数理解析研究所講究録
第2061巻 2018年 56-60

原田予想 II とそのブロック細分

Harada conjecture II and its block refinement

東京医科歯科大学教養部　清田正夫

Tokyo Medical and Dental University, College of Liberal Arts and Sciences
Masao KIYOTA

1 序文

G を有限群とし、G の既約指標全体を $\mathrm{Irr}(G)$ 、共役類全体を $\mathrm{Cl}(G)$ で表す。$\mathrm{Irr}(G)=\{\chi_1,\chi_2,\cdots,\chi_k\}$ 、$\mathrm{Cl}(G)=\{K_1,K_2,\cdots,K_k\}$ とおく。ここで $k=k(G)$ は G の類数を表す。標題の原田予想 II とはオハイオ州立大学の原田耕一郎先生による次の予想のことである。([H] 参照。)

(H)　$h(G)=\dfrac{|K_1||K_2|\cdots|K_k|}{\chi_1(1)\chi_2(1)\cdots\chi_k(1)}$ とおくとき、$h(G)$ は整数か?

(例 1)　$G=A$: アーベル群の時、$h(A)=\dfrac{1\cdot 1\cdots 1}{1\cdot 1\cdots 1}=1.$

(例 2)　$G=S_3$: 3 次対称群の時、$h(S_3)=\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 1\cdot 2}=3.$

(例 3)　$G=A_5$: 5 次交代群の時、$h(A_5)=\dfrac{1\cdot 12\cdot 12\cdot 15\cdot 20}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=240.$

熊本大学の千吉良直紀氏により、ATLAS に出ているすべての単純群について (H) が成立することが確かめられている。さらに氏は ATLAS 単純群の極大部分群についても、一部の位数の大きな群を除き、同様の確認を行っている。実例を見ると任意の有限群について (H) が成立しそうだが、今のところ、べき零群の場合ですら(すくなくとも私には)証明できていない。本稿では予想 (H) の細分化を通じて、ある種の有限群について (H) が成り立つことを示す。(以下の定理 2 を参照。)

2 ブロック細分

以下、序文の記号をそのまま用いる。 標数 $p>0$ の代数的閉体 F 上の群環 FG の直既約直和因子イデアル B を G の p ブロックと呼ぶ。G の p ブロック全体を $\mathrm{Bl}(G)$ で表す。$\mathrm{Irr}(G)$ の各元 χ は唯一つの $B\in\mathrm{Bl}(G)$ に属している。B に属す $\mathrm{Irr}(G)$ の元全体を $\mathrm{Irr}(B)$ で表し、$k(B)=|\mathrm{Irr}(B)|$ とおく。こうして G の既約指標のブロック分割

$$\mathrm{Irr}(G)=\bigcup_{B\in\mathrm{Bl}(G)}\mathrm{Irr}(B)$$

が得られる。 同様に G の共役類のブロック分割

$$\mathrm{Cl}(G)=\bigcup_{B\in\mathrm{Bl}(G)}\mathrm{Cl}(B)$$

も定義される。（ [F] p240 参照。） ここで、$\mathrm{Cl}(B)$ は 1 意的に定まるとは限らないが、$|\mathrm{Cl}(B)|=k(B)$ は成立する。さて、原田予想のブロック細分として次の予想を立てる。

(HB) $\qquad h(G,B)=\dfrac{\prod_{K\in\mathrm{Cl}(B)}|K|}{\prod_{\chi\in\mathrm{Irr}(B)}\chi(1)}$ とおくとき、$h(G,B)$ は p 局所整数か？

$h(G)=\prod_{B\in\mathrm{Bl}(G)}h(G,B)$ なので、任意の素数 p、任意の p ブロック $B\in\mathrm{Bl}(G)$ について (HB) が成立すれば、(H) が成立する。

次に (HB) をブロックの不変数の間の不等式に言い換える。$B\in\mathrm{Bl}(G)$ をひとつ取り固定する。D を B の不足群とし、$|D|=p^d$ とおく。さらに、$|G|_p=p^a$ とおく。必要ならば番号をつけかえて、$\mathrm{Irr}(B)=\{\chi_1,\cdots,\chi_{k(B)}\}$ 、$\mathrm{Cl}(B)=\{K_1,\cdots,K_{k(B)}\}$ とおく。$\chi_i(1)_p=p^{a-d+h_i}$ をみたす整数 h_i を χ_i の高さと呼ぶ。$h_i\geq 0$ であることが知られている。代表元 $x_i\in K_i$ をひとつ選び、中心化群 $C_G(x_i)$ のシロー p 部分群（のひとつ）を Q_i とし、$|Q_i|=p^{d_i}$ とおく。$\{Q_i|\,i=1,\cdots,k(B)\}$ を B の下位不足群と呼ぶ。これらは B により G 共役を除き 1 意的に定まる。$Q_i\leq_G D$ かつ、ある i_0 について $Q_{i_0}=_G D$ となることが知られている。これらの記号のもとで、(HB) は次の (HB)' に言い換えることができる。

(HB)' $\qquad$ 不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k(B)}(d-d_i)\geq\sum_{i=1}^{k(B)}h_i$ は成立するか？

さてここで、Brauer による有名な「高さ 0 予想」を思い出そう。

(BHZC) $\qquad D$ がアーベル群 $\Longleftrightarrow \forall i\ h_i = 0$

"$\Longrightarrow$" については、2013 年に Kessar と Malle が単純群の分類定理を用いて証明した。
"$\Longleftarrow$ " については、今でも未解決のようである。

$\forall i\ h_i = 0$ のときは、(HB)' の不等式は自明に成り立つので、Kessar と Malle の結果から次の命題と定理が得られる。

命題 1 $\quad D$ がアーベル群ならば、(HB) が成立する。

定理 2 $\quad G$ のすべてのシロー部分群がアーベル群ならば、(H) が成立する。

3 モジュラー版

原田予想の p モジュラー版として次の問題が考えられる。$K_1, \cdots, K_l$ を G の p 正則共役類全体とし、$\varphi_1, \cdots, \varphi_l$ を G の既約 Brauer 指標全体とする。

(HM) $\qquad hm(G) = \dfrac{|K_1| \cdots |K_l|}{\varphi_1(1) \cdots \varphi_l(1)}$ とおくとき、$hm(G)$ は p 局所整数か？

(HM) のブロック細分 (HBM) も同様に考えられるが、これらについて次の命題が得られている。

命題 3 $\quad G$ が p 可解群のとき、(HM) および (HBM) は成立する。

(H) と (HM) との間に論理的関係がないことに注意する。例えば、G が p 群のとき (HM) は自明に成り立つが、一方 (H) は p 群の場合でも未解決である。

4 千吉良氏による注意

原田予想 (H) の強化版として、千吉良直紀氏は次の問題を提起した。

(HC) $h'(G) = \dfrac{h(G)}{|G'|}$ は整数か？ ここで、G' は G の交換子群を表す。

（例） $h'(S_3) = \dfrac{h(S_3)}{|S_3{}'|} = \dfrac{3}{3} = 1$、 $h'(A_5) = \dfrac{h(A_5)}{|A_5{}'|} = \dfrac{240}{60} = 4$

(HC) のブロック細分も考えられる。

(HCB) $\dfrac{h(G,B)}{|D_0|}$ は p 局所整数か？ ここで、D_0 は B の焦点部分群を表す。

D_0 は B 部分対を用いて定義される D の部分群であるが、詳細は省く。主ブロック B_0 の不足群 P は群 G のシロー p 部分群であり、B_0 の焦点部分群 P_0 は群論の焦点部分群 P^* と一致する。焦点部分群定理 $P^* = P \cap G'$ から $|P_0| = |G'|_p$ が導かれる。したがって、任意の素数 p、任意の p ブロックについて (HCB) が成立すれば、(HC) が成立する。

5 最後に

本稿を終わるにあたって、原田予想 (H) に関して、私が最も関心を持っている問題をいくつか述べる。

(1) 群 G がべき零群のとき、(H) は成立するのか？

(2) G が正規部分群 N を持つとき、 $h(G)$ と $h(N)$ の関係は？
また、$h(G)$ と $h(G/N)$ の関係は？

(3) 定理 2 をブロック理論を使わずに証明することは可能か？

(4) 対称群と交代群について (H) は成り立つか？

（注） ごく最近、埼玉大学の飛田明彦氏により、対称群と交代群について (HC) が成り立つことが証明され、(4) は肯定的に解決されている。

参考文献

[H] K.Harada, Conjecture II, 第 27 回有限群論草津セミナー報告集, 45-53
[F] W.Feit, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland, 1982