

## 正則な半単純ヘッセンバーク多様体のコホモロジー環

大阪大学大学院情報科学研究科・日本学術振興会特別研究員 PD、大阪市立大学数学研究所  
堀口 達也

TATSUYA HORIGUCHI

DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS,  
GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY,  
OSAKA UNIVERSITY, JSPS RESEARCH FELLOW PD, AND  
OSAKA CITY UNIVERSITY ADVANCED MATHEMATICAL INSTITUTE

### 1. 序文

旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  は  $\mathbb{C}^n$  の線形部分空間の列  $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$  全体からなる空間である。ここで、各  $V_i$  は  $i$  次元線形部分空間を表す。  $S: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  を正則な半単純線形写像（対角化可能で固有値が相異なるもの）とし、  $h: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  を広義単調増加関数で  $h(i) \geq i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) を満たすものとする。このとき、以下で定義される旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  の閉部分多様体

$$X(h) := \{V_\bullet \in \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) \mid SV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

を正則な半単純ヘッセンバーク多様体、  $h: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$  をヘッセンバーク関数と呼ぶ。

本稿では正則な半単純ヘッセンバーク多様体  $X(h)$ <sup>1</sup> のコホモロジー環<sup>2</sup> の明示的な表示を与える問題について考えていく。ヘッセンバーク関数  $h$  が  $h(i) = n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) のとき、  $X(h) = \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  であることが定義より分かる。旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  のコホモロジー環は

$$H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] / (e_i(X_1, \dots, X_n) \mid 1 \leq i \leq n)$$

で与えられることが知られている。ここで、  $X_i$  の次数は 2 で、  $e_i(X_1, \dots, X_n)$  は次数  $i$  の基本対称式を表す。包含写像  $X(h) \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  が導く制限写像  $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \rightarrow H^*(X(h))$  は一般に全射ではないので、  $X(h)$  のコホモロジー環の明示的な表示を与える問題を考えるためにはまず  $H^*(X(h))$  の  $\mathbb{Z}$ -代数としての生成元で  $H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n))$  から来ないものを見つける必要がある。生成元を見つけるために GKM 理論が有効である ([5]<sup>3</sup>) ため、GKM グラフを用いて  $H^*(X(h))$  の  $\mathbb{Z}$ -代数としての生成元を見つけることを考える。本稿では、ヘッセンバーク関数  $h$  が  $h(i) = n$  ( $i = 2, \dots, n$ ) ( $h(1)$  は任意) のとき、コホモロジー環  $H^*(X(h))$  の生成元を記述し、  $H^*(X(h))$  の明示的な表示を与える。

さらに、正則な半単純ヘッセンバーク多様体のコホモロジー環  $H^*(X(h))$  を調べることにより、グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想の解決が期待されるこ

<sup>1</sup>正則な半単純ヘッセンバーク多様体のコホモロジー環はヘッセンバーク関数  $h$  のみに依存するので、  $X(h)$  と表している。

<sup>2</sup>本稿ではコホモロジーは整数係数の特異コホモロジーを表す。

<sup>3</sup>[5] では旗多様体の (同変) コホモロジー環の生成元を GKM グラフを用いて見つけ、旗多様体の (同変) コホモロジー環の明示的な表示を与えている。

とが知られている。Tymoczko はコホモロジー  $H^*(X(h))$  の上に対称群  $\mathfrak{S}_n$  の作用を構成し ([10])、Shareshian-Wachs は  $H^*(X(h))$  上の Tymoczko による対称群  $\mathfrak{S}_n$  表現がグラフ理論の彩色対称関数と綺麗な対応があるという予想を立てた ([8, 9])。もう少し詳しく述べると、Tymoczko による  $\mathfrak{S}_n$  表現  $H^*(X(h))$  はヘッセンバーグ関数  $h$  から定まるグラフ  $G_h$  の彩色対称関数と同値であるという驚くべき予想である。この Shareshian-Wachs による予想は Brosnan-Chow によりモノドロミーの視点から解決され ([3])、その後すぐに Guay-Paquet はホップ代数を用いて Shareshian-Wachs 予想の別証明を与えた ([6])。この Shareshian-Wachs 予想の解決により、グラフ理論における Stanley-Stembridge 予想が  $H^*(X(h))$  上の対称群  $\mathfrak{S}_n$  作用のふるまいを深く調べることにより解決することができるということが知られている ([8, 9])。本稿における主結果のコホモロジー環  $H^*(X(h))$  の明示的な表示 ( $h$  は  $h(i) = n$  ( $i = 2, \dots, n$ )) は Stanley-Stembridge 予想の一部の解決を述べている。

本研究は、阿部拓氏 (大阪市立大学数学研究所)、柘田幹也氏 (大阪市立大学) との共同研究である。

## 2. 正則な半単純ヘッセンバーグ多様体

旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  は以下の  $\mathbb{C}^n$  の線形部分空間の列全体からなる空間である：

$$V_\bullet := (V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \dots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n)$$

ここで、各  $V_i$  は  $i$  次元線形部分空間である。正則な半単純ヘッセンバーグ多様体は旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  の閉部分多様体であり、そのコホモロジー環は以下で定義されるヘッセンバーグ関数から定まる。

**定義 2.1.**  $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$  とする。関数  $h: [n] \rightarrow [n]$  がヘッセンバーグ関数であるとは、以下の2つの条件を満たすときをいう。

- (i)  $h(1) \leq h(2) \leq \dots \leq h(n)$
- (ii)  $h(j) \geq j$  for  $j = 1, 2, \dots, n$

ヘッセンバーグ関数  $h$  は各値を並べたもの  $h = (h(1), h(2), \dots, h(n))$  で表す。

**例 2.2.**  $n = 5$  とする。 $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  はヘッセンバーグ関数である。ヘッセンバーグ関数  $h$  を視覚化するために、各  $j$  列目に  $h(j)$  個の箱を並べた箱の集まりを考える。例えば、ヘッセンバーグ関数  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  は以下の箱の集まりを表す。

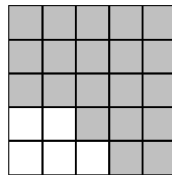


FIGURE 1. ヘッセンバーグ関数  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  に対応する箱の集まり

**定義 2.3.**  $S : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  を正則な半単純線形写像 (対角化可能で固有値が相異なるもの)、 $h : [n] \rightarrow [n]$  をヘッセンバーグ関数とする。このとき、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $X(h)$  は以下で定義される旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  の射影部分多様体である：

$$X(h) = \{V_\bullet \in \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n) \mid SV_i \subset V_{h(i)} \text{ for } i = 1, 2, \dots, n\}$$

$h = (n, n, \dots, n)$  のとき、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $X(h)$  は全体の旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  に一致することが定義から分かる。また、以下では  $S$  をジョルダン標準形 (すなわち対角成分が相異なる対角行列) であるとする。

**定理 2.4** (De Mari-Procesi-Shayman [4]).  $X(h)$  を正則な半単純ヘッセンバーグ多様体とする。このとき、次が成立。

- (1)  $X(h)$  は非特異である。
- (2)  $X(h)$  の複素次元は  $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$  である。
- (3)  $X(h)$  は複素セル分割 (complex affine paving) をもつ。特に、 $X(h)$  のコホモロジーは自由加群で  $X(h)$  の奇数次コホモロジーは消えている。
- (4) ヘッセンバーグ関数  $h = (2, 3, 4, \dots, n, n)$  とする  $X(h)$  は、 $A_{n-1}$  型の Weyl chambers 全体の集まりを扇とするトーリック多様体である。

**注意 2.5.** 定理 2.4 (2) における  $\text{Hess}(N, h)$  の複素次元  $\sum_{j=1}^n (h(j) - j)$  は、ヘッセンバーグ関数  $h$  を箱の集まりと思えば、対角線より真に左下に位置する箱の個数を表す。例えば、ヘッセンバーグ関数を  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  とする正則な半単純ヘッセンバーグ多様体の複素次元は 5 である。

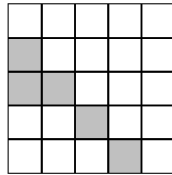


FIGURE 2.  $h = (3, 3, 4, 5, 5)$  とする  $X(h)$  の複素次元でカウントされる箱の集まり

**注意 2.6.** 定理 2.4 (4) より、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $\text{Hess}(S, h)$  は  $A_{n-1}$  型 Weyl chambers を扇とするトーリック多様体と旗多様体を離散的につなぐものと思える。

### 3. GKM グラフ

$T$  を以下のような一般線形群  $\text{GL}(n, \mathbb{C})$  の中の  $n$  次元複素トーラスとする：

$$T := \left\{ \left( \begin{array}{cccc} g_1 & & & \\ & g_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & g_n \end{array} \right) \mid g_i \in \mathbb{C}^* \text{ for all } i = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

旗多様体は  $GL(n, \mathbb{C})$  の自然な作用を持つので、その制限によりトーラス  $T$  は旗多様体  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  上に作用し、正則な半単純ヘッセンバーグ多様体  $X(h)$  上にも作用を保つ。実際、 $T$  の任意の元が対角行列  $S$  と可換であることから分かる。また、 $X(h)$  は旗多様体の  $T$ -固定点集合  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)^T$  を含む ([4, Proposition 3]) ので、 $X(h)$  の  $T$ -固定点集合  $X(h)^T$  について次を得る：

$$X(h)^T = \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)^T \cong \mathfrak{S}_n$$

ここで、旗多様体の  $T$ -固定点集合  $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)^T$  は、 $n$  次対称群  $\mathfrak{S}_n$  の元  $w$  を用いた以下の旗全体からなるため、 $\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)^T \cong \mathfrak{S}_n$  と同一視できる。

$$\text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{w(1)}\} \subset \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{w(1)}, e_{w(2)}\} \subset \cdots \subset \text{span}_{\mathbb{C}}\{e_{w(1)}, \dots, e_{w(n)}\} = \mathbb{C}^n$$

ここで、 $\{e_1, \dots, e_n\}$  は  $\mathbb{C}^n$  の標準基底を表す。

定理 2.4 (3) より、包含写像  $X(h)^T \subset \mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)$  が導く  $T$ -同変コホモロジー環の間の制限写像

$$H_T^*(X(h)) \rightarrow H_T^*(X(h)^T) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$$

は単射である。ここで、 $H_T^*(pt) = \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  と同一視している。すなわち、 $T$ -同変コホモロジー環  $H_T^*(X(h))$  は  $\bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  の部分環とすることができるため、以下では

$$(3.1) \quad H_T^*(X(h)) \subset \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$$

と思うことにする。次の命題は (3.1) のもと  $H_T^*(X(h))$  の記述を与えている。

**命題 3.1.** ([10, Proposition 4.7], [7, Theorem 3.1]) (3.1) のもと、 $H_T^*(X(h))$  は以下の集合と一致する：

$$(3.2) \quad \left\{ \alpha \in \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n] \mid \begin{array}{l} \alpha(w) - \alpha(w') \text{ is divisible by } t_{w(i)} - t_{w(j)} \\ \text{if there exist } 1 \leq j < i \leq n \text{ satisfying} \\ w' = w(j \ i) \text{ and } i \leq h(j) \end{array} \right\}$$

ここで  $\alpha(w)$  は  $\alpha$  の  $w$ -成分を表し、 $(j \ i)$  は  $j$  と  $i$  の互換を表す。

集合 (3.2) は GKM グラフと呼ばれる辺に多項式をラベルしたグラフにより記述することができる。その頂点集合  $\mathcal{V}$  と辺集合  $\mathcal{E}$  は

$$\mathcal{V} := \mathfrak{S}_n,$$

$$\mathcal{E} := \{(w, w') \in \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \mid w' = w(j \ i) \text{ and } j < i \leq h(j) \text{ for some } j, i\}.$$

で与えられ、 $w' = w(j \ i)$  and  $j < i \leq h(j)$  であるような辺  $(w, w')$  に対し、(符号を除いて) 多項式  $t_{w(i)} - t_{w(j)}$  をラベルする。このラベルされたグラフを  $X(h)$  の GKM グラフと呼び、 $\Gamma(h)$  により表記することにする。GKM グラフ  $\Gamma(h)$  の言葉を用いると、集合 (3.2) は次の条件を満たす多項式の集まり  $(\alpha(w))_{w \in \mathfrak{S}_n}$  を意味する： $w$  と  $w'$  が  $\Gamma(h)$  の辺で結ばれていて、多項式  $t_{w(i)} - t_{w(j)}$  がラベルされているとすると、 $w$  成分と  $w'$  成分の多項式の差  $\alpha(w) - \alpha(w')$  はそのラベル  $t_{w(i)} - t_{w(j)}$  で割れないといけない。

例 3.2.  $n = 3, h = (2, 3, 3), h' = (3, 3, 3)$  とする。各頂点を *one-line notation* を用いて書くことにすると、 $X(h), X(h')$  の GKM グラフ  $\Gamma(h), \Gamma(h')$  は以下の Figure 3 におけるグラフである：

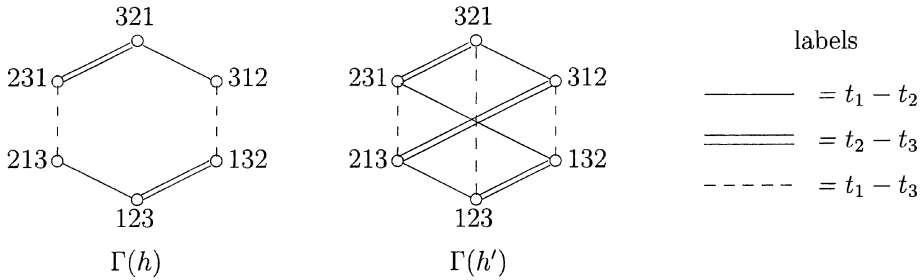


FIGURE 3.  $\Gamma(h)$  と  $\Gamma(h')$  の GKM グラフ

例えば、以下の Figure 4 における多項式の集まりは  $H_T^*(X(h))$  の元であるが、 $H_T^*(X(h'))$  の元ではない。

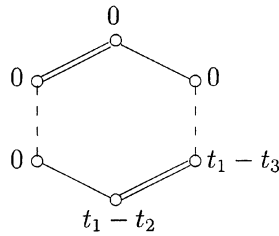


FIGURE 4.  $H_T^*(X(h))$  の元

注意 3.3.  $h, h'$  をヘッセンバーグ関数で  $h(j) \leq h'(j) (j = 1, 2, \dots, n)$  を満たすものとする。ヘッセンバーグ関数を箱の集まりと思うと、これは  $h$  が  $h'$  に含まれることを言っている。このとき命題 3.1 より、

$$H_T^*(X(h')) \subset H_T^*(X(h))$$

が分かる。特に、任意のヘッセンバーグ関数  $h$  に対して、

$$H_T^*(\mathcal{Fl}(\mathbb{C}^n)) \subset H_T^*(X(h))$$

である。

## 4. 主結果

$1 \leq k \leq n$  に対して、 $x_k = (x_k(w))_{w \in \mathfrak{S}_n} \in \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  を

$$x_k(w) := t_{w(k)}$$

により定義する。このとき、命題 3.1 より

$$x_k \in H_T^2(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n))$$

が分かる。特に、 $x_k, t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) は  $\mathbb{Z}$ -代数として  $H_T^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n))$  を生成し、 $X_k$  を  $x_k$  に、 $t_k$  を  $t_k$  に送ることで次の環同型が成立：

$$H_T^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, t_1, \dots, t_n] / (e_i(X_1, \dots, X_n) - e_i(t_1, \dots, t_n) \mid 1 \leq i \leq n)$$

ここで、 $e_i(X_1, \dots, X_n)$  (resp.  $e_i(t_1, \dots, t_n)$ ) は変数を  $X_1, \dots, X_n$  (resp.  $t_1, \dots, t_n$ ) とする  $i$  次の基本対称式を表す。特に、 $t_k = 0$  ( $1 \leq k \leq n$ ) とすることで環同型：

$$(4.1) \quad H^*(\mathcal{F}\ell(\mathbb{C}^n)) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n] / (e_i(X_1, \dots, X_n) \mid 1 \leq i \leq n).$$

を得る。

ヘッセンバーグ関数  $h$  に対して、 $y_k = (y_k(w))_{w \in \mathfrak{S}_n} \in \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]$  を

$$y_k(w) := \begin{cases} \prod_{\ell=2}^{h(1)} (t_k - t_{w(\ell)}) & \text{if } w(1) = k \\ 0 & \text{if } w(1) \neq k \end{cases}$$

により定義する<sup>4</sup>。ここで、 $h(1) = 1$  のときは  $\prod_{\ell=2}^{h(1)} (t_k - t_{w(\ell)}) = 1$  と約束する。このとき、命題 3.1 より

$$y_k \in H_T^{2(h(1)-1)}(X(h))$$

が分かる。

注意 3.3 でみたように、任意のヘッセンバーグ関数  $h$  に対して  $x_k \in H_T^2(X(h))$  であり、写像  $H_T^*(X(h)) \rightarrow H^*(X(h))$  による  $x_k, y_k$  の像を  $\check{x}_k, \check{y}_k$  と書くことにする。

**定理 4.1** ([2]). 上記の記号のもと、ヘッセンバーグ関数  $h$  が  $h = (h(1), n, \dots, n)$  の形のとき  $x_k, y_k, t_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) が  $\mathbb{Z}$ -代数として  $H_T^*(X(h))$  を生成する。特に、 $\check{x}_k, \check{y}_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) が  $\mathbb{Z}$ -代数として  $H^*(X(h))$  を生成する。さらに、 $X_k$  を  $\check{x}_k$  に、 $Y_k$  を  $\check{y}_k$  に送ることで次の環同型が成立：

$$H^*(X(h)) \cong \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n] / I$$

ここで、 $\deg(X_k) = 2$ ,  $\deg(Y_k) = 2(h(1) - 1)$  で、 $I$  は次の 5 つのタイプの元で生成される斉次イデアルである：

- (1)  $Y_k Y_{k'}$  ( $1 \leq k \neq k' \leq n$ )
- (2)  $X_1 Y_k$  ( $1 \leq k \leq n$ )
- (3)  $(\prod_{\ell=h(1)+1}^n (-X_\ell)) Y_k - \prod_{\ell=2}^n (-X_\ell)$  ( $1 \leq k \leq n$ )
- (4)  $\sum_{k=1}^n Y_k - \prod_{\ell=2}^{h(1)} (X_1 - X_\ell)$
- (5)  $e_i(X_1, \dots, X_n)$  ( $1 \leq i \leq n$ )

**注意 4.2.** 定理 4.1 において  $h(1) = n$  とすると、斉次イデアル  $I$  の元 (3) を用いることで、各  $Y_k$  は  $X_1, \dots, X_n$  を用いて表すことができ、表示 (4.1) を得る。

<sup>4</sup> $y_k$  は [1] で導入された  $y_{j,k} \in H_T^{2(h(j)-j)}(X(h))$  の  $j = 1$  としたものである。

## REFERENCES

- [1] H. Abe, M. Harada, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular nilpotent Hessenberg varieties in Lie type  $A$ , arXiv:1512.09072.
- [2] H. Abe, T. Horiguchi, and M. Masuda, The cohomology rings of regular semisimple Hessenberg varieties for  $h = (h(1), n, \dots, n)$ , arXiv:1704.00934.
- [3] P. Brosnan and T. Chow, Unit interval orders and the dot action on the cohomology of regular semisimple Hessenberg varieties, arXiv:1511.00773.
- [4] F. De Mari, C. Procesi, and M. A. Shayman, Hessenberg varieties, *Trans. Amer. Math. Soc.* **332** (1992), no. 2, 529–534.
- [5] Y. Fukukawa, H. Ishida, and M. Masuda, *The cohomology ring of the GKM graph of a flag manifold of classical type*, *Kyoto J. Math.* 54 (2014), 653–677.
- [6] M. Guay-Paquet, A second proof of the ShareshianWachs conjecture, by way of a new Hopf algebra, arXiv:1601.05498.
- [7] M. Harada, A. Henriques, and T. Holm. *Computation of generalized equivariant cohomologies of Kac-Moody flag varieties*, *Advances in Math.* 197 (2005), 198–221.
- [8] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions and Hessenberg varieties, *Configuration spaces, CRM Series, Ed. Norm., Pisa*, **14** (2012), 433–460.
- [9] J. Shareshian and M. L. Wachs, Chromatic quasisymmetric functions, *Adv. Math.* **295** (2016), 497–551.
- [10] J. Tymoczko, Permutation actions on equivariant cohomology of flag varieties, *Contemp. Math.* **460** (2008), 365–384.