

遊び心で作った秩序形成の数理モデル

Mathematical Model of Pattern Formation Developed Just for Curiosity

加納 剛史*¹, 大須賀 公一^{2,3}, 川勝 年洋⁴, 石黒 章夫^{1,3}

TAKESHI KANO¹, KOICHI OSUKA^{2,3}, TOSHIHIRO KAWAKATSU⁴, AKIO ISHIGURO^{1,3} †

1. 東北大学電気通信研究所, 2. 大阪大学大学院工学研究科

3. JST CREST, 4. 東北大学大学院理学研究科

1. RESEARCH INSTITUTE OF ELECTRICAL COMMUNICATION, TOHOKU UNIVERSITY

2. DEPARTMENT OF MECHANICAL ENGINEERING, OSAKA UNIVERSITY

3. JAPAN SCIENCE AND TECHNOLOGY AGENCY, CREST

4. DEPARTMENT OF PHYSICS, TOHOKU UNIVERSITY

Abstract

We proposed a simple mathematical model that exhibits various non-trivial patterns, inspired by friendship formation in human society. We developed this model just for curiosity and do not have any background of the study. However, we believe that this model could help understand the essential mechanism for the emergence of dynamical order in various systems, as well as be used in the design of artificial systems such as swarm robotic systems.

1 はじめに

本研究では、遊び心で作った秩序形成の数理モデルを紹介する。このモデルは、人間社会における交友関係の形成・崩壊過程に着想を得て作られた。ただの思いつきで作ったモデルなので、研究背景も何もないのだが、理屈を抜きにして面白い（と筆者らは思う）ので紹介する。

2 モデルおよびシミュレーション結果

実空間内の二次元平面上に N 個の素子が存在している。各素子は、人間社会における一個人だと思えば良い。 i 番目の素子の位置 \mathbf{r}_i の時間発展を以下のように記述する：

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_{j \neq i} (k_{ij} R_{ij}^{-1} - R_{ij}^{-2}) \mathbf{e}_{ij} \quad (1)$$

ただし、 R_{ij} は i と j の距離、 \mathbf{e}_{ij} は i から j の方向への単位ベクトルである。 k_{ij} は i が j をどれだけ気に入っているかを示すパラメータであり、右辺第一項は、 k_{ij} が正の時は j 番目の素子に向かう効果、負の時

*tkano@riec.tohoku.ac.jp

†広島大学大学院理学研究科の小林亮教授、パリ第7大学の関本謙教授、名古屋大学情報科学研究科の杉山雄規教授からは貴重な助言を頂いた。本研究の一部は、JST CREST からの援助によって行われた。ここに感謝の意を表します。

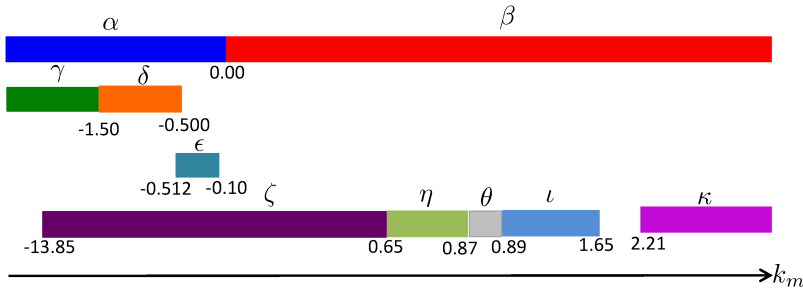


図 1: Simulation result when $N = 5$. The parameter region where each pattern is observed is indicated by colour bars. Numbers denote the critical values of k_m for the transition between different patterns. This system is multi-stable in parameter regions where several colour bars are overlapped. For example, when $-0.512 < k_m < -0.500$, patterns α , δ , ϵ , and ζ are multi-stable.

は j 番目の素子から遠ざかる効果を表す。右辺第二項は排除体積効果を表し、これは他人が自分に接近し過ぎると居心地が悪いと感じる心理に由来している。

上記モデルにおいて、 k_{ij} の値を変えてシミュレーションしてみたところ、多種多様なパターンが自己組織的に発現した。動画は <http://www.riec.tohoku.ac.jp/~tkano/movie.mp4> にアップロードしている。是非ご覧いただきたい (pdf ファイルから上記リンクをコピーしてもダメなようである。上記 URL はご自身で入力いただきたい)。

本モデルで重要な点は、一般に相互作用が非対称 ($k_{ij} \neq k_{ji}$) である点である。この非対称性が、多様なパターンの発現の鍵となっていると予想される。

3 少数素子の場合におけるシミュレーション結果および理論解析

わずか一本の単純な式から多種多様なパターンが発現するのは、きわめて非自明で興味深い。そこで、これらのパターンの発現メカニズムを探るため、少数素子 ($N = 5$) の場合についてシミュレーションと理論解析を行った。 k_{ij} の値は以下のように設定した。

$$k_{ij} = \begin{cases} k_p + k_m & (i = 1, 2 \leq j \leq 5) \\ k_p - k_m & (2 \leq i \leq 5, j = 1) \\ k_a & (2 \leq i \leq 5, 2 \leq j \leq 5) \end{cases}$$

k_m が相互作用の非対称度合いを表していることに注意されたい。粒子の初期位置は乱数で決定し、 $k_a = 0.7$ 、 $k_p = 0.9$ とし、 k_m の値を変えてシミュレーションを行った。

3.1 シミュレーション結果

シミュレーション結果を Fig. 1, 2 に示す。相互作用の非対称性を示すパラメータ k_m の値によって、10 通りのパターン (パターン α - κ) が発現していることがわかる。各パターンが発現するパラメータ領域は同図に示した通りであり、どのパターンが発現するかは素子の初期配置にも依存する。なお、同図において、1 番目の素子は白、2-5 番目の素子は黒で表示している (以下それぞれ白素子、黒素子と呼ぶことにする)。

以下、各パターンについて簡単に説明する：

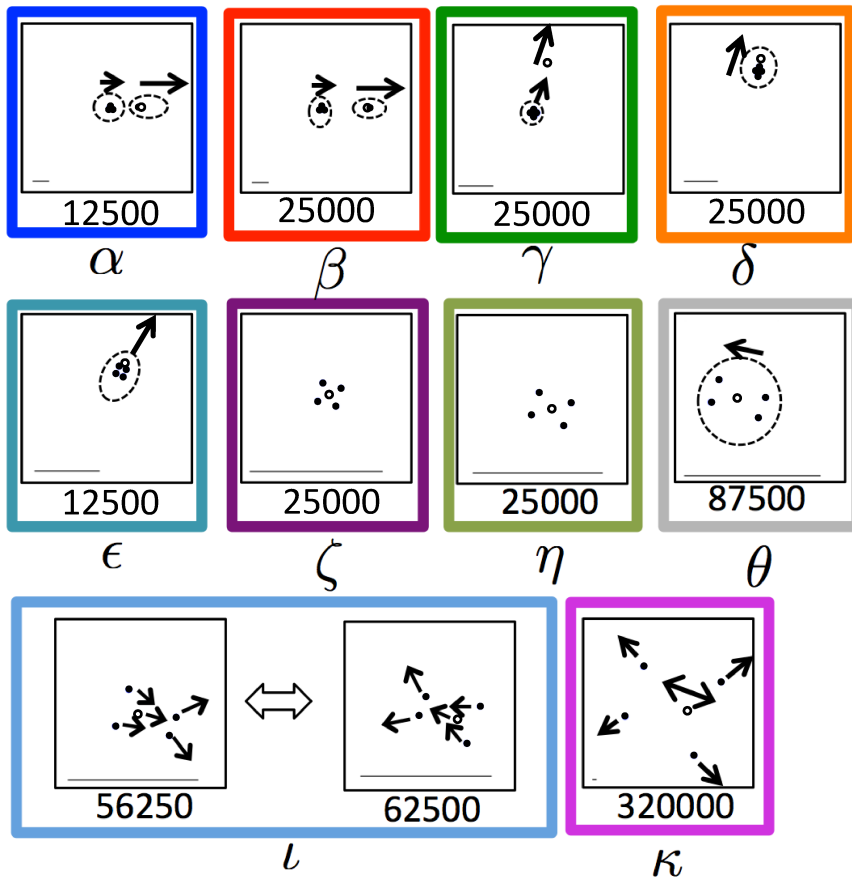


Fig. 2: Snapshots for each pattern. The motion of particles is indicated by arrows. Particles surrounded by a dotted circle move without changing their relative position. Numbers at the bottom of the snapshots denote the time step. The length of the bars at the bottom of the snapshots denotes the scale size, which corresponds to a non-dimensional length of 10.

- α 1個の黒素子が白素子を追いかけ、残り3個の黒素子と分離する。
- β 1個の白素子が黒素子を追いかけ、残り3個の黒素子と分離する。
- γ 4個の黒素子がクラスタを形成し、白素子は同クラスタから遠ざかる。
- δ 4個の黒素子が白素子を追いかける。黒素子がなす四角形の対角線上に白素子が位置する。
- ϵ 4個の黒素子が白素子を追いかける。黒素子は台形をなし、台形を2等分する直線上に白素子が位置する。
- ζ 黒素子が正方形をなし、その中心に白素子が位置する。
- η 黒素子が長方形をなし、その中心に白素子が位置する。
- θ 黒素子が台形をなしてその内部に白素子が位置し、素子間の相対位置を変えずに並進する。
- ι 黒素子がなす台形の内部を白素子が周期的に往復する。
- κ 黒素子がなす四角形の内部を白素子が往復するが、黒素子は徐々に白素子から遠ざかる。

3.2 理論解析

本モデルの背後に潜む力学構造を明らかにするため、各パターンについて解析を行い、その発現メカニズムについて考察した。ここではパターン $\zeta, \eta, \theta, \iota$ 間の遷移に焦点を絞って説明する。

素子がFig. 3に示す配置にある状態を考える。 x - y 軸および $d_1, d_2, d_3, d_4, \phi, \psi$ は同図のように定義する。さらに、 $d_{xp} \equiv d_1 + d_2, d_{xm} \equiv d_1 - d_2, d_{yp} \equiv d_3 + d_4, d_{ym} \equiv d_3 - d_4$ を定義し、それらの時間発展式を求めると以下ようになる：

$$\dot{d}_{xp} = \dot{d}_1 + \dot{d}_2 = \dot{x}_2 - \dot{x}_5, \quad (2)$$

$$\dot{d}_{xm} = \dot{d}_1 - \dot{d}_2 = \dot{x}_2 - 2\dot{x}_1 + \dot{x}_5, \quad (3)$$

$$\dot{d}_{yp} = \dot{d}_3 + \dot{d}_4 = \dot{y}_2 + \dot{y}_5, \quad (4)$$

$$\dot{d}_{ym} = \dot{d}_3 - \dot{d}_4 = \dot{y}_2 - \dot{y}_5. \quad (5)$$

$$\dot{x}_1 = \sum_{j \neq 1} f(k_p + k_m, R_{1j}) \cos \Theta_{1j}, \quad (6)$$

$$\dot{y}_1 = \sum_{j \neq 1} (k_p + k_m, R_{1j}) \sin \Theta_{1j}, \quad (7)$$

$$\dot{x}_i = f(k_p - k_m, R_{i1}) \cos(\Theta_{i1}) + \sum_{j \neq 1, j \neq i} f(k_a, R_{ij}) \cos \Theta_{ij}, \quad (i \neq 1) \quad (8)$$

$$\dot{y}_i = f(k_p - k_m, R_{i1}) \sin(\Theta_{i1}) + \sum_{j \neq 1, j \neq i} f(k_a, R_{ij}) \sin \Theta_{ij}. \quad (i \neq 1) \quad (9)$$

ただし、 $f(k, X) = kX^{-1} - X^{-2}$ 、 Θ_{ij} は e_{ij} の偏角である。Fig. 3より、 R_{ij}, Θ_{ij} はすべて $d_{xp}, d_{xm}, d_{yp}, d_{ym}$ の4変数を用いて表すことができるため、(6)-(9)式を(2)-(5)式に代入することで、4変数の閉じた微分方程式系を得る。そこで、得られた微分方程式において $\dot{d}_{xp} = \dot{d}_{xm} = \dot{d}_{yp} = \dot{d}_{ym} = 0$ とした定常解を数値的に求め、ヤコビ行列の固有値を求めることで、その解の安定性を求めることができる。

Fig. 4, 5に、 k_m を変えた時の ϕ, ψ の値を示している。 k_m の値が増加するにつれ、まずパターン ζ ($\phi = \pi/2, \psi = \pi/4$)が不安定化し、ピッチフォーク分岐によってパターン η ($\phi = \pi/2, \psi \neq \pi/4$)へと遷移する。さらに k_m が増加すると、パターン η が不安定化し、ピッチフォーク分岐によってパターン θ ($\phi \neq \pi/2, \psi \neq \pi/4$)へと遷移する。そして、さらに k_m が増加するとパターン θ の解も不安定化する。

上記線形安定性解析では、パターン θ の解が不安定化した後、どのような振る舞いに収束するかを理解することはできない。そこで、ベクトル場を図示し、非線形領域における挙動の理解を試みる。具体的には、

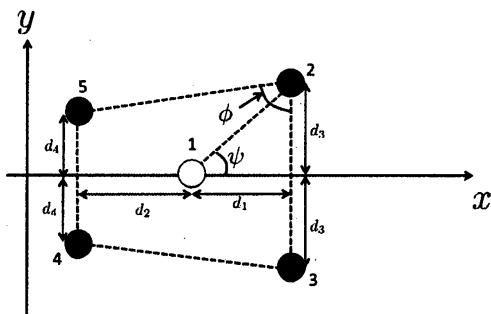


Fig 3: Configuration of particles considered. The definitions of particle numbers, x - y coordinate, d_1 , d_2 , d_3 , d_4 , ϕ , and ψ are shown.

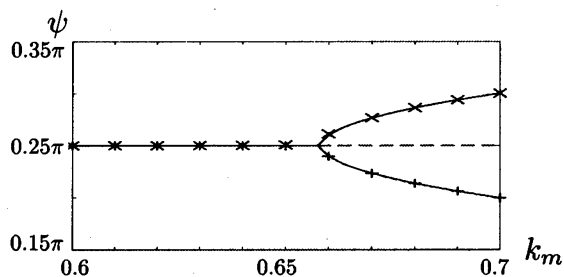


Fig 4: Bifurcation structure for the transition between patterns ζ and η . Horizontal and vertical axes denote k_m and ψ . Solid and dashed lines denote stable and unstable solutions. Cross symbols denote the simulation results obtained from different initial conditions.

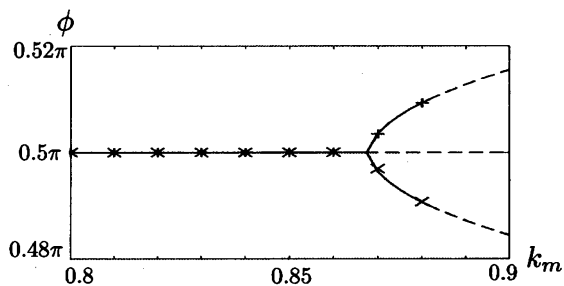


Fig 5: Bifurcation structure for the transition between patterns η and θ . Horizontal and vertical axes denote k_m and ϕ . Solid and dashed lines denote stable and unstable solutions. Cross symbols denote the simulation results obtained from different initial conditions.

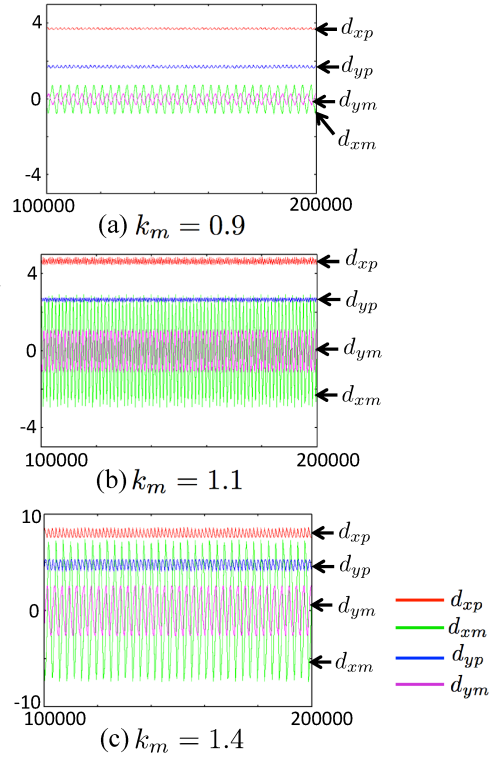


图 6: Time evolution of d_{xp} , d_{xm} , d_{yp} , and d_{yt} for pattern t : (a) $k_m = 0.9$, (b) $k_m = 1.1$, and (c) $k_m = 1.4$.

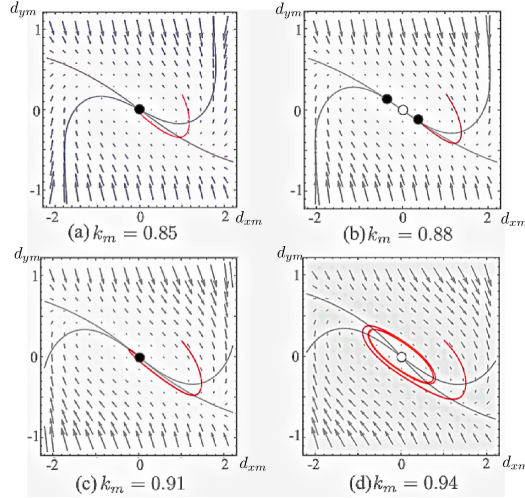


図 7: Vector fields of Eqs. (10)–(16): (a) $k_m = 0.85$, (b) $k_m = 0.88$, (c) $k_m = 0.91$, and (d) $k_m = 0.94$. Black solid curves denote null clines. Stable and unstable solutions are denoted by open and filled circles. Red curves denote the trajectory obtained from Eqs. (10)–(16) with the initial condition $d_{xm} = 1.0$ and $d_{ym} = 0.2$.

4変数の微分方程式を2変数に縮約してベクトル場を可視化することで、 k_m が増加するとリミットサイクルに収束する（パターン*l*）ことを示す。

パターン*l*では、黒素子がなす台形の内部を白素子が周期的に往復する状態に落ち着くため、落ち着いた後の挙動は(2)–(9)式に示す4変数の微分方程式により記述可能である。Fig. 6は、パターン*l*における d_{xp} , d_{xm} , d_{yp} , d_{ym} の値の時間発展をシミュレーションにより求めたものである。同図から、 d_{xp} , d_{yp} の振幅は d_{xm} と d_{ym} のそれよりも遙かに小さいことがわかる。このことは、 d_{xp} , d_{xm} , d_{yp} , d_{ym} の4次元で構成される相空間のうち、 d_{xm} - d_{ym} 平面に平行な平面内ではば状態が遷移していることを示している。

そこで、(2)–(9)式を2変数に縮約する。具体的には、 d_{xp} , d_{yp} の時間平均値 \bar{d}_{xp} , \bar{d}_{yp} をシミュレーションにより求め、 d_{xp} , d_{yp} を \bar{d}_{xp} , \bar{d}_{yp} に置き換えて(6)–(9)式に代入、さらにその結果を(3), (5)式に代入することで、次式を得る：

$$\begin{aligned} \dot{d}_{xm} = & -f(k_p - k_m, R_{12}) \frac{\bar{d}_{xp} + d_{xm}}{2R_{12}} + f(k_p - k_m, R_{15}) \frac{\bar{d}_{xp} - d_{xm}}{2R_{15}} \\ & - 4f(k_p + k_m, R_{12}) \frac{\bar{d}_{xp} + d_{xm}}{2R_{12}} + 4f(k_p + k_m, R_{15}) \frac{\bar{d}_{xp} - d_{xm}}{2R_{15}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \dot{d}_{ym} = & -f(k_p - k_m, R_{12}) \frac{\bar{d}_{yp} + d_{ym}}{2R_{12}} + f(k_p - k_m, R_{15}) \frac{\bar{d}_{yp} - d_{ym}}{2R_{15}} \\ & - 2f(k_a, R_{25}) \frac{d_{ym}}{R_{25}} - f(k_a, R_{23}) + f(k_a, R_{45}) \end{aligned} \quad (11)$$

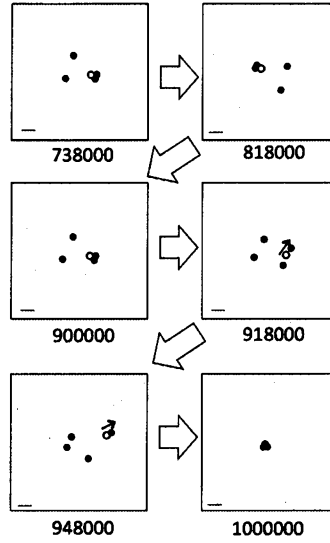


図 8: Snapshots when $k_m = 1.70$. Symmetry of configuration as shown in Fig. 3 is broken and white particle chases one of the four black particles. Numbers denote time step. The length of bars at the bottom of snapshots denotes the scale size, which corresponds to non-dimensional length of 10.

$$R_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{d}_{xp} + d_{xm})^2 + (\bar{d}_{yp} + d_{ym})^2} \quad (12)$$

$$R_{15} = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{d}_{xp} - d_{xm})^2 + (\bar{d}_{yp} - d_{ym})^2} \quad (13)$$

$$R_{25} = \sqrt{\bar{d}_{xp}^2 + \bar{d}_{yp}^2} \quad (14)$$

$$R_{23} = \bar{d}_{yp} + d_{ym} \quad (15)$$

$$R_{45} = \bar{d}_{yp} - d_{ym} \quad (16)$$

Fig. 7 は, $d_{xm}-d_{ym}$ 平面に (10)-(16) 式から得られたベクトル場とヌルクラインを図示したものである. $k_m = 0.85$ の時は, 2本のヌルクラインが原点のみで交わり, 原点が安定点となる. これはパターン η が安定であることを示している. $k_m = 0.88$ では, 2本のヌルクラインが3箇所交わり, そのうち原点以外の2点が安定点となる. これはパターン θ が安定であることに対応する. $k_m = 0.91$ では, 再び2本のヌルクラインが原点のみで交わり, 原点が安定点となる. すなわち, パターン η が安定となる. $k_m = 0.94$ では, 原点が不安定点となり, リミットサイクルに収束する. これはパターン ι に対応している. この様子は, パターン $\theta-\iota$ 間にパターン η が安定になる領域が存在した ($k_m = 0.91$) 点を除き, パターン $\eta-\theta-\iota$ 間の遷移を概ね良く説明している. $k_m = 0.91$ においてパターン $\theta-\iota$ 間にパターン η が安定になる領域が存在したのは, d_{xp} , d_{yp} を \bar{d}_{xp} , \bar{d}_{yp} に置き換える近似を施したために, (10)-(16) 式と (2)-(9) 式の間に相違が生じたものと考えられる.

(1) 式において k_m の値をさらに大きくしていくと, パターン ι は $k_m = 1.65$ で不安定化を起こす. $k_m = 1.70$ の時の振る舞いを Fig. 8 に示す. シミュレーション開始後しばらくは黒素子がなす台形の内部を白素子が振動するが, 時間の経過とともに Fig. 3 に示す y 軸対称な配置が崩れ, 最終的に白素子は1つの黒素子だ

けを追いかける (パターン β)。これは、Fig. 3 における y 軸方向への擾乱に対する安定性が失われていることを示唆している。

4 まとめ

筆者が遊び心で作った秩序形成の数理モデルを紹介した。本モデルが実際の交友関係の形成過程の説明になっているのか、またそれ以外の何らかの現象の説明になっているのかは、依然として不明瞭である。しかしながら、これまでに提唱されてきた秩序形成のモデル [1–34] の中で最もシンプルな部類に属する本モデルが、多様かつ非自明なパターンが発現するのは大変興味深い。筆者らは、本モデルが非平衡系における秩序形成のメカニズムを探る上でのプラットフォームとして役立つのではないかと期待している。また、工学分野において、群ロボットなどへの応用も期待できる。

参考文献

- [1] A.V. Ivlev, J. Bartnick, M. Heinen, C.R. Du, V. Nosenko, and H. Löwen: Statistical Mechanics Where Newton's Third Law Is Broken, *Phys. Rev. X* **5**, 011035 (2015)
- [2] Y. Hayakawa: Spatiotemporal Dynamics of Skeins of Wild Geese, *Europhys. Lett.* **89**, 48004 (2010)
- [3] Y. Chen and T. Kolokolnikov: A Minimal Model of Predator-Swarm Interactions, *J. R. Soc. Interface* **11**, 20131208 (2014)
- [4] T. Vicsek, A. Czirók, E. Ben-Jacob, I. Cohen, and O. Shochet: Novel Type of Phase Transition in a System of Self-Driven Particles, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1226–1229 (1995)
- [5] D.J.G. Pearce, A.M. Miller, G. Rowlands, and M.S. Turner: Role of Projection in the Control of Bird Flocks, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **111**, 10422–10426 (2014)
- [6] M. Zheng, Y. Kashimori, O. Hoshino, K. Fujita, and T. Kambara: Behavior Pattern (Innate Action) of Individuals in Fish Schools Generating Collective Evasion from Predation, *J. Theor. Biol.* **235**, 153–157 (2005)
- [7] Y. Yang, V. Marceau, and G. Gompper: Swarm Behavior of Self-propelled Rods and Swimming Flagella, *Phys. Rev. E* **82**, 031904 (2004)
- [8] F. Peruani, A. Deutsch, and M. Bär: Nonequilibrium Clustering of Self-propelled Rods, *Phys. Rev. E* **74**, 030904 (2006)
- [9] R.S. Olson, A. Hintze, F.C. Dyer, D.B. Knoester, and C. Adami: Predator Confusion is Sufficient to Evolve Swarming Behaviour, *J. R. Soc. Interface* **10**, 20130305 (2013)
- [10] G. Grégoire, and H. Chaté: Onset of Collective and Cohesive Motion, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 025702 (2004)
- [11] A. Ramanantoanina, C. Hui, and A. Ouhinoua: Effects of Density-dependent Dispersal Behaviours on the Speed and Spatial Patterns of Range Expansion in Predator–Prey Metapopulations, *Ecol. Model.* **222**, 3524–3530 (2011)
- [12] C.W. Reynolds: Flocks, Herds, and Schools: A Distributed Behavioral Model, *Comput. Graph.* **21**, 25–34 (1987)

- [13] P. Romanczuk, I.D. Couzin, and L. Schimansky-Geier: Collective Motion due to Individual Escape and Pursuit Response, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 010602 (2009)
- [14] C.M. Topaz, and A. Bertozzi: Swarming Patterns in a Two-dimensional Kinematic Model for Biological Groups, *SIAM J. Appl. Math.* **65**, 152–174 (2004)
- [15] E. Cristiani, P. Frasca, and B. Piccoli: Effects of Anisotropic Interactions on the Structure of Animal Groups, *J. Math. Biol.* **62**, 569–588 (2011)
- [16] R. Vabø and L. Nøttestad: An Individual Based Model of Fish School Reactions: Predicting Antipredator Behaviour as Observed in Nature, *Fish. Oceanogr.* **6**, 155–171 (1997)
- [17] S. Motsch and E. Tadmor: A New Model for Self-organized Dynamics and Its Flocking Behavior, *J. Stat. Phys.* **144**, 923–947 (2011)
- [18] J. Touma, A. Shreim, and L.I. Klushin: Self-organization in Two Dimensional Swarms, *Phys. Rev. E* **81**, 066106 (2010)
- [19] H. Levine, W.J. Rappel, and I. Cohen: Self-organization in Systems of Self-propelled Particles, *Phys. Rev. E* **63**, 017101 (2000)
- [20] A. Okubo: Dynamical Aspects of Animal Grouping: Swarms, Schools, Flocks, and Herds, *Adv. Biophys.* **22**, 1–94 (1986)
- [21] B. Szabó, G.J. Szöllösi, B. Gönci, Zs. Jurányi, D. Selmeczi, and T. Vicsek: Phase Transition in the Collective Migration of Tissue Cells: Experiment and Model, *Phys. Rev. E* **74**, 061908 (2008)
- [22] M. Iwasa and D. Tanaka: Dimensionality of Clusters in a Swarm Oscillator Model, *Phys. Rev. E* **81**, 066214 (2010)
- [23] D. Tanaka: General Chemotactic Model of Oscillators, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 134103 (2007)
- [24] H. Sayama: Swarm Chemistry, *Artificial Life* **15**, 105–114 (2009)
- [25] M. Bando, K. Hasebe, K. Nakanishi, A. Nakayama, A. Shibata, and Y. Sugiyama: Dynamical Model of Traffic Congestion and Numerical Simulation, *Phys. Rev. E* **51**, 1035–1042 (1995)
- [26] T. Ishida and Y. Sugiyama: Why Does Traffic Jam Acts Universally?, *Traffic Granular Flow '13*. Springer, 541–547 (2013)
- [27] M. Campanella, S.P. Hoogendoorn, and W. Daamen: Effects of Heterogeneity on Self-Organized Pedestrian Flows, *Transport. Res. Rec.: J. Transport. Res. Board* **2124**, 148–156 (2009)
- [28] S. Hoogendoorn and P.H.L. Bovy: Simulation of Pedestrian Flows by Optimal Control and Differential Games, *Optim. Control Appl. Methods* **24**, 153–172 (2003)
- [29] M.C. González, P.G. Lind, and H.J. Herrman: System of Mobile Agents to Model Social Networks, *Phys. Rev. Lett.* **96**, 088702 (2006)
- [30] M. Brambilla, E. Ferrante, M. Birattari, and M. Dorigo: Swarm Robotics: A Review from the Swarm Engineering Perspective, *Swarm Intell.* **7**, 1–41 (2013)
- [31] R. Vidal, O. Shakernia, H.J. Kim, D.H. Shim, and S. Sastry: Probabilistic Pursuit–Evasion Games: Theory, Implementation, and Experimental Evaluation, *IEEE Trans. Rob. Auto.* **18**, 662–669 (2002)
- [32] A. Kamimura and T. Ohira : Group Chase and Escape, *New J. Phys.* **12**, 053013 (2010)

- [33] N. Bellomo and J. Soler: On the Mathematical Theory of the Dynamics of Swarms Viewed as Complex Systems, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **22**, Suppl. 1140006 (2012)
- [34] M. Gardner: Mathematical Games – The Fantastic Combinations of John Conway’s New Solitaire Game “Life”, *Sci. Am.* **223**, 120–123 (1970)