数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 87-93

一般化された堅非拡大写像の総和不可能誤差を含む不動点近似

(APPROXIMATION OF A FIXED POINT OF GENERALIZED FIRMLY NONEXPANSIVE MAPPING WITH NONSUMMABLE ERRORS)

茨木貴徳 (TAKANORI IBARAKI)
横浜国立大学 教育人間科学部
(COLLEGE OF EDUCATION AND HUMAN SCIENCES, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)
梶葉駿介 (SHUNSUKE KAJIBA)
横浜国立大学 教育学研究科
(GRADUATE SCHOOL OF EDUCATION, YOKOHAMA NATIONAL UNIVERSITY)

1. はじめに

Eを実バナッハ空間とし, CをEの空でない閉凸部分集合とする. このとき, CからEへの写像Tが堅非拡大写像 (firmly nonexpansive mapping) であるとは, 任意のCの元x, yと非負の実数tに対して

$$\|t(x-y)+(1-t)(Tx-Ty)\| \geq \|Tx-Ty\|$$

が成り立つことである ([4] を参照). ここで, Eが実ヒルベルト空間の場合, Tが堅非拡大写像となる必要十分条件は, 任意のCの元x, yに対し

$$\langle (x-Tx)-(y-Ty), Tx-Ty\rangle \geq 0$$

が成り立つことである. 実ヒルベルト空間Hにおいて, この写像の重要な例として単調作用素 (monotone operator) から生成されるリゾルベント (resolvent) や距離射影 (metric projection) があげられる ([19,20] を参照).

ヒルベルト空間での, リゾルベントの概念をバナッハ空間上へ拡張した場合, 異なる複数のリゾルベントに拡張される. これらは, ヒルベルト空間のリゾルベントと同様に堅非拡大性を持ち, それらは (P) 型写像, (Q) 型写像, (R) 型写像と呼ばれる (第2節を参照).

一方, 非拡大型写像に関する不動点近似法は多くの研究者によって議論されている. 特に, 高橋-竹内-窪田 [21] は, 非拡大写像の不動点を求める手法として収縮射影法 (shrinking projection method) と呼ばれる近似法を提案した.

定理 1.1 ([21]). Hを実ヒルベルト空間とし, CをHの空でない閉凸部分集合とし, Tを$F(T)$が空でないようなCからCへの非拡大写像とする. また, $\{\alpha_n\}$を$[0,a[$の実数列とする. ただし$0<a<1$である. x_0をHの任意の元とし点列$\{x_n\}$を次のように構成する : $C_1=C$, $x_1=P_{C_1}x_0$とし, $n\in\mathbb{N}$に対して

$$\begin{cases} y_n=\alpha_n x_n+(1-\alpha_n)Tx_n, \\ C_n=\{z\in C:\|z-y_n\|\leq\|z-x_n\|\}\cap C_{n-1} \\ x_{n+1}=P_{C_n}x_0 \end{cases}$$

とする. このとき, 点列$\{x_n\}$は$P_{F(T)}x_0$に強収束する. ただし, P_KはHからHの空でない閉凸部分集合Kへの距離射影とする.

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H05, 47H09, 47J25.
Key words and phrases. 距離射影, (P) 型写像, (Q) 型写像, (R) 型写像.

なお, 高橋-竹内-窪田 [21] は論文の中で, 定理1.1より一般的な非拡大写像族の共通不動点への収束定理を得ている. 定理1.1が示されてから, この手法は多くの研究者によってバナッハ空間上で研究が活発に行われてきた ([13,14] など参照). 収縮射影法は, 点列を構成する際に距離射影の正確な値を求める必要があるが, 一般的に距離射影の値を求めるのは容易ではない. そこで, 木村 [10,11] はこの問題を解決するために, 点列に誤差を含んだ収縮射影法を提案した.

本論文では木村 [10,11] の手法を用いて, 一様凸バナッハ空間において, (P) 型写像, (Q) 型写像, (R) 型写像に関する誤差を含んだ収縮射影法を議論する.

2. 準備

E を実バナッハ空間とし, $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ とする. このとき, S_E の元 x, y $(x \neq y)$ に対して, $\|x+y\| < 2$ が常に成り立つとき E は狭義凸 (strictly convex) であるという. 同様に, $\{x_n\}, \{y_n\}$ を $\lim_n \|x_n + y_n\| = 2$ となる S_E の点列としたとき, $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$ が常に成り立つとき, E は一様凸 (uniformly convex) であるという. 次に, S_E の元 x, y に対して

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{2.1}$$

という極限を考える. このとき, 任意の S_E の元 x, y に対し, 常に (2.1) が存在するとき, E のノルムがガトー微分可能 (Gâteaux differentiable) であるといい, 空間 E は滑らか (smooth) であるともいう. 任意の S_E の元 y に対して, (2.1) が S_E の元 x に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様ガトー微分可能 (uniformly Gâteaux differentiable) であるという. また, 任意の S_E の元 x に対して, (2.1) が S_E の元 y に関して一様に収束することを E のノルムがフレッシェ微分可能 (Fréchat differentiable) であるという. (2.1) が任意の S_E の元 x, y に関して一様に収束するとき, E のノルムが一様フレッシェ微分可能 (uniformly Fréchat differentiable) であるといい, 空間 E が一様に滑らか (uniformly smooth) であるともいう. E^* を E の共役空間 (dual space) とする. E の元 x に対し, E^* の部分集合

$$Jx := \{x^* \in E^* : \|x\|^2 = \langle x, x^* \rangle = \|x^*\|^2\}$$

を対応させる写像 J を双対写像 (duality mapping) と呼ぶ. バナッハ空間 E での双対写像 J に関しては以下の性質が知られている ([18,19] などを参照)

(1) E の元 x に対して, Jx は空でない有界な閉凸集合となる;
(2) E の元 x, y, Jx の元 x^*, Jy の元 y^* に対して, $\langle x - y, x^* - y^* \rangle \geq 0$ が成り立つ;
(3) E が回帰的であるための必要十分条件は, J が全射になることである;
(4) E が滑らかであるための必要十分条件は, J が一価になることである;
(5) E が狭義凸であるための必要十分条件は, J が単射になることである;
(6) E が回帰的で滑らかな狭義凸なとき, E^* の双対写像 J_* は J の逆像となる. すなわち, $J_* = J^{-1}$ となる;
(7) E が一様に滑らかであるための必要十分条件は, E^* が一様凸となることである.

C を回帰的な狭義凸バナッハ空間 E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, 任意の E の元 x に対し

$$\|x - x_0\| = \min_{y \in C} \|x - y\|$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. そこで, E の元 x に対し, このような C の元 x_0 を対応させる写像を, E から C の上への距離射影 (metric projection) と呼び, P_C で表す ([18,19] を参照).

C を滑らかなバナッハ空間 E の空でない閉凸部分集合とする. このとき, C から E への写像 T が (P) 型写像 (mapping of type (P)) であるとは, C の任意の元 x, y に対して,

$$\langle Tx - Ty, J(x - Tx) - J(y - Ty) \rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([2] を参照). 距離射影 P_C は (P) 型写像であることが知られている ([2] を参照). 同様に, C から E への写像 T が (Q) 型写像 (mapping of type (Q)) であるとは, C の任意の元 x, y に対して,

$$\langle Tx - Ty, (Jx - JTx) - (Jy - JTy)\rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([2,15] を参照). C から E への写像 T が (R) 型写像 (mapping of type (R)) であるとは, C の任意の元 x, y に対して,

$$\langle JTx - JTy, (x - Tx) - (y - Ty)\rangle \geq 0$$

が成り立つことである ([2,8] を参照). T の不動点集合を $F(T) = \{p \in C : p = Tp\}$ とする.

T を C から E への (P) 型写像とし, $F(T)$ が空でないとすると, C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して,

$$\langle Tx - p, J(x - Tx)\rangle \geq 0,$$

となることは明らかである. また, T を C から E への (Q) 型写像とし, $F(T)$ が空でないとすると, C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して,

$$\langle Tx - p, Jx - JTx\rangle \geq 0$$

となる. T を C から E への (R) 型写像とし, $F(T)$ が空でないとすると, C の元 x と $F(T)$ の元 p に対して,

$$\langle JTx - Jp, x - Tx\rangle \geq 0$$

となる. これらの写像に関して次のような補助定理が知られている.

補助定理 2.1 ([3]). E を滑らかなバナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸部分集合とし, T を C から E への (P) 型写像とする. このとき, $F(T)$ が空でないならば, $F(T)$ は閉凸集合である.

補助定理 2.2 ([15,16]). E を滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉凸集合とし, T を C から E への (Q) 型写像とする. このとき, $F(T)$ が空でないならば, $F(T)$ は閉凸集合である.

補助定理 2.3 ([22]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉部分集合で, JC は閉凸集合とし, T を C から E への (R) 型写像とする. このとき, $F(T)$ が空でないならば, $F(T)$ は閉集合であり, $JF(T)$ は閉凸集合となる.

E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない部分集合とする. T を C から E への写像とし, JC の元 x^* に対し写像 T^* を

$$T^*x^* := JTJ^{-1}x^* \tag{2.2}$$

と定義する. このとき, $JF(T) = F(T^*)$ となる. (Q) 型写像と (R) 型写像に関して以下の結果が知られている.

補助定理 2.4 ([2]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の空でない部分集合とし, T を C から E への (R) 型写像とする. このとき, JC から E^* への写像を (2.2) のように定義すると, T^* は E^* 上で (Q) 型写像となる.

E を回帰的なバナッハ空間とし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. このとき, $\{C_n\}$ の強下極限集合 s-Li C_n と弱上極限集合 w-Ls C_n はそれぞれ

$$\begin{aligned}\text{s-Li}\, C_n &= \{x \in E : \exists\{x_n\} \subset E \ s.t.\ x_n \to x, x_n \in C_n (\forall n \in \mathbb{N})\}\\ \text{w-Ls}\, C_n &= \{x \in E : \exists\{x_{n_i}\} \subset E \ s.t.\ x_{n_i} \rightharpoonup x, x_{n_i} \in C_{n_i} (\forall i \in \mathbb{N})\}\end{aligned}$$

と定義する. ただし, $\to$, $\rightharpoonup$ はそれぞれ点列の強収束, 弱収束を表している. また, C_0 が

$$\operatorname*{s-Li}_n C_n = C_0 = \operatorname{w-Ls} C_n$$

を満たすとき, $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束 (Mosco convergence) するといい,

$$C_0 = \operatorname{M-lim} C_n$$

と表す ([17] を参照). また, E がカデック・クリー条件 (Kadec-Klee property) を満たすとは E の点列 $\{x_n\}$ が x に弱収束し, $\{\|x_n\|\}$ が $\|x\|$ へ収束するときには, 常に $\{x_n\}$ が x に強収束することをいう.

1984 年に塚田 [23] はバナッハ空間の距離射影に関して次の定理を証明した.

定理 2.5 ([23]). E を回帰的な狭義凸バナッハ空間とし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束し, C_0 が空でないとき, E の任意の元 x に対し, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に弱収束する. さらに, E がカデック・クリー条件を満たせば, $\{P_{C_n}x\}$ は $P_{C_0}x$ に強収束する.

E を滑らかなバナッハ空間とし, $E \times E$ から $\mathbb{R}$ への関数 V を E の元 x, y に対して

$$V(x,y) = \|x\|^2 - 2\langle x, Jy\rangle + \|y\|^2$$

と定義する. この関数 V は以下の性質を満たす ([1,9] を参照).

(1) E の元 x, y に対して, $(\|x\| - \|y\|)^2 \le V(x,y) \le (\|x\| + \|y\|)^2$ である;
(2) E の元 x, y に対して, $V(x,y) + V(y,x) = 2\langle x - y, Jx - Jy\rangle$ である;
(3) E の元 x, y, z に対して, $V(x,y) = V(x,z) + V(z,y) + 2\langle x - z, Jz - Jy\rangle$ である;
(4) E が狭義凸のとき, E の元 x, y に対して, $V(x,y) = 0$ となる必要十分条件は $x = y$ となることである.

本論文では以下に示す関数 $\underline{g}_r$, $\overline{g}_r$, $\underline{g}_r^*$ 及び $\overline{g}_r^*$ が重要な役割を果たす. これらの関数の存在性は, バナッハ空間とその共役空間の凸性から導き出すことができる.

定理 2.6 ([24]). E をバナッハ空間とし, r を正の実数とする. $B_r = \{z \in E : \|z\| \le r\}$ としたとき以下が成立する.

(i) E が一様凸ならば, B_r の任意の元 x, y と, $[0,1]$ の任意の実数 α に対して,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \le \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\underline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たし, $\underline{g}_r(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\underline{g}_r$ が存在する.

(ii) E が一様に滑らかならば, B_r の任意の元 x, y と, $[0,1]$ の任意の実数 α に対して,

$$\|\alpha x + (1-\alpha)y\|^2 \ge \alpha\|x\|^2 + (1-\alpha)\|y\|^2 - \alpha(1-\alpha)\overline{g}_r(\|x-y\|)$$

を満たし, $\overline{g}_r(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\overline{g}_r$ が存在する.

定理 2.7 ([12]). E をバナッハ空間とし, r を正の実数とする. このとき, 以下が成立する.

(i) E が一様凸ならば, 定理 2.6(i) の関数 $\underline{g}_r$ は, 任意の B_r の元 x, y に対し

$$\underline{g}_r(\|x-y\|) \le V(x,y)$$

を満たす.

(ii) E が一様に滑らかならば, 定理 2.6(i) の関数 $\overline{g}_r$ は, 任意の B_r の元 x, y に対し

$$\overline{g}_r(\|x-y\|) \ge V(x,y)$$

を満たす.

定理 2.8 ([5]). E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, r を正の実数とする. このとき, 以下が成立する.

(i) E が一様に滑らかならば, B_r の任意の元, x, y に対して,

$$\underline{g}_r^*(\|Jx - Jy\|) \leq V(x,y)$$

を満たし, $\underline{g}_r^*(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\underline{g}_r^*$ が存在する.

(ii) E が一様凸ならば, B_r の任意の元, x, y に対して,

$$\overline{g}_r^*(\|Jx - Jy\|) \geq V(x,y)$$

を満たし, $\overline{g}_r^*(0) = 0$ となる $[0, 2r]$ から $[0, \infty[$ への連続で狭義単調増加な凸関数 $\overline{g}_r^*$ が存在する.

3. 一般化された堅非拡大写像に関する近似定理

本節では (P) 型写像, (Q) 型写像, (R) 型写像に関する誤差を含んだ収縮射影法について議論する. 木村 [10,11] の手法と定理 2.5 用いて, (P) 型写像と (Q) 型写像に関する次の近似定理を得る.

定理 3.1 ([5]). E を滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない有界な閉凸部分集合とする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とし, T は C から E への (P) 型写像で, $F(T)$ が空でないとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする. u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C, C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{z \in C : \langle Tx_n - z, J(x_n - Tx_n)\rangle \geq 0\} \cap C_n,$$
$$x_{n+1} \in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1},$$

とする. このとき ,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\delta_0)$$

となる. さらに, $\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}u$ に強収束する.

定理 3.2 ([5]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない有界な閉凸部分集合とする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とし, T は C から E への (Q) 型写像で, $F(T)$ が空でないとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする. u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C, C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{z \in C : \langle Tx_n - z, Jx_n - JTx_n\rangle \geq 0\} \cap C_n,$$
$$x_{n+1} \in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1},$$

とする. このとき ,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\overline{g}_r(\underline{g}_r^{-1}(\delta_0)))$$

となる. さらに, $\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}u$ に強収束する.

さらに, 定理 2.4 及び定理 3.2 より, (R) 型写像に関する次の近似定理も得る.

定理 3.3 ([5]). E を一様に滑らかな一様凸バナッハ空間とし, C を E の空でない閉部分集合で, JC は閉凸集合とする. また, r は B_r が C を含むような正の実数とし, T は C から E への (R) 型写像で, $F(T)$ が空でないとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする.

u を E の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C, C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{z \in C : \langle JTx_n - Jz, x_n - Tx_n \rangle \geq 0\} \cap C_n,$$
$$x_{n+1} \in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1},$$

とする. このとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \leq \underline{g}_r^{-1}(\overline{g}_r^*(\underline{g}_r^{*-1}(\overline{g}_r^*(\underline{g}_r^{*-1}(\delta_0)))))$$

となる. さらに, $\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $J^{-1}P^*_{JF(T)}Ju$ に強収束する. ただし, $P^*_{JF(T)}$ は E^* から $JF(T)$ への距離射影とする.

(P) 型写像, (Q) 型写像, (R) 型写像はヒルベルト空間では全て同じ堅非拡大写像になる. さらに, E がヒルベルト空間の場合は関数 $\underline{g}_r$, $\overline{g}_r$, $\underline{g}_r^*$ 及び $\overline{g}_r^*$ は, 任意の正の実数 r に対して

$$\underline{g}_r = \overline{g}_r = \underline{g}_r^* = \overline{g}_r^* = |\cdot|^2$$

を満たす. よって, 定理 3.1, 3.2 及び 3.2 より以下の結果を得る.

系 3.4 ([5]). H をヒルベルト空間として C を H の空でない有界な閉凸部分集合とする. T は C から H への堅非拡大写像で, $F(T)$ が空でないとする. $\{\delta_n\}$ は非負の実数列であり, $\delta_0 = \limsup_n \delta_n$ とする. u を H の任意の元として, 点列 $\{x_n\}$ を次のように構成する : $x_1 = x \in C, C_1 = C$ とし, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$C_{n+1} = \{z \in C : \langle Tx_n - z, x_n - Tx_n \rangle \geq 0\} \cap C_n,$$
$$x_{n+1} \in \{z \in C : \|u - z\|^2 \leq d(u, C_{n+1})^2 + \delta_{n+1}\} \cap C_{n+1},$$

とする. そのとき,

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n - Tx_n\| \leq \sqrt{\delta_0}$$

となる. さらに, $\delta_0 = 0$ のとき点列 $\{x_n\}$ は $P_{F(T)}u$ に強収束する.

4. 考察

収縮射影法は集合列を生成し, その集合列に対し距離射影を用いて点列を構成する手法である. 木村 - 高橋 [14] は収縮射影法が集合列を生成するという点に着目し, 塚田 [23] の距離射影とモスコ収束に関する定理 (定理 2.5) を用いて, 高橋 - 竹内 - 窪田 [21] と違う証明方法を示した. この手法をバナッハ空間で用いる場合, 高橋 - 竹内 - 窪田 [21] の手法を用いるより, 空間の条件や係数条件を弱めることができるメリットがある. 主定理である定理 3.1, 3.2 及び 3.3 の証明は, 木村 - 高橋 [14] と同じ手法を用いている (証明の詳細は [5] を参照).

一方, 距離射影の概念をヒルベルト空間からバナッハ空間に拡張した場合, 複数の射影に拡張される. その一つに準距離射影 (generalized projection) がある. E を回帰的で滑らかな狭義凸バナッハ空間とし, C を E の閉凸部分集合としたとき, 任意の E の元 x に対し

$$V(x, x_0) = \min_{y\in C} V(x, y)$$

となる C の元 x_0 が一意に存在する. そこで, E の元 x に対し, このような C の元 x_0 を対応させる写像を, E から C の上への準距離射影と呼び, Π_C で表す ([1] を参照). また, 準距離射影は (Q) 型写像であることが知られている ([2] を参照). さらに, 準距離射影に関しては定理 2.5 と類似の以下の結果が知られている.

定理 4.1 ([6]). E を滑らかなバナッハ空間とし, 共役空間 E^* のノルムがフレッシェ微分可能であるとし, $\{C_n\}$ を E の空でない閉凸部分集合列とする. $\{C_n\}$ が C_0 にモスコ収束し, C_0 が空でないとき,E の任意の元 x に対し, $\{\Pi_{C_n}x\}$ は $\Pi_{C_0}x$ に強収束する.

定理3.1, 3.2 及び3.3の収縮射影法において距離射影の代わりに準距離射影を用いて点列を構成し, さらに証明においては定理2.5の代わりに定理4.1を利用すれば本論文の主定理と同様の結果が得られることが期待できる.

参考文献

[1] Y. I. Alber, *Metric and generalized prjection orperators in Banach space: properties and applications*, Theory and Applications of Nonlinear Operators of Acretive and Monotone Type, Lecture Notes in Pure and Applied Mathmatics, vol. 178, Dakker, New york, 1996, pp.15-50.

[2] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Three generalizations of firmly nonexpansive mappings: Their relations and continuity properties*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 131–147.

[3] K. Aoyama, F. Kohsaka and W. Takahashi, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Proceedings of Asian Conference on Nonlinear Analysis and Optimization, Yokohama Publishers, 2009, 1–17.

[4] R. E. Bruck, *Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces*, Pacific J. Math. **47** (1973), 341–355.

[5] T. Ibaraki and Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of generalized firmly nonexpansive mappings with nonsummable errors*, Linear and Nonlinear Analysis, to appear.

[6] T. Ibaraki, Y. Kimura and W. Takahashi, *Convergence theorems for generalized projections and maximal monotone operater in Banach space*, Abstra. appl. Anal. 2003 (2003), 621–629.

[7] T. Ibaraki and W. Takahashi, *A new projection and convergence theorems for the projections in Banach spaces*, J. Approx. Theory **149** (2007), 1–14.

[8] T. Ibaraki and W. Takahashi, *Fixed point theorems for nonlinear mappings of nonexpansive type in Banach spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **10** (2009), 21–32.

[9] S. Kamimura and W. Takahashi, *Strong convergence of a proximal-type algorithm in a Banach space*, SIAM J. Optim. **13** (2002), 938–945.

[10] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonexpansive mapping with nonsummable errors in a geodesic space*, Proceedings of the 10th International Conference on Fixed Point Theory and Its Applications, 2012, pp. 157–164.

[11] Y. Kimura, *Approximation of a fixed point of nonlinear mappings with nonsummable errors in a Banach space*, Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces IV (Kitakyushu, Japan), (L. Maligranda, M. Kato, and T. Suzuki eds.), 2014, pp. 303–311.

[12] Y. Kimura, *Approximation of a common fixed point of a finite family of nonexpansive mappings with nonsummable errors in a Hilbert space*, J. Nonlinear Convex Anal. **15** (2014), 429–436.

[13] Y. Kimura, K. Nakajo, and W. Takahashi, *Strongly convergent iterative schemes for a sequence of nonlinear mappings*, J. Nonlinear Convex Anal. **9** (2008), 407–416.

[14] Y. Kimura and W. Takahashi, *On a hybrid method for a family of relatively nonexpansive mappings in a Banach space*, J. Math. Anal. Appl. **357** (2009), 356–363.

[15] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Existence and approximation of fixed points of firmly nonexpansive type mappings in Banach spaces*, SIAM J. Optim. **19** (2008), 824–835.

[16] F. Kohsaka and W. Takahashi, *Fixed point theorems for a class of nonlinear mappings related to maximal monotone operators in Banach spaces*, Arch. Math. (Basel) **91** (2008), 166–177.

[17] U. Mosco, *Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities*, Adv. in Math. **3** (1969), 510–585.

[18] W. Takahashi, *Nonlinear Functional Analysis - Fixed Point Theory and Its Applications*, Yokohama Publishers, 2000.

[19] 高橋渉, 凸解析と不動点近似, 横浜図書, 2000.

[20] 高橋渉, 非線形・凸解析学入門, 横浜図書, 2005.

[21] W. Takahashi, Y Takeuchi and R. Kubota, *Strong convergence theorems by hybrid methods for families of nonexpansive mappings in Hilbert spaces*, J. Math. Anal. Appl. **341** (2008), 276–286.

[22] W. Takahashi and J.-C. Yao, *Nonlinear operators of monotone type and convergence theorems with equilibrium problems in Banach spaces*, Taiwanese J. Math. **15** (2011), 787–818.

[23] M. Tsukada, *Convergence of best approximations in a smooth Banach space*, J. Approx. Theory **40** (1984), 301–309.

[24] H. K. Xu, *Inequalities in Banach spaces with applications*, Nonlinear Anal. **16** (1991), 1127–1138.