数理解析研究所講究録
第2060巻 2018年 9-14

Algebraic structures on the reduced loop homology

内藤　貴仁　（東京大学大学院数理科学研究科）
Takahito Naito　(University of Tokyo)

1. はじめに

位相空間 M に対し，LM を M の自由ループ空間とする．つまり S^1 から M への連続写像全体にコンパクト開位相を備えた空間である．Chas-Sullivan は論文 [3] においてストリングトポロジーの理論を創始した．ストリングトポロジーとは簡単に述べると，向き付けられた閉多様体の自由ループ空間のホモロジー（以後ループホモロジーと呼ぶ）上の代数構造を研究する分野である．彼らの論文を皮切りに，これまでにループホモロジー上の数理物理を起源とする豊かな代数構造が発見されてきた．まず Chas-Sullivan によってループ積と呼ばれるループホモロジー上の積，そして Batalin-Vilkovisky(BV) 代数構造が導入され，S^1 同変ホモロジー $H_*^{S^1}(LM)$ 上に Lie 代数の構造が定義された．その構造が拡張され，ループホモロジーは Cohen-Godin[4] によって 2 次元位相的量子場理論，Godin[8] によってホモロジー的共形場理論である事が示された．

本稿で扱うのは，ストリングトポロジーの文脈で Sullivan[14] によって導入された余積である：

$$\vee : H_*(LM, M) \longrightarrow H_*(LM, M) \otimes H_*(LM, M).$$

ここで M は定値ループ全体の空間と思い，LM の部分空間と見なしている．相対ホモロジー $H_*(LM, M)$ を被約ループホモロジーと呼ぶことにする．この余積とループ積は被約ループホモロジーに infinitesimal 双代数の構造を与える事が Sullivan によって示されている．本稿では，主に Sullivan の余積について著者の研究結果を交えながら紹介したいと思う．

本稿の構成は次の通りである．第 2 章では，ストリングトポロジー理論の文脈で登場するループ積と 2 次元位相的量子場理論の構造に触れる．第 3 章では，Sullivan 余積に関する先行研究やホモトピー論的構成方法，その性質について紹介する．第 4 章では，論文 [13] に沿って Sullivan の余積に関する著者の結果について述べる．有理係数の場合の具体的な計算例やループホモロジーの Hodge 分解と呼ばれる直和分解との関連について紹介する．

2. ループホモロジー上の代数構造

本章では，ループホモロジー上のループ積と 2 次元位相的量子場理論の構造について紹介する．今後，M は m 次元の向き付けられた閉多様体とし，S^1 を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ と同一視する事にする．また簡単の為，ホモロジーの係数は全て体で考える．

2.1. Chas-Sullivan のループ積

ストリングトポロジーで最も基本的な代数構造として，Chas-Sullivan[3] のループ積

$$\mu : H_p(LM) \otimes H_q(LM) \longrightarrow H_{p+q-m}(LM)$$

がある．ここでは Cohen-Jones[5] によるホモトピー論的構成方法を簡単に紹介する．まずファイバー積

$$LM \times_M LM = \{(\gamma_1, \gamma_2) \in LM \times LM \mid \gamma_1(0) = \gamma_2(0)\}$$

と包含写像 $j : LM \times_M LM \to LM \times LM$ を考える．2つのループを繋げて1つのループとみる写像を $\mathrm{comp} : LM \times_M LM \to LM$ としたとき，ループ積は次の合成で定義される：

$$H_*(LM) \otimes H_*(LM) \xrightarrow{\times} H_*(LM \times LM) \xrightarrow{j_!} H_{*-m}(LM \times_M LM) \xrightarrow{(\mathrm{comp})_*} H_{*-m}(LM).$$

ここで，$\times$ はクロス積，$j_!$ は j の Gysin 写像である．ループ積は（符号の差を除いて）結合的かつ可換な積であり，$c : M \to LM$ を包含写像，$[M] \in H_m(M)$ を基本類とする時，$c_*([M])$ はループ積の単位元となる．

またループ積は $H_*(M)$ 上の交叉積の持ち上げになるよう定義されている．つまり，評価写像 $\mathrm{ev}_0 : LM \to M$，$\mathrm{ev}_0(\gamma) = \gamma(0)$ に対し，ホモロジーの間に誘導される射 $\mathrm{ev}_{0*} : H_*(LM) \to H_*(M)$ は積を保つ．

2.2. 2次元位相的量子場理論

ループ積の構成の拡張として，Cohen-Godin の次の定理がある．

定理 2.1 ([4]) $H_*(LM)$ は,（余単位元を持たない）2次元位相的量子場理論である．

$\Sigma = \Sigma_{g,p+q}$ を種数 g で，p-inboundary，q-outboundary（ただし $q \geq 1$）を持つ向き付けられた2次元コボルディズムとする．つまり，S^1 の p 個の非交和 $\sqcup_p S^1$ から q 個の非交和 $\sqcup_q S^1$ へのコボルディズムである．彼らはこれに付随する次数 $m\chi(\Sigma)$ の作用素

$$\mu_\Sigma : H_*(LM)^{\otimes p} \longrightarrow H_*(LM)^{\otimes q}$$

を構成した．ここで $\chi(\Sigma)$ は Σ の Euler 標数である．これを Σ に付随するストリング作用素と呼ぶ．特にパンツ型コボルディズム $\Sigma_{0,2+1}$ に付随するストリング作用素はループ積と一致する．一方で，逆向きのパンツ型コボルディズム $\Sigma_{0,1+2}$ に付随するストリング作用素はループホモロジー上の次数 $-m$ の余積となる．これはループ余積と呼ばれる．ループ余積については同時期に Sullivan[14] によっても導入されている事に注意しておく．彼らの結果により，ループホモロジー上の豊かな代数構造が発見されたように思えた．しかしながら Tamanoi によって次の定理が示された．

定理 2.2 ([15]) Σ の種数が1以上の時，それに付随するストリング作用素は自明となる．

この定理はループ余積が殆ど自明な作用素である事から従う．特に M が奇数次元多様体の時は，ループ余積は自明な余積である事が Tamanoi[15] により証明されている．

3. Sullivan の余積

3.1. 先行研究

論文 [14] において，Sullivan はループ余積とは異なった次数 $1-m$ の被約ループホモロジー上の余積

$$\vee : H_*(LM, M) \longrightarrow H_*(LM, M) \otimes H_*(LM, M)$$

を導入した．この余積とループ積 μ は $H_*(LM, M)$ に infinitesimal 双代数の構造をもたらす．つまり写像としての等式

$$\vee \circ \mu = (\mu \otimes 1) \circ (1 \otimes \vee) + (1 \otimes \mu) \circ (\vee \otimes 1) : H_*(LM, M)^{\otimes 2} \longrightarrow H_*(LM, M)^{\otimes 2}$$

を満たす．この等式は，$H_*(LM,M)$ をループ積により代数と見なした時，余積 $\vee$ が Leibniz 則を満たす事を意味している．infinitesimal 双代数の詳細については，例えば [1] を参照して欲しい．

Sullivan の余積に関する研究は，例えば Basu[2] によって，$\vee$ の幾何学的構成方が与えられている．Gorensky-Hingston[11] は，Sullivan の余積とリーマン多様体上の閉測地線との関係を調べている．しかしながら，この余積に関する研究は著者の知る限りでは殆どなされていないのが現状である．

3.2. Sullivan の余積のホモトピー論的構成

Sullivan の余積の構成方法を紹介する．これから紹介するのは 2.1 節で述べた Cohen-Jones[5] によるループ積のホモトピー論的構成方法のアイディアを用いた，著者 [13] による構成方法である．Gorensky-Hingston[11] の $\vee$ の構成方法も参照して欲しい．

単位閉区間 $I=[0,1]$ に対し，$h: LM\times I\to M\times M$ を $h(\gamma,t)=(\gamma(0),\gamma(t))$ で定義される連続写像とする．$\mathcal{T}$ を対角写像 $M\to M\times M$ の閉管状近傍とし，$\omega\in H^m(\mathcal{T},\partial\mathcal{T})$ を Thom 類とする．簡単の為，

$$\tilde{\mathcal{T}}:=h^{-1}(\mathcal{T}),\ \ \partial\tilde{\mathcal{T}}:=h^{-1}(\partial\mathcal{T}),\ \ \tilde{\omega}:=h^*(\omega)\in H^m(\tilde{\mathcal{T}},\partial\tilde{\mathcal{T}})$$

と置くことにする．また $LM\times I$ の部分空間

$$P=\{(\gamma,t)\in LM\times I\mid \gamma(0)=\gamma(t)\}$$

を考え，$j:P\to LM\times I$ を包含写像とする．この時，j の Gysin 写像 $j_!: H_*(LM\times I)\to H_*(P)$ が次の合成として定義される：

$$H_*(LM\times I)\xrightarrow{\text{proj}}H_*(LM\times I,(LM\times I)\setminus P)\underset{\cong}{\xleftarrow{\text{切除同型}}}H_*(\tilde{\mathcal{T}},\partial\tilde{\mathcal{T}})\xrightarrow{\tilde{\omega}\cap}H_*(\tilde{\mathcal{T}})\xrightarrow{\psi_*}H_*(P).$$

右端の写像 $\psi:\tilde{\mathcal{T}}\to P$ の定義を簡単に述べる．任意の $(\gamma,t)\in\tilde{\mathcal{T}}$ に対し，$(\gamma(0),\gamma(t))$ は管状近傍 $\mathcal{T}$ に含まれる．つまり $\gamma(0)$ と $\gamma(t)$ が十分近いので，$\gamma(0)$ から $\gamma(t)$ への最短測地線 l が取れる．この時，4 つの道を繋げて出来るループ $\gamma|_{[0,t]}\cdot l^{-1}\cdot l\cdot\gamma|_{[t,1]}$ と適当な I の元との組により P の元が得られる．それを $\psi(\gamma,t)$ とする．

Gysin 写像 $j_!$ は，次の相対ホモロジー間の写像を誘導する：

$$j_!: H_*(LM\times I,(LM\times\partial I)\cup(M\times I))\longrightarrow H_*(P,(LM\times\partial I)\cup(M\times I)).$$

$\theta:(P,(LM\times\partial I)\cup(M\times I))\to(LM,M)^{\times 2}$ をループを 2 つに切る写像，つまり $\theta(\gamma,t)=(\gamma|_{[0,t]},\gamma|_{[t,1]})$ で定義される写像とする．基本類 $[I,\partial I]\in H_1(I,\partial I)$ を用いて，次の合成で Sullivan の余積が得られる：

$$\vee: H_*(LM,M)\xrightarrow{\times[I,\partial I]}H_*(LM\times I,(LM\times\partial I)\cup(M\times I))\xrightarrow{\theta_*\circ j_!}H_*(LM,M)^{\otimes 2}.$$

命題 3.1 ([11], [13]) 余積 $\vee$ は結合的かつ可換である．つまり，次の等式が成り立つ：

1. $(\vee\otimes 1)\circ\vee=(-1)^{1-m}(1\otimes\vee)\circ\vee$,
2. $T_*\circ\vee=(-1)^{1-m}\vee$.

ここで $T:(LM,M)^{\times 2}\to(LM,M)^{\times 2}$ は成分を入れ替える写像である．

4. 主結果

本章から M は単連結，係数体は有理数体 $\mathbb{Q}$ を仮定する．与えられた多様体が単連結の時，その有理係数ループホモロジーを調べる際は，有理ホモトピー論が非常に強力な手法となる．著者は [13] において，Sullivan の余積の有理モデルを与えている．つまり M の極小 Sullivan モデルの言葉を用いて，Sullivan 余積を代数的に構成した．本稿では，余積の有理モデルの詳細を述べる事は省略する．本章ではまず有理ホモトピー論の基本的な用語を復習し，その後有理モデルによって得られた計算例や性質について紹介する．

4.1. 自由ループ空間の Sullivan モデル

本節では，有理ホモトピー論の基本的な記号，用語と自由ループ空間の Sullivan モデルを紹介する．詳細は [6] を参照して頂きたい．初めに LM の Sullivan モデルを説明する．$(\wedge V, d)$ を M の極小 Sullivan モデルとする．つまり $(\wedge V, d)$ は次の性質を満たす可換な次数付き微分代数である．

- V は次数付き $\mathbb{Q}$ 上ベクトル空間，$\wedge V$ は可換な自由次数付き代数である．
- d は $\wedge V$ の微分で，Leibnitz 則と $d(V) \subset \wedge^{\geq 2} V$ を満たす．
- $(\wedge V, d)$ のコホモロジーは，M の有理コホモロジー環と代数として同型である：$H^*(M;\mathbb{Q}) \cong H^*(\wedge V, d)$.

M の極小 Sullivan モデルを用いて，LM の Sullivan モデルが次のようにして与えられる．$\overline{V}$ を V の懸垂，つまり $(\overline{V})^n = V^{n+1}$ とする．この時，可換な次数付き微分代数

$$\mathcal{M}_{LM} = (\wedge V \otimes \wedge \overline{V}, D)$$

を $D(v \otimes 1) = dv \otimes 1$，$D(1 \otimes \bar{v}) = -s(dv \otimes 1)$ $(v \in V)$ により定義する．ここで $s : \wedge V \otimes \wedge \overline{V} \to \wedge V \otimes \wedge \overline{V}$ は，$s(v \otimes 1) = 1 \otimes \bar{v}$，$s(1 \otimes \bar{v}) = 0$ を満たす derivation である．これが LM の Sullivan モデル，つまり次の代数としての同型写像が存在する：

$$H^*(LM;\mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{M}_{LM}, D).$$

この Sullivan モデルを用いる事で，有理係数の場合は自由ループ空間のコホモロジー環を計算する事が出来る．著者はこのモデルを用いて，余積 $\vee$ の有理モデルを与えた ([13])．しかしながら，一般的に（有理数体上とは言え）与えた有理モデルを用いて具体的に計算するのは困難である．そこで次に紹介する，pure な多様体に着目する．

定義 4.1 ([6, §32]) 単連結な位相空間が pure であるとは，その極小 Sullivan モデル $(\wedge V, d)$ が $d(V^{\mathrm{even}}) = 0$，$d(V^{\mathrm{odd}}) \subset \wedge V^{\mathrm{even}}$ を満たす事である．

pure な多様体のクラスには重要かつ基本的な多様体が含まれる．例えば，球面や複素射影空間，より一般に等質空間が挙げられる．一方で，pure という性質は多様体の連結和とは相性が悪い．実際，連結和 $\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は pure であるが，$\mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2 \# \mathbb{C}P^2$ は pure とはならない事に注意しておく．pure な空間のコホモロジー環による特徴づけを紹介しておく．

定理 4.2 ([6, Proposition 32.16]) 単連結空間 X の有理コホモロジー環が代数として

$$H^*(X;\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[x_1, x_2, \cdots, x_n]/(r_1, r_2, \cdots, r_n)$$

を満たすならば，X は pure である．ただし x_i の次数は2以上の偶数であり，$(r_1, r_2, \cdots, r_n)$ は正則列である．

与えられた多様体 M が pure の時は，著者の与えた余積の有理モデルにより，具体的に余積を計算する事が可能である．次節で具体的計算例を述べる．

4.2. 球面の Sullivan の余積

M が球面の場合の計算結果を紹介する．Sullivan の余積の具体的な計算例が与えられたのは著者が知る限り初めてであり，この計算によりループ余積とは違い十分非自明な作用素である事が分かる．尚，計算結果はループホモロジーではなくコホモロジーで記述している点に注意する．

定理 4.3 奇数次元球面 S^{2n+1} の有理係数被約ループコホモロジーは，

$$H^*(LS^{2n+1}, S^{2n+1};\mathbb{Q}) \cong \wedge(e) \otimes (\mathbb{Q}[\bar{e}]/\mathbb{Q}1)$$

$(|e| = 2n+1, |\bar{e}| = 2n)$ であり，余積の双対 $\vee^{\#}$ は次を満たす：

$$\vee^{\#}(e^{p_1}\bar{e}^{p_2} \otimes e^{q_1}\bar{e}^{q_2}) = \frac{p_2!q_2!}{(p_2+q_2+1)!}e^{p_1+q_1}\bar{e}^{p_2+q_2+1}.$$

ΩS^{2n+1} は基点を保つループ全体の成す空間とするとき，LS^{2n+1} は，$S^{2n+1} \times \Omega S^{2n+1}$ と有理ホモトピー同値であり，上述の定理の e は S^{2n+1} の基本類に，$\bar{e}$ は $H^*(\Omega S^{2n+1};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}[\bar{e}]$ の生成元に対応している．

定理 4.4 偶数次元球面 S^{2n} の有理係数被約ループコホモロジーは，

$$H^*(LS^{2n}, S^{2n};\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}\{v_k, w_k \mid k \geq 1\}$$

（$|v_k| = 2n-1+k(4n-2)$, $|w_k| = 2n+(k+1)(4n-2)$）であり，$\vee^{\#}$ は次を満たす：

$$\begin{aligned}
\vee^{\#}(v_p \otimes v_q) &= \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}v_{p+q}, \\
\vee^{\#}(w_p \otimes v_q) &= -\vee^{\#}(v_q \otimes w_p) = \frac{p!(q-1)!}{(p+q)!}w_{p+q}, \\
\vee^{\#}(w_p \otimes w_q) &= 0.
\end{aligned}$$

4.3. ループコホモロジーの Hodge 分解と Sullivan の余積

本稿の最後に，Vigué[16] によるループコホモロジーの Hodge 分解と呼ばれる直和分解と Sullivan 余積 $\vee$ との関係について述べる．Hodge 分解については [7] も参照して欲しい．M の極小 Sullivan モデルを $(\wedge V, d)$ とし，$\mathcal{M}_{LM}$ を 4.1 節で与えた LM の Sullivan モデルとする．すると $\mathcal{M}_{LM}$ チェイン複体としての直和分解

$$\mathcal{M}_{LM} = \bigoplus_{p\geq 0}(\wedge V \otimes \wedge^p \overline{V}, D)$$

がある．この時，$H^*_{(p)}(LM) = H^*(\wedge V \otimes \wedge^p \overline{V}, D)$ と置く．定義からすぐ分かるように，$H^*(M;\mathbb{Q}) \cong H^*_{(0)}(LM)$，$H^*(LM, M;\mathbb{Q}) \cong \bigoplus_{p\geq 1} H^*_{(p)}(LM)$ である．著者は pure な多様体の時に，Sullivan 余積と Hodge 分解に関する次の定理を得た．

定理 4.5 M をpureな単連結閉多様体とする．この時次が成り立つ．

(1) $\dim \pi_{\mathrm{odd}}(M)\otimes\mathbb{Q} - \dim \pi_{\mathrm{even}}(M)\otimes\mathbb{Q} \geq 2$ の時，$\mathbb{Q}$ 上で $\vee$ は自明である．

(2) $\dim \pi_{\mathrm{odd}}(M)\otimes\mathbb{Q} - \dim \pi_{\mathrm{even}}(M)\otimes\mathbb{Q} = 1$ の時，

$$\vee^{\#} : H^*_{(p)}(LM)\otimes H^*_{(q)}(LM) \longrightarrow H^*_{(p+q+1)}(LM) \quad (p,q\geq 1).$$

ただし $\vee^{\#}$ はSullivan余積 $\vee$ の双対である．

この定理の系として，単連結コンパクトLie群に関する次の結果が得られた．

系 4.6 階数2以上の単連結コンパクトLie群の余積 $\vee$ は，$\mathbb{Q}$ 上で自明となる．

参考文献

[1] M. Aguiar, On the associative analog of Lie bialgebras, J. Algebra 244 (2001), no. 2, 492–532.

[2] S. Basu, Transversal String Topology & Invariants of Manifolds. Thesis (Ph.D.)-State University of New York at Stony Brook. ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2011. 146 pp.

[3] M. Chas and D. Sullivan, String topology, preprint (1999), arXiv:math.GT/9911159.

[4] R. L. Cohen, V. Godin, A polarized view of string topology, Topology, geometry and quantum field theory, 127-154, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[5] R. L. Cohen, J. D. S. Jones, A homotopy theoretic realization of string topology. Math. Ann. 324 (2002), no. 4, 773–798.

[6] Y. Félix, S. Halperin, J. -C. Thomas, Rational Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics, 205. Springer-Verlag.

[7] M. Gerstenhaber, S. D. Schack, A Hodge-type decomposition for commutative algebra cohomology. J. Pure Appl. Algebra 48 (1987), no. 3, 229–247.

[8] V. Godin, Higher string topology operations, preprint (2007), arXiv:0711.4859.

[9] T. Goodwillie, Cyclic homology, derivations, and the free loopspace. Topology 24 (1985), no. 2, 187–215.

[10] W. M. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations. Invent. Math. 85 (1986), no. 2, 263–302.

[11] M. Goresky, N. Hingston, Loop products and closed geodesics. Duke Math. J. 150 (2009), no. 1, 117–209.

[12] J. D. S. Jones, Cyclic homology and equivariant homology. Invent. Math. 87 (1987), no. 2, 403–423.

[13] T. Naito, A rational model of Sullivan's coproduct on the reduced loop homology, preprint.

[14] D. Sullivan, Open and closed string field theory interpreted in classical algebraic topology. Topology, geometry and quantum field theory, 344–357, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

[15] H. Tamanoi, Loop coproducts in string topology and triviality of higher genus TQFT operations. J. Pure Appl. Algebra 214 (2010), no. 5, 605-615.

[16] M. Vigué-Poirrier, Décompositions de l'homologie cyclique des algébres différentielles graduées commutatives. (French) [Decomposition of the cyclic homology of commutative graded differential algebras] K-Theory 4 (1991), no. 5, 399-410.