Critical excitation methods in earthquake engineering, Elsevier, Amsterdam 2007, Second edition in 2013, London.
- 17) Caughey, TK., Sinusoidal excitation of a system with bilinear hysteresis. J. Appl. Mech. **27**(4), pp640-643, 1960.
- 18) Iwan, WD., The dynamic response of bilinear hysteretic systems, Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, 1961.
- 19) Fujita, K., Yasuda, K., Kanno, Y. and Takewaki, I., Robustness evaluation of elastic-plastic base-isolated high-rise buildings under critical double impulse, Frontiers in Built Environment, **3**: 31, 2017.
- 20) Hayashi, K., Fujita, K., Tsuji, M. and Takewaki, I., A simple response evaluation method for base-isolation building-connection hybrid structural system under long-period and long-duration ground motion, Frontiers in Built Environment, **4**: 2, 2018.
- 21) Tsuji, M., Tanaka, H., Yoshitomi, S. and Takewaki, I., Optimum relief force of oil dampers in multi-story buildings, Journal of Structural and Construction Engineering (Transactions of AIJ), Vol.77, No.678, pp1237-1246, 2012.8.
辻 聖晃, 田中英稔, 吉富信太, 竹脇 出：多層建物におけるオイルダンパーの最適リリーフ荷重決定法, 日本建築学会構造系論文集, 第77巻, 第678号, pp1237-1246, 2012.8.

CRITICAL EARTHQUAKE RESPONSE OF ELASTIC-PLASTIC STRUCTURES WITH
NONLINEAR VISCOUS DAMPING UNDER DOUBLE IMPULSE AS SUBSTITUTE FOR
NEAR-FAULT GROUND MOTION

Goki TAMURA *¹, *Kotaro KOJIMA* *², *Kohei FUJITA* *³
and *Izuru TAKEWAKI* *⁴

*¹ Grad. Student, Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ.

*² Assist. Prof., Faculty of Design and Architecture, Kyoto Institute of Technology, Dr.Eng.

*³ Assist. Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.

*⁴ Prof., Dept. of Architecture and Architectural Eng., Kyoto Univ., Dr.Eng.

After Parkfield earthquake (1966), San Fernando earthquake (1971), Northridge earthquake (1994) and Hyogoken-Nanbu earthquake (1995), many aspects of near-fault ground motions have been made clear and the effects of near-fault ground motions on structural response have been investigated. The fling-step (parallel to the fault plane) and forward-directivity (perpendicular to the fault plane) inputs have been characterized by two or three sinusoidal wavelets. For such near-fault ground motions, many analyses have been conducted from various viewpoints. However, as far as a forced base input is used, both a free-vibration term and a forced-vibration term arise inevitably and the closed-form expression of the elastic-plastic response may be difficult. In order to overcome this difficulty, the double impulse has been introduced by some of the present authors as a good substitute for the near-fault ground motion and the closed-form expression has been derived for the undamped elastic-plastic response and linearly damped elastic-plastic response of a structure under the critical double impulse. Furthermore, this approach has been extended to other various vibration models, e.g. soil-structure interaction problems, dynamic collapse problems, repeated ground motion problems, overturning rocking problems of rigid blocks.

The double impulse input is introduced here again as a substitute for the fling-step near-fault ground motion and some closed-form expressions are derived for the elastic-plastic response of a structure with nonlinear viscous damping under the 'critical double impulse'. It is shown that, since only the free vibration appears under such double impulse, the energy approach enables the derivation of the closed-form expression of a complicated elastic-plastic response with nonlinear viscous damping. It is also shown that the critical timing of the second impulse is the time with the zero restoring force in the case where the input velocity is small. On the other hand, the critical timing of the second impulse is the time with the maximum velocity in the case where the input velocity is large. The quadratic-function or elliptical-function approximation for the damping force-deformation relationship is introduced. The combination of the timings of the structural yielding and the damper relieving is considered in detail and the closed-form expressions are derived for all the combinational cases.

The validity of the proposed theory using the quadratic-function or elliptical-function approximation and the assumption of the critical impulse timing has been investigated through the comparison with the critical elastic-plastic response under double impulse using the time history response analysis. The validity of the proposed closed-form solution has also been demonstrated through the comparison with the response analysis to the corresponding one-cycle sinusoidal input as a representative of the fling-step near-fault ground motion. It has been demonstrated that the maximum response to the critical double impulse and the response to the corresponding one-cycle sinusoidal input coincide fairly well. This supports the validity of the proposed theory.

(2018年6月4日原稿受理, 2018年8月7日採用決定)