数理解析研究所講究録
第2064巻 2018年 69-79

粗空間に対する分解複雑性と性質 A (Decomposition complexity and property A for coarse spaces)

愛媛大学 理工学研究科 山内貴光
Takamitsu Yamauchi
Graduate School of Science and Engineering, Ehime University

粗幾何学における距離空間の基本的性質として, 漸近次元と性質 A が挙げられる. 漸近次元は, 被覆次元の粗幾何学的類似として Gromov [6] によって定義された. 一方, 性質 A は, 粗 Baum-Connes 予想が成立するため (に Hilbert 空間へ粗埋め込み可能であるため) の十分条件として, Yu [19] によって導入された.

漸近次元と性質 A に関連する性質として, 漸近的性質 C や有限分解複雑性, 直線的有限分解複雑性が知られている. 本稿では, これらの性質の粗空間への拡張に関する Bell, Moran and Nagórko [1] の研究と, そこで提起された問題に対して得られた結果 ([18]) について解説する.

1. 漸近次元, 性質 A, 漸近的性質 C, 有限分解複雑性

距離空間 (X,d) の部分集合族$\mathcal{U}$が R**-disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ と任意の $x \in U$, $x' \in U'$ に対して $d(x,x') \geq R$ であるときをいう. 点 $x \in X$ と $S > 0$ に対して

$$B(x,S) = \{y \in X : d(x,y) < S\}$$

と表す. X の部分集合族$\mathcal{U}$ が条件

$$\exists S > 0\, \forall U \in \mathcal{U}\, \exists x \in X\, (U \subset B(x,S))$$

を満たすとき, $\mathcal{U}$ は**一様有界**であるという.

定義 1.1 ([6, 1.E]). 整数 n に対して, 距離空間 (X,d) の**漸近次元 (asymptotic dimension)** が n 以下である (asdim $X \leq n$) とは, 任意の $R > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在するときをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R-disjoint である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

asdim $X \leq n$ かつ asdim $X \not\leq n-1$ のとき asdim $X = n$ と定める. ある整数 n が存在して asdim $X \leq n$ であるとき, X の漸近次元は有限であるという.

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で, 正の整数全体の集合を $\mathbb{N}$ で表す. 集合 X に対して $\ell_1(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : \sum_{x\in X} |f(x)| < \infty\}$ と表す. ただし,

$$\sum_{x\in X} |f(x)| = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| : x_1, \ldots, x_n \in X, n \in \mathbb{N}\right\}$$

である. 各 $f \in \ell_1(X)$ に対して,

$$\|f\|_1 = \sum_{x\in X} |f(x)|, \quad \operatorname{supp} f = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$$

と表す.

定義 1.2 ([19], cf. [10]). 距離空間 (X, d) が**性質 A (property A)** を満たすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と $R > 0$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす写像 $a : X \to \ell_1(X); x \mapsto a_x$ が存在するときをいう[1].

(1) 任意の $x \in X$ に対して $\|a_x\|_1 = 1$.
(2) $x, y \in X$, $d(x, y) < R$ ならば $\|a_x - a_y\|_1 < \varepsilon$.
(3) $S > 0$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対して $\operatorname{supp} a_x \subset B(x, S)$.

定理 1.3 ([10, Lemma 4.3]). 漸近次元が有限な距離空間は, 性質 A を満たす.

漸近次元の有限性と性質 A の間には, いくつかの粗幾何学的性質が知られている. Dranishnikov [3] は, 位相次元論における Haver の性質 C の粗幾何学的類似として漸近的性質 C を定義した.

定義 1.4 ([3]). 距離空間 (X, d) が**漸近的性質 C (asymptotic property C)** を満たすとは, 任意の正の数の列 $\{R_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して, $n \in \mathbb{N}$ と次の (1)–(3) を満たす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在するときをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は R_i-disjoint である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

明らかに, 漸近次元が有限な距離空間は, 漸近的性質 C を満たす.

定理 1.5 ([3, Theorem 7.11]). 漸近的性質 C を満たす距離空間は, 性質 A を満たす.

一方, Guentner, Tessera and Yu [7] は, 多様体の位相的剛性定理の証明のため, 距離空間に対して有限分解複雑を導入した.

[1] この条件は Yu [19] による定義と異なるが, 有界幾何 (bounded geometry) をもつ離散距離空間において同値である [10, Lemma 3.5].

定義 1.6 ([7]). 距離空間 (X,d) の 2 つの部分集合族 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ と $R>0$ に対して, $\mathcal{Y}$ が $\mathcal{X}$ を R-**分割する** ($\mathcal{X} \xrightarrow{R} \mathcal{Y}$) とは, 任意の $A \in \mathcal{X}$ に対して, $A = \bigcup(\mathcal{Y}_1 \cup \mathcal{Y}_2)$ を満たす R-disjoint な $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2 \subset \mathcal{Y}$ が存在するときをいう.

距離空間 (X,d) に対して, $\mathcal{Y}_0 = \{X\}$ とおき, プレーヤー A, B による次の分解ゲーム (decomposition game) を考える.

ラウンド i **:** プレーヤー A は ($\mathcal{Y}_{i-1}$ を見て) $R_i > 0$ を出す. プレーヤー B は (R_i を見て) $\mathcal{Y}_{i-1}$ を R_i-分割する X の部分集合族 $\mathcal{Y}_i$ を出す.

$$\{X\} = \mathcal{Y}_0 \xrightarrow{R_1} \mathcal{Y}_1 \xrightarrow{R_2} \mathcal{Y}_2 \xrightarrow{R_3} \cdots \xrightarrow{R_i} \mathcal{Y}_i \xrightarrow{R_{i+1}} \cdots .$$

プレーヤー B が, あるラウンド k で一様有界な $\mathcal{Y}_k$ を出すことができたとき, B の勝利とする. そうでないとき, プレーヤー A の勝利とする.

この分解ゲームにおいてプレーヤー B に必勝法があるとき, X は**有限分解複雑性** (**finite decomposition complexity, FDC**) をもつという.

定理 1.7 ([8, Theorems 4.1]). 漸近次元が有限な距離空間は, FDC をもつ.

定理 1.8 ([8, Theorems 4.6]). FDC をもつ距離空間は, 性質 A を満たす.

よって, 次を得る.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \text{漸近的性質 C} \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{漸近次元有限} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{性質 A} \\
 & \text{FDC} \arrow[ur, Rightarrow] &
\end{tikzcd}$$

Dranishnikov and Zarichnyi [4] は, 漸近的性質 C と FDC の関係を調べるため, FDC を一般化した直線的有限分解複雑を導入した.

定義 1.9 ([4, Definition 2.2]). 距離空間 (X,d) が**直線的有限分解複雑性** (**straight finite decomposition complexity, sFDC**) をもつとは, 任意の正の数の列 $\{R_i\}$ に対して, $n \in \mathbb{N}$ と次の (1), (2) を満たす X の部分集合族の有限列 $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^n$ が存在するときをいう.
(1) $\mathcal{Y}_0 = \{X\}$, $\mathcal{Y}_{i-1} \xrightarrow{R_i} \mathcal{Y}_i \ \forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$.
(2) $\mathcal{Y}_n$ は一様有界.

明らかに, FDC をもつ距離空間は, sFDC をもつ.

定理 1.10 ([4, Proposition 3.2]). 漸近的性質 C を満たす距離空間は, sFDC をもつ.

定理 1.11 ([4, Theorem 3.4], [5, Theorem 4.2]). sFDC をもつ距離空間は, 性質 A を満たす.

従って, 次を得る.

$$\begin{tikzcd}
 & \text{漸近的性質 C} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\
\text{漸近次元有限} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{sFDC} \arrow[r, Rightarrow] & \text{性質 A} \\
 & \text{FDC} \arrow[ur, Rightarrow] & &
\end{tikzcd}$$

図 1.1

注意 1.12. 「漸近次元有限 $\Longrightarrow$ 漸近的性質C」および「漸近次元有限 $\Longrightarrow$ FDC」の逆は, 一般には成り立たない. 例えば, 整数群 $\mathbb{Z}$ の可算直和 $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ は左不変かつ固有な離散距離をもつ (cf. [12, Proposition 1.2.2]). この距離に関する $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{Z}$ の漸近次元は有限でないが ([12, Example 2.6.1]), 漸近的性質 C を満たし ([17, Theorem 2.1]), FDC をもつ ([8, Theorem 5.1.2]). それ以外の矢印について, その逆が成り立つかどうかは分かっていない. 漸近的性質 C と FDC が異なることを示す例も知られていない.

2. 粗空間

Higson, Pedersen and Roe [9] は, C^* 環の K 群の計算を統一的に行うため, 距離のもつ "遠さを測るための尺度" の一般化として, 粗構造 (coarse strucure) を導入した. 本稿では, Roe [13] による定義に従う. 集合 X に対して, 直積集合 $X\times X$ における対角集合 $\{(x,x):x\in X\}$ を Δ_X で表し, $E,F\subset X\times X$ に対して

$$\begin{aligned}E^{-1}&=\{(x,y):(y,x)\in E\},\\ E\circ F&=\{(x,y):\exists z\in X\,((x,z)\in E \text{ and } (z,y)\in F)\}\end{aligned}$$

とする.

定義 2.1 ([13, Definition 2.3]). 集合 X の直積 $X\times X$ の部分集合族 $\mathcal{E}$ が次の (1)–(5) を満たすとき, $\mathcal{E}$ を X の**粗構造** (**coarse structure**) という.

(1) $\Delta_X\in\mathcal{E}$.
(2) $E\in\mathcal{E}$, $F\subset E$ ならば $F\in\mathcal{E}$.
(3) $E\in\mathcal{E}$ ならば $E^{-1}\in\mathcal{E}$.
(4) $E,F\in\mathcal{E}$ ならば $E\circ F\in\mathcal{E}$.
(5) $E,F\in\mathcal{E}$ ならば $E\cup F\in\mathcal{E}$.

集合 X とその粗構造 $\mathcal{E}$ の組 $(X,\mathcal{E})$ を**粗空間** (**coarse space**) という.

粗構造の例としては次がある. 以下, 位相空間は完全正則な Hausdorff 空間であるとする.

例 2.2 ([9], [13, Example 2.5]). 距離空間 (X,d) に対して, $X\times X$ の部分集合族

$$\mathcal{E}_d=\{E\subset X\times X:\sup\{d(x,y):(x,y)\in E\}<\infty\}$$

は X の粗構造である. $\mathcal{E}_d$ を距離 d によって定まる**有界粗構造** (**bounded coarse structure**) という.

例 2.3 ([9], [13, Definition 2.28]). 局所コンパクト空間 X とそのコンパクト化 γX に対して, $X \times X$ の部分集合族

$$\mathcal{E}_{\gamma X} = \{E \subset X \times X : \mathrm{Cl}_{\gamma X \times \gamma X}(E) \setminus X \times X \subset \Delta_{\gamma X}\}$$

は X の粗構造である. ここで, $\mathrm{Cl}_{\gamma X \times \gamma X}(E)$ は積空間 $\gamma X \times \gamma X$ における E の閉包を表す. $\mathcal{E}_{\gamma X}$ をコンパクト化 γX によって定まる**位相的粗構造** (**topological coarse structure**) または**連続制御粗構造** (**continuously controlled coarse structure**) という.

例 2.4 ([16], [13, Example 2.6]). 局所コンパクトな距離空間 (X, d) に対して, 次の条件を満たす $E \subset X \times X$ 全体の集合を $\mathcal{E}_d^0$ で表す.

任意の $\varepsilon > 0$ に対してコンパクト集合 $K \subset X$ が存在して,
任意の $(x, y) \in E \setminus (K \times K)$ に対して $d(x, y) < \varepsilon$.

このとき, $\mathcal{E}_d^0$ は X の粗構造である ([11, Proposition 2.1]). $\mathcal{E}_d^0$ を距離 d によって定まる C_0 **粗構造** (C_0 **coarse structure**) という.

例 2.5 (cf. [13, Example 2.7]). 位相空間 X に対して,

$$\mathcal{E}_D = \{E \subset X \times X : E \setminus \Delta_X \text{ は } X \times X \text{ で相対コンパクト }\}$$

は X の粗構造である. $\mathcal{E}_D$ を**離散粗構造** (**discrete coarse structure**) という.

$E \subset X \times X$ と $A \subset X$ と $x \in X$ に対して

$$E[A] = \{y \in X : \exists a \in A\,((y, a) \in E)\}, \quad E[x] = E[\{x\}]$$

とする.

例 2.6 ([13, Example 2.8]). X を位相空間とする. $E \subset X \times X$ が**固有** (**proper**) であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset X$ に対して, $E[K]$ と $E^{-1}[K]$ が相対コンパクトであるときをいう.

$$\mathcal{E}_I = \{E \subset X \times X : E \text{ は固有 }\}$$

は X の粗構造である. $\mathcal{E}_I$ を**密着粗構造** (**indiscrete coarse structure**) という.

3. 粗空間における漸近次元の周辺

距離空間の粗幾何学的性質は, 粗空間へ自然に拡張できる. Bell, Moran and Nagórko [1] は, 漸近次元, 性質 A, 漸近的性質 C, FDC, sFDC の粗空間への拡張を, それぞれ粗漸近次元, 粗性質 A, 粗性質 C, 有限粗分解複雑性, 直線的有限粗分解複雑性と呼び, その関係を論じた.

$(X, \mathcal{E})$ を粗空間とする. $E \in \mathcal{E}$ に対して X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が **E-disjoint** であるとは, 任意の異なる $U, U' \in \mathcal{U}$ に対して $(U \times U') \cap E = \varnothing$, すなわち, 任意の $x \in U$ と $x' \in U'$ に対して $(x, x') \notin E$ であるときをいう. X の部分集合族 $\mathcal{U}$ が $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \times U \in \mathcal{E}$ を満たすとき, **一様有界 (uniformly bounded)** であるという. $\mathcal{U}$ が一様有界であることは, 条件

$$\exists S \in \mathcal{E} \, \forall U \in \mathcal{U} \, \exists x \in X \, (U \subset S[x])$$

と同値である.

定義 3.1 ([13, Definition 9.4], cf. [1, Definition 3.1])**.** 整数 n に対して, 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ の**粗漸近次元 (coarse asymptotic dimension)** が n 以下である ($\operatorname{asdim}_C(X, \mathcal{E}) \leq n$) とは, 任意の $E \in \mathcal{E}$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす $n+1$ 個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ が存在するときをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n} \mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は E-disjoint である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

ある整数 n が存在して $\operatorname{asdim}_C X \leq n$ であるとき, X の粗漸近次元は有限であるという.

注意 3.2. 距離空間 (X, d) とその有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ に対して, $\operatorname{asdim} X \leq n$ と $\operatorname{asdim}_C(X, \mathcal{E}_d) \leq n$ は同値である.

注意 3.3. 位相空間 X の離散粗構造 $\mathcal{E}_D$ に対して, $\operatorname{asdim}_C(X, \mathcal{E}_D) \leq 0$ である. 実際, 任意に $E \in \mathcal{E}_D$ をとると, コンパクト部分集合 $K \subset X$ で $E \setminus \Delta_X \subset K \times K$ を満たすものがとれる. このとき $\mathcal{U}_0 = \{K\} \cup \{\{x\} : x \in X \setminus K\}$ とすれば, $\mathcal{U}_0$ は X を被覆し, E-disjoint で一様有界である.

注意 3.4. 任意の有界閉集合がコンパクトである距離空間を, **固有 (proper)** な距離空間という. 固有な距離空間 X の密着粗構造 $\mathcal{E}_I$ に対して, $\operatorname{asdim}_C(X, \mathcal{E}_I) \leq 1$ である ([13, Examples 2.30 and 9.7]).

定義 3.5 ([1, Definition 3.5], cf. [13, Definition 11.35])**.** 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ が**粗性質 A (coarse property A)** を満たすとは, 任意の $\varepsilon > 0$ と $E \in \mathcal{E}$ に対して, 次の (1)–(3) を満たす写像 $a : X \to \ell_1(X); x \mapsto a_x$ が存在するときをいう.

(1) 任意の $x \in X$ に対して $\|a_x\|_1 = 1$.
(2) $x, y \in X$, $(x, y) \in E$ ならば $\|a_x - a_y\|_1 < \varepsilon$.
(3) $S \in \mathcal{E}$ が存在して, 任意の $x \in X$ に対して $\operatorname{supp} a_x \subset S[x]$.

注意 3.6. 性質 A は様々な特徴付けが知られており ([15] 参照), 粗性質 A の特徴付けついては [14] で示されている.

定義 3.7 ([1, Definition 3.2]). 粗空間 $(X,\mathcal{E})$ が**粗性質 C** (**coarse property C**) を満たすとは, 任意の $\mathcal{E}$ の要素の列 $\{L_i\}_{i=0}^{\infty}$ に対して, $n\in\mathbb{N}$ と次の (1)–(3) を満たす有限個の X の部分集合族 $\mathcal{U}_0,\mathcal{U}_1,\dots,\mathcal{U}_n$ が存在するときをいう.

(1) $\bigcup_{i=0}^{n}\mathcal{U}_i$ は X の被覆である.
(2) 各 $\mathcal{U}_i$ は L_i-disjoint である.
(3) 各 $\mathcal{U}_i$ は一様有界である.

定義 3.8 ([1, Definition 4.1]). 粗空間 $(X,\mathcal{E})$ の 2 つの部分集合族 $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ と $L\in\mathcal{E}$ に対して, $\mathcal{Y}$ が $\mathcal{X}$ を L-**分割する** ($\mathcal{X}\xrightarrow{L}\mathcal{Y}$) とは, 任意の $A\in\mathcal{X}$ に対して, $A=\bigcup(\mathcal{Y}_1\cup\mathcal{Y}_2)$ を満たす L-disjoint な $\mathcal{Y}_1,\mathcal{Y}_2\subset\mathcal{Y}$ が存在するときをいう.

粗空間 $(X,\mathcal{E})$ に対して, $\mathcal{Y}_0=\{X\}$ とおき, プレーヤー A, B による次の分解ゲーム (decomposition game) を考える.

> **ラウンド i :** プレーヤー A は ($\mathcal{Y}_{i-1}$ を見て) $L_i\in\mathcal{E}$ を出す. プレーヤー B は (L_i を見て) $\mathcal{Y}_{i-1}$ を L_i-分割する X の部分集合族 $\mathcal{Y}_i$ を出す.

プレーヤー B が, あるラウンド k で一様有界な $\mathcal{Y}_k$ を出すことができたとき, B の勝利とする. そうでないとき, プレーヤー A の勝利とする.

この分解ゲームにおいてプレーヤー B に必勝法があるとき, X は**有限粗分解複雑性** (**finite coarse decomposition complexity, FCDC**) をもつという.

定義 3.9 ([1, Definition 4.2]). 粗空間 $(X,\mathcal{E})$ が**直線的有限粗分解複雑性** (**straight finite coarse decomposition complexity, sFCDC**) をもつとは, 任意の $\mathcal{E}$ の要素の列 $\{L_i\}$ に対して, $n\in\mathbb{N}$ と次の (1), (2) を満たす X の部分集合族の有限列 $\{\mathcal{Y}_i\}_{i=1}^{n}$ が存在するときをいう.

(1) $\mathcal{Y}_0=\{X\}$, $\mathcal{Y}_{i-1}\xrightarrow{L_i}\mathcal{Y}_i$ $\forall i\in\{1,2,\dots,n\}$.
(2) $\mathcal{Y}_n$ は一様有界.

注意 3.10. 距離空間 (X,d) と距離 d によって定まる有界粗構造 $\mathcal{E}_d$ に対して, (X,d) が性質 A を満たすことと $(X,\mathcal{E}_d)$ が粗性質 A を満たすこと, (X,d) が漸近的性質 C を満たすことと $(X,\mathcal{E}_d)$ が粗性質 C を満たすこと, (X,d) が FDC をもつことと $(X,\mathcal{E}_d)$ が FCDC をもつこと, (X,d) が sFDC をもつことと $(X,\mathcal{E}_d)$ が sFCDC をもつことは, それぞれ同値である.

粗漸近次元有限な任意の粗空間が粗性質 C を満たし, FCDC をもつ任意の粗空間が sFCDC をもつことは, 定義から直ちに従う. Bell, Moran and Nagórko [1] は, 次を証明した.

定理 3.11 ([1, Proposition 4.5]). 粗性質 C を満たす任意の粗空間は, sFCDC をもつ.

定理 3.12 ([1, Theorem 3.10]). 粗性質 C を満たす任意の粗空間は, 粗性質 A を満たす.

図 1.1 との比較により, Bell, Moran and Nagórko [1] は次の問題を提起した.

問題 3.13 ([1, Question 4.22]). sFCDC をもつ粗空間は粗性質 A を満たすか.

問題 3.14 ([1, Question 4.23]). 粗漸近次元有限な粗空間は FCDC をもつか.

4. 主結果

本稿の主結果は, 問題 3.13 に対して肯定的な解答を得たことである.

定理 4.1 ([18]). sFCDC をもつ粗空間は, 粗性質 A を満たす.

注意 4.2. Dranishnikov and Zarichnyi [4], [5] は, sFDC をもつ距離空間が sFDC をもつ測地距離空間へ粗埋め込み可能であり ([4, Proposition 3.3]), sFDC をもつ測地距離空間が性質 A を満たすことを示すことで定理 1.11 を証明した.

以下, 定理 4.1 の証明の概略を述べるが, 今回の証明では, 特別な粗空間に埋め込むことなく, sFCDC をもつ粗空間から, 直接, 定義 3.5 の (1)–(3) を満たす写像 $a : X \to \ell_1(X)$ を構成する (従って, 有界粗構造を考えることにより, 定理 1.11 の別証明を得る). その際に, Chabel, Choban and Nagami [2] による sieve の概念を用いる.

以下, ω は非負整数全体の集合を表す. 粗空間 $(X, \mathcal{E})$ と $E \in \mathcal{E}$ に対して,

$$E^0 = \Delta_X, \quad E^{k+1} = E^k \circ E, \quad k \in \omega$$

と定める. 集合 $A \subset X$ が $A \times A \subset \bigcup_{i\in\omega} E^i$ を満たすとき, A を E-**連結** (E-**connected**) という. 空でない $S \subset X$ と $E = E^{-1}$ を満たす $E \in \mathcal{E}$ に対して, 「$x \sim y \iff (x, y) \in \bigcup_{i\in\omega} E^i$」によって定まる S 上の同値関係を考えることにより, S は E-連結成分に分割される. 任意の $i \in \omega$ に対して, S 上の E-連結成分全体からなる集合族は E^i-disjoint である.

定理 4.1 の証明の概略. $(X, \mathcal{E})$ を sFCDC をもつ粗空間とする. $(X, \mathcal{E})$ が性質 A を満たすことを示すため, 任意に $\varepsilon > 0$ と $E \in \mathcal{E}$ をとる. 必要に応じて E を $\Delta_X \cup E \cup E^{-1}$ と入れ替えることにより, $\Delta_X \subset E = E^{-1}$ であるとしてよい. $1/N < \varepsilon$ を満たす $N \in \mathbb{N}$ をとり, 各 $i \in \omega$ に対して $L_i = E^{2^i+4N}$ とし, $\mathcal{Y}_0 = \{X\}$ とおく. このとき, $i \in \mathbb{N}$ に対して $L_{i-1} \subset L_i$ である. $(X, \mathcal{E})$ は sFCDC をもつので, $n \in \mathbb{N}$ と X の部分集合族 $\mathcal{Y}_1, \mathcal{Y}_2, \ldots, \mathcal{Y}_n$ を, 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して $\mathcal{Y}_{i-1} \xrightarrow{L_i^2} \mathcal{Y}_i$ であり, かつ $\mathcal{Y}_n$ が一様有界であるようにとれる.

$\mathcal{F}_0 = \{F_\alpha : \alpha \in A_0\}$ を E-連結成分全体のなす集合族とし, $\alpha \neq \beta$ ならば $F_\alpha \neq F_\beta$ であるように添え字付けられているとする.

事実 4.2.1. 各 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ に対して, X の部分集合族 $\mathcal{F}_i = \{F_\beta : \beta \in A_i\}$ と $\pi_i : A_i \to A_{i-1}$ が存在して, $\mathcal{F}_i \prec \mathcal{Y}_i$ かつ任意の $\alpha \in A_{i-1}$ に対して次の (i)–(iv) を満たす.

(i) 任意の $\beta \in \pi_i^{-1}(\alpha)$ に対して $F_\beta \neq \varnothing$ かつ F_β は E-連結.
(ii) 任意の $\beta, \gamma \in \pi_i^{-1}(\alpha)$ に対して, $\beta \neq \gamma$ ならば $F_\beta \neq F_\gamma$.
(iii) $F_\alpha = \bigcup_{\beta \in \pi_i^{-1}(\alpha)} F_\beta$.
(iv) $A_\alpha^0, A_\alpha^1 \subset A_i$ が存在して, $\pi_i^{-1}(\alpha) = A_\alpha^0 \cup A_\alpha^1$ かつ各 $l \in \{0,1\}$ に対し $\{F_\beta : \beta \in A_\alpha^l\}$ は L_i^2-disjoint.

注意. 上の条件 (iii) を満足する列 $\{(\mathcal{F}_i, A_i, \pi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ を X の **sieve** という [2].

$j \leq i$ を満たす $i, j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ に対し, 写像 $\pi_j^i : A_i \to A_j$ を

$$\pi_j^i = \begin{cases} \mathrm{id}_{A_i} & \text{if } j = i, \\ \pi_{j+1} \circ \pi_{j+2} \circ \cdots \circ \pi_{i-1} \circ \pi_i & \text{if } j < i \end{cases}$$

で定める. ここで, id_{A_i} は A_i 上の恒等写像を表す. 任意の $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$ と $\beta \in A_i$ に対して

$$U_\beta = \bigcap_{j=0}^{i} L_j[F_{\pi_j^i(\beta)}].$$

とする.

以下, しばらくの間 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ と $\alpha \in A_{i-1}$ を固定する.

関数 $d_E : X \times X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を

$$d_E(x,y) = \begin{cases} \min\{k \in \omega : (x,y) \in E^k\} & \text{if } (x,y) \in \bigcup_{i\in\omega} E^i, \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定めると, d_E は (∞ を値にとりうる) X の距離である [1, Proposition 3.6]. F_α が E-連結であることから, U_α も E-連結である. 従って, 任意の $x, y \in U_\alpha$ に対して $d_E(x,y) \in \mathbb{R}$ である.

任意の $\beta \in \pi_i^{-1}(\alpha)$ に対して, 関数 $q_\beta : U_\alpha \to \mathbb{R}$ を

$$q_\beta(x) = \begin{cases} \inf\{d_E(x,y) : y \in U_\alpha \setminus U_\beta\} \quad \text{for } x \in U_\alpha & \text{if } U_\beta \neq U_\alpha, \\ 2^{i+3}N \quad \text{for } x \in U_\alpha & \text{if } U_\beta = U_\alpha \end{cases}$$

で定め, 関数 $p_\beta : X \to \mathbb{R}$ を

$$p_\beta(x) = \begin{cases} \dfrac{q_\beta(x)}{\sum_{\gamma \in \pi_i^{-1}(\alpha)} q_\gamma(x)} & \text{if } x \in U_\alpha, \\ 0 & \text{if } x \in X \setminus U_\alpha. \end{cases}$$

で定める. このとき, $x \in U_\alpha$ に対して $\sum_{\beta \in \pi_i^{-1}(\alpha)} p_\beta(x) = 1$ であり, $\beta \in \pi_i^{-1}(\alpha)$ と $x \in X \setminus U_\beta$ に対して $p_\beta(x) = 0$ である.

さて, $\mathcal{F}_0$ は E-連結成分全体からなる集合族であったため, 各 $\alpha \in A_0$ に対して $U_\alpha = F_\alpha$ である. よって, $\{U_\alpha : \alpha \in A_0\}$ は互いに素な X の被覆である. ここで,

各 $\alpha \in A_0$ に対して, 写像 $p_\alpha : X \to \mathbb{R}$ を, $x \in U_\alpha$ のとき $p_\alpha(x) = 1$, それ以外は $p_\alpha(x) = 0$ と定めれば. 任意の $x \in X$ に対して $\sum_{\alpha \in A_0} p_\alpha(x) = 1$ である.

事実 4.2.1 における最後の集合族 $\mathcal{F}_n$ の各添え字 $\beta \in A_n$ に対して, $y_\beta \in U_\beta$ を 1 つとり固定する. 各 $x \in X$ に対して, 関数 $a_x : X \to \mathbb{R}$ を

$$a_x(z) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\beta \in A_n,\, y_\beta = z} \prod_{j=0}^{n} p_{\pi_j^n(\beta)}(x) & \text{if } z \in \{y_\beta : \beta \in A_n\}, \\ 0 & \text{if } z \in X \setminus \{y_\beta : \beta \in A_n\} \end{cases}$$

で定める. このとき, 写像 $a : X \to \ell_1(X);\ x \mapsto a_x$ は, 定義 3.5 の条件 (1)–(3) を満たす. ゆえに, X は粗性質 A を満たす. □

従って, 粗空間に対して次を得る.

$$\begin{tikzcd} & \text{粗性質 C} \arrow[dr, Rightarrow] & & \\ \text{粗漸近次元有限} \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[dr, "?\ (\text{問題 } 3.14)"'] & & \text{sFCDC} \arrow[r, Rightarrow] & \text{粗性質 A} \\ & \text{FCDC} \arrow[ur, Rightarrow] & & \end{tikzcd}$$

問題 4.3. 「粗性質 C $\Longrightarrow$ sFCDC」「FCDC $\Longrightarrow$ sFCDC」「sFCDC $\Longrightarrow$ 粗性質 A」の逆が成り立たないことを示す粗空間の例は存在するか.

References

[1] G. Bell, D. Moran and A. Nagórko, *Coarse property C and decomposition complexity*, Topology Appl. **227** (2017), 30–50.

[2] J. Chaber, M. M. Čoban and K. Nagami, *On monotonic generalizations of Moore spaces, Čech complete spaces and p-spaces*, Fund. Math. **84** (1974), 107–119.

[3] A. Dranishnikov, *Asymptotic Topology*, Russian Math. Surveys **55** (2000), 1085–1129.

[4] A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Asymptotic dimension, decomposition complexity, and Havar's property C*, Topology Appl. **169** (2014), 249–252, updated version is available at `http://arxiv.org/pdf/1301.3484v2.pdf`

[5] A. Dranishnikov and M. Zarichnyi, *Remarks on straight finite decomposition complexity*, Topology Appl. **227** (2017), 102–110.

[6] M. Gromov, *Asymptotic invariants of infinite groups*, Geometric group theory, Vol. 2 (Sussex, 1991), 1–295, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 182, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993.

[7] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *A notion of geometric complexity and its application to topological rigidity*, Invent. Math. **189** (2012), 315–357.

[8] E. Guentner, R. Tessera and G. Yu, *Discrete groups with finite decomposition complexity*, Groups Geom. Dyn. **7** (2013), 377–402.

[9] N. Higson, E. K. Pedersen and J. Roe, *C^*-algebras and controlled topology*, K-Theory **11** (1997), 209–239.

[10] N. Higson and J. Roe, *Amenable group actions and the Novikov conjecture*, J. Reine Angew. Math. **519** (2000), 143–153.

[11] K. Mine and A. Yamashita, *Metric compactifications and coarse structures*, Canad. J. Math. 67 (2015), 1091–1108.

[12] P. Nowak and G. Yu, *Large scale geometry*, European Mathematical Society, Zürich, 2012.

[13] J. Roe, *Lectures on Coarse Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[14] H. Sako, *Property A for coarse spaces*, preprint (2013), available at `http://arxiv.org/pdf/1303.7027v1.pdf`

[15] R. Willett, *Some notes on property A*, Limits of graphs in group theory and computer science, 191–281, EPFL Press, Lausanne, 2009.

[16] N. Wright, C_0 *coarse geometry and scalar curvature*, J. Funct. Anal. **197** (2003), 469–488.

[17] T. Yamauchi, *Asymptotic property C of the countable direct sum of the integers*, Topology Appl. **184** (2015), 50–53.

[18] T. Yamauchi, *Straight finite decomposition complexity implies property A for coarse spaces*, Topology Appl., to appear.

[19] G. Yu, *The coarse Baum-Connes conjecture for spaces which admit a uniform embedding into Hilbert space*, Invent. Math. **139** (2000), 201–204.