数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 120-125

KOHSAKA'S CONSIDERATION ON BOUNDEDNESS OF SETS
集合の有界性についてのProf. 高阪の考察

高橋非線形解析研究所　竹内 幸雄 (Yukio Takeuchi)
Takahashi Institute for Nonlinear Analysisl

1. 背景

Prof. Ray は 1985 年に次の定理を発表しました; Ray [4]. (1) から (2) が導かれることは, 1965 年に証明されていました. Ray は (2) から (1) が導かれることを示しました.

Theorem 1. *Let D be a non-empty closed and convex subset of a Hilbert space H. Then the followings are equivalent.*

(1) *D is bounded.*
(2) *Any nonexpansive self-mapping T on D has a fixed point.*

Ray の証明はとても長く入りくんでいます. 私は Ray の証明を論理的に追うことはできましたが, 彼が何をしているのか明確には理解できませんでした. Prof. Sine [5] が Ray の主張に simple な証明を与えたと, 一部の研究者はいいます. しかし, 私はこの様には判断できません. 彼は証明の要の部分を, "A poorman's Montel principle によって" と書くだけで説明していないからです. Web でこの原理を調べましたが, 該当するものを見つけることはできませんでした. このため, 私は, Ray の証明の本質を抜き出し初等的で簡潔な証明を得たいと考えていました. この様な状況の中で, 2015 年に, Ray の主張の証明を載せた Kohsaka [3] が発表されました. 私にとっては, まさに目から鱗の驚くべき素晴らしい証明でした. この証明の本質的部分は, simple で初等的な数行の記述ですから, ほんの少し知識があれば誰にでも理解できます. 私は自分でゼロから考えてみるという当たり前のことを, Ray や Sine の証明手法に引きずられて, 充分にしていなかったようです. 本稿では高阪先生のこの idea を解説します.

2. 基本事項と記法

本稿で, C は Hilbert 空間 H の空ではない集合とし, D は常に空ではない閉凸集合を表わします. また, $B(x,r)$ は中心 $x \in H$ 半径 $r > 0$ の閉球とします. S を C から H への写像とします. このとき, $F(S)$ は S の不動点集合 $\{x \in C : Sx = x\}$ を表わします. S は, $\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|$ for $x, y \in C$ を満たすとき nonexpansive と呼ばれ, $\|Sx - Sy\|^2 \leq \langle Sx - Sy, x - y\rangle$ for $x, y \in C$ を満たすとき firmly nonexpansive と呼ばれます. S が firmly nonexpansive ならば nonexpansive です.

$q \in H$ とします. $T_q x = x + q$ for $x \in C$ で定義される C から H への写像 T_q は, q による C の translation と呼ばれます. T_q は $T_q x - T_q y = x - y$ for $x, y \in C$ という非常に

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47H09, 47H10.
Key words and phrases. Ray's theorem, the uniform boundedness principle, Kohsaka's idea.

良い性質を持ちます. 従って, T_q は firmly nonexpansive です. ここで, $q \neq 0$ とし, T_q を C 上の自己写像としましょう. このとき,

$$x+q,\ x+2q, \cdots, x+nq, \cdots \in C.$$

となります. つまり, T_q は有界集合 C については自己写像となり得ません.

$x \in H$ ごとに, $\|x - z_x\| = \min\{\|x-y\| : y \in D\}$ となる $z_x \in D$ が唯1つ存在します. 距離射影と呼ばれる H から D の上への写像 P_D を $P_D x = z_x$ for $x \in H$ で定義します. P_D は代表的な firmly nonexpansive 写像です. H から D の上への写像 T が距離射影であることと次の条件は同値です: $\langle x - Tx, y - Tx \rangle \leq 0$ for $x \in H$, $y \in D$.

便宜のために, S_q は常に D の q による translation とします. 従って, $S_q x = x + q$ for all $x \in D$ です. このとき, $P_D S_q$ は D 上の firmly nonexpansive な写像であることが直接確認できます: P_D が firmly nonexpansive ですから, 任意の $x, y \in D$ について,

$$\begin{aligned}\|P_D S_q x - P_D S_q y\|^2 &\leq \langle P_D S_q x - P_D S_q y, S_q x - S_q y \rangle \\ &= \langle P_D S_q x - P_D S_q y, (x+q) - (y+q) \rangle = \langle P_D S_q x - P_D S_q y, x - y \rangle.\end{aligned}$$

ここまでに述べた記法や事項は以降断りなく使用します. Theorem 1 は一様有界性定理と密接に関連するので, この定理を本稿の議論で扱いやすい形にして提示します.

Theorem 2. *Assume that, for $q \in H$, there is $u \in D$ such that $\sup_{y \in D} \langle y, q \rangle = \langle u, q \rangle$. Then D is bounded.*

3. 高阪の考察

次の補題は Kohsaka [3] に提示されたものです.

Lemma 3. *Let $u \in D$ and $q \in H$. Then, the followings are equivalent:*

(1) $u \in F(P_D S_q)$, (2) $\sup_{y \in D} \langle y, q \rangle = \langle u, q \rangle$.

Proof. $S_q u = u + q$ と距離射影 P_D の性質より, $P_D S_q u = u$ と次は同値です:
任意の $y \in D$ について,

$$0 \geq \langle y - u, S_q u - u \rangle = \langle y - u, (u+q) - u \rangle = \langle y, q \rangle - \langle u, q \rangle.$$

従って, $u \in F(P_D S_q)$ と $\sup_{y \in D} \langle y, q \rangle = \langle u, q \rangle$ は同値です. □

この様に, 高阪は写像族 $\{P_D S_q\}_{q \in H}$ を考察しました. S_q は本質的には線形, P_D は非線形です. $P_D S_q$ は基本的な2つの写像の合成ですから, 多くの有用な非線形写像族が, $\{P_D S_q\}_{q \in H}$ を部分族として含むと考えられます. T_q は, $q = 0$ でなければ, 有界な集合 C 上の自己写像にはなれません. しかし, 当然ですが, $P_D S_q$ は閉凸集合 D 上の firmly nonexpansive な自己写像です. 次の5つを見てください.

(1) D が有界.
(2) D 上のどの様な nonexpansive 自己写像も不動点を持つ.
(3) D 上のどの様な firmly nonexpansive 自己写像も不動点を持つ.
(4) 任意の $q \in H$ について, $P_D S_q$ は不動点を持つ.
(5) 任意の $q \in H$ について, ある $u \in D$ が存在して $\sup_{y \in D} \langle y, q \rangle = \langle u, q \rangle$ を満たす.

前節で述べた様に, (1) ⇒ (2) は1965年から知られていました. また, (2) ⇒ (3) ⇒ (4) は明らかです. 更に, (5) ⇒ (1) は一様有界性定理の主張です.

高阪の補題に戻ると, (4) $\Rightarrow$ (5) がこの主張に含まれます. 従って, 高阪は, ほんの数行の証明を持つ Lemma 3 によって, 次の様に円環を閉じたことになります.

$$(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) \Rightarrow (4) \quad \Longrightarrow \quad (5) \Rightarrow (1)$$

高阪が, この数行によって, Ray の主張を鮮やかに証明したことが分かると思います.

この様にして (1)–(5) は同値になります. これを定理の形に整理します.

Theorem 4. *The followings are equivalent.*

(1) *D is bounded.*
(2) *Any nonexpansive self–mapping on D has a fixed point.*
(3) *Any firmly nonexpansive self–mapping on D has a fixed point.*
(4) *For each $q \in H$, $P_D S_q$ has a fixed point.*
(5) *For each $q \in H$, there is $u \in D$ such that $\sup_{y \in D}\langle y, q\rangle = \langle u, q\rangle$.*

高阪の補題は非線形な写像族 $\{P_D S_q\}_{q \in H}$ と線形な写像族 $\{\langle \cdot, q\rangle\}_{q \in H}$ を関連付けていることも明らかでしょう. 上の定理は, Ray の定理の version とも, 一様有界性定理の version とも捉えられます. 私は 2015 年まで知りませんでしたが, 2011 年に, より広範な内容を持つ Kohsaka [2] が発表されています. Kohsaka [3] の内容は, Kohsaka [2] から Hilbert 空間の Ray の定理に直接関わる部分を切り出し整理したものになっています.

4. 一様有界性定理

Kohsaka [3] を読むと, Ray が彼の証明の中で何をしているのかが再び気になります. Ray の証明は, Kohsaka [3] の後でも, 最初の証明という当然の価値のほかに, 一定の価値がある何ものかを含んでいると思います. 再度検討してみました. Ray は証明の中で一様有界性定理を直接使用していません. しかし, Kohsaka [3] の証明から逆に考えると, nonexpansive 写像について, ある種の一様有界性を議論していると考えるのが自然です. Ray の証明は本質的に一様有界性定理の証明を含んでいるのではないかと考えました. また, 一様有界性定理が Baire のカテゴリー定理の系であることはよく知られていますが, Ray はこの定理も使っていないと思います.

Kohsaka [3] の後では迂遠に思える議論もあったのですが, 一様有界性定理に焦点をあてて整理し検討した結果, この定理の簡潔な証明を得ました. 更に, この証明はより広い空間に通用します. 残念なことに, この証明は新しいものではありませんでした. Prof. Sokal が 2011 年に発表した論文 [6] と, その手法も含めて双子の様にそっくりです. しかし, 思い入れもあり面白くもあるので, Hilbert 空間でこの証明を紹介します. 次のことを注意しておきます. C が有界であることと, その閉凸包 $\overline{co}(C)$ が有界であることは同値です. Hilbert 空間での証明は, 有界閉凸集合が弱コンパクトになるので, きれいな数字のまま議論ができます. まず, (1) $\Rightarrow$ (5) を証明しておきましょう.

Lemma 5. *Suppose D is bounded. Then, for each $q \in H$, there is $u \in D$ satisfying*

$$\sup_{y \in D}\langle y, q\rangle = \langle u, q\rangle.$$

Proof. D が有界ですから, $q \in H$ ごとに $M > 0$ が存在して次の条件を満たします:

$$l_q = \sup_{y \in D}\langle y, q\rangle \le \sup_{y \in D}\|y\|\|q\| \le M\|q\|.$$

従って, $l_q < \langle x_n, q\rangle + 1/n$ for $n \in N$ を満たす D の点列 $\{x_n\}$ がとれます. D は弱コンパクトですから, $\{x_n\}$ はある $u \in D$ に弱収束する部分列 $\{x_{n_j}\}$ を持ちます. この様にして, $l_q \le \lim_j \langle x_{n_j}, q\rangle = \langle u, q\rangle$ を得ます. よって $l_q = \langle u, q\rangle$ です. $\square$

Lemma 6. *Suppose, for each $q \in H$, there is $u \in D$ satisfying* $\sup_{y\in D}\langle y, q\rangle = \langle u, q\rangle$. *Then, for each $q \in H$, there is $w \in D$ such that*

$$\sup_{y\in D}|\langle y, q\rangle| = |\langle w, q\rangle|.$$

Proof. 任意に $q \in H$ を固定します. 仮定から, 次の条件を満たす $u, v \in D$ が存在します:

$$\sup_{y\in D}\langle y, q\rangle = \langle u, q\rangle, \qquad \sup_{y\in D}\langle y, -q\rangle = \langle v, -q\rangle.$$

後者は $\inf_{y\in D}\langle y, q\rangle = \langle v, q\rangle$ を意味し, u, v のいづれかを w とすれば結論を得ます. □

Lemma 7. *Let $x \in H$ and $r > 0$. Then, for $y \in H$, there is $w \in B(x, r)$ such that*

$$|\langle y, w\rangle| \geq r\|y\|.$$

Proof. どんな $B(x, r)$ も有界閉凸集合です. $\|z\| \leq 1$ を満たす $z \in H$ を任意にとります. $\|rz\| = r\|z\| \leq r$ と $x \pm rz \in B(x, r)$ は自明です. 従って $y \in H$ について,

$$\begin{aligned}
\max\{|\langle y, x + rz\rangle|, |\langle y, x - rz\rangle|\} &\geq \tfrac{1}{2}(|\langle y, x + rz\rangle| + |\langle y, x - rz\rangle|) \\
&\geq \tfrac{1}{2}|\langle y, x + rz\rangle - \langle y, x - rz\rangle| = r|\langle y, z\rangle|,
\end{aligned}$$

$$\sup_{v\in B(x,r)}|\langle y, v\rangle| \geq \sup_{z\in B(0,1)}|\langle y, x + rz\rangle| \geq r\sup_{z\in B(0,1)}|\langle y, z\rangle| = r\|y\|.$$

を得ます. Lemmas 5, 6 によって, 次の条件を満たす $w \in B(x, r)$ が存在します:

$$|\langle y, w\rangle| = \sup_{v\in B(x,r)}|\langle y, v\rangle| \geq r\|y\|.$$

□

Baire のカテゴリー定理を使用しないで一様有界性定理を示します.

Theorem 2. *Assume that, for $q \in H$, there is $u \in D$ such that* $\sup_{y\in D}\langle y, q\rangle = \langle u, q\rangle$. *Then D is bounded.*

Proof. 背理法を使用するため, $\sup_{y\in D}\|y\| = \infty$ を仮定します. Lemmas 6 と仮定より, $q \in H$ ごとに $\sup_{y\in D}|\langle y, q\rangle| = |\langle w, q\rangle| < \infty$ を満たす $w \in D$ が存在します.

$z_1 = 0 \in H$, $r_1 = 1/3$ とします. 仮定から $\|y_1\| \geq 3^2$ を満たす $y_1 \in D$ が存在します. Lemma 7 によって, 次の条件を満たす $z_2 \in B(z_1, r_1)$ が存在します.

$$|\langle y_1, z_2\rangle| \geq r_1\|y_1\| = \tfrac{1}{3}\|y_1\|.$$

$r_2 = 1/3^2$ とし $\|y_2\| \geq 3^{2\times 2}$ である $y_2 \in D$ をとり, 次の様な $z_3 \in B(z_2, r_2)$ を選びます.

$$|\langle y_2, z_3\rangle| \geq r_2\|y_2\| = \tfrac{1}{3^2}\|y_2\|.$$

帰納的に, n ごとに下記の条件を満たす点列 $\{y_n\}$, $\{r_n\}$, と $\{z_n\}$ を生成できます.

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad z_1 = 0 \in H, \quad r_n = \tfrac{1}{3^n}, \\
&\qquad y_n \in D, \quad \|y_n\| \geq 3^{2n}, \quad z_{n+1} \in B(z_n, r_n) = B(z_n, \tfrac{1}{3^n}), \\
&\text{(ii)} \quad |\langle y_n, z_{n+1}\rangle| \geq r_n\|y_n\| = \tfrac{1}{3^n}\|y_n\| \geq 3^n.
\end{aligned}$$

(i) によって, $n, k \in N$ について, 次の関係を得ます.

$$\|z_{n+k} - z_n\| \leq \textstyle\sum_{i=1}^{k}\|z_{n+i} - z_{n+i-1}\| = \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{3^{n+i-1}} \leq \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^n}.$$

$\lim_n(1/3^n) = 0$ より, $\{z_n\}$ はコーシー列であり, ある $u \in H$ に収束します. また, 次の

$$\|u - z_n\| = \lim_k\|z_{n+k} - z_n\| \leq \tfrac{3}{2} \times \tfrac{1}{3^n},$$

$$\|u - z_{n+1}\| \leq \frac{3}{2} \times \frac{1}{3^{n+1}} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n} \qquad \text{for} \quad n \in N$$

が成立します. 従って, 後者と (ii) より, $n \in N$ ごとに次の関係を得ます:

$$|\langle y_n, z_{n+1}\rangle| - |\langle y_n, u\rangle| \leq |\langle y_n, z_{n+1} - u\rangle| \leq \|y_n\|\|z_{n+1} - u\| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}\|y_n\|,$$
$$|\langle y_n, u\rangle| \geq |\langle y_n, z_{n+1}\rangle| - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}\|y_n\| \geq \frac{1}{2} \times \frac{1}{3^n}\|y_n\| \geq \frac{1}{2} \times 3^n.$$

この様にして $\sup_{y\in D} |\langle y, u\rangle| = \infty$ を得ますが, $\sup_{y\in D} |\langle y, u\rangle| < \infty$ に矛盾します。 □

Theorem 2 とその前に準備した補題のいくつかは, 証明に有界閉集合が弱コンパクトという性質を使っています. 従って, この証明手法は, そのままでは回帰的 Banach 空間までしか通用しません. しかし, この様な議論に慣れた人であれば, 一般の Banach 空間でも通用する証明に書き直せる様に書いたつもりです.

5. 附記

3 節では, Kohsaka [3] に発表された idea を紹介しました. Kohsaka [2] では, 回帰的 Banach 空間で Bregman distance を使って, Theorem 4 の本質的な拡張が議論されています. そして, 彼の議論は多くのことを示唆します. 高阪の Lemma 3 とその拡張を比較するだけでも, Hilbert 空間の translation の Banach 空間への自然な拡張の形, リゾルベントの意味, など興味深い内容が読み取れます. 機会があれば, Kohsaka [2] についてもお話したいと思います. Ray の定理に関しては, 高橋先生, 青山先生, 高阪先生他による先行研究があります. たとえば, Takahashi, Yao and Kohsaka [7], Aoyama, Iemoto, Kohsaka and Takahashi [1] を参照してください.

参考のために, 1965 年に証明された (1)⇒ (2) の簡潔な証明を提示します. ほとんど自明な次の式は, 私が Hilbert 空間で有用かつ重要だと考える 3 つの等式の中の 1 つです.

$x, y, z \in H$ とすれば, $(x - z) + (z - y) = x - y$ より次の関係が成立します:

(i) $$\|x - y\|^2 = \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 + 2\langle x - z, z - y\rangle.$$

Theorem 8. *Any nonexpansive self–mapping on D has a fixed point if D is bounded.*

Proof. T を D 上の nonexpansive な自己写像とします. $x_1 \in D$ をとり, $\{x_n\}$ と $\{v_n\}$ を次の様に定義される D の点列とします:

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad v_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{i+1} \quad \text{for } n \in N.$$

D が有界閉凸集合ですから, $\{v_n\}$ はある $u \in D$ に弱収束する部分列 $\{v_{n_j}\}$ を持ちます. (i) で $x = Tx_n, y = u, z = Tu$ とすると, $n \in N$ ごとに,

$$\|Tx_n - u\|^2 - \|Tx_n - Tu\|^2 = 2\langle Tx_n - Tu, Tu - u\rangle + \|Tu - u\|^2$$

となります. T が nonexpansive と $x_{n+1} = Tx_n$ より, $n \in N$ ごとに次の不等式

$$\|x_{n+1} - u\|^2 - \|x_n - u\|^2 \leq 2\langle x_{n+1} - Tu, Tu - u\rangle + \|Tu - u\|^2$$

が成立します. この不等式から, $j \in N$ について, 直ちに次の不等式が従います:

$$\frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}(\|x_{i+1} - u\|^2 - \|x_i - u\|^2)$$
$$\leq \frac{1}{n_j}\sum_{i=1}^{n_j}\left(2\langle x_{i+1} - Tu, Tu - u\rangle + \|Tu - u\|^2\right),$$
$$\frac{1}{n_j}(\|x_{n_j+1} - u\|^2 - \|x_1 - u\|^2) \leq 2\langle v_{n_j} - Tu, Tu - u\rangle + \|Tu - u\|^2.$$

D は有界, $\{v_{n_j}\}$ は $u \in D$ に弱収束します. 従って, $j \to \infty$ とすれば, $0 \leq -\|Tu - u\|^2$ を得ます. これは, $u \in F(T)$ を意味します. □

参照論文の著者には, 初出のときのみ敬称をつけ敬意を表しました.

*****

高橋先生には平素からの懇切丁寧なご教示に, 高阪先生には多くの煩わしい質問に親切に回答していただいたことに感謝いたします. また, 明石先生と星野先生には, この論考を発表する機会をいただいたことにお礼申し上げます.

REFERENCES

[1] K. Aoyama, S. Iemoto, F. Kohsaka and W. Takahashi, *"Fixed point and ergodic theorems for λ-hybrid mappings in Hilbert spaces"*, J. Nonlinear Convex Anal. **11** (2010), 335–343.

[2] F. Kohsaka, *"Existence of fixed points of nonspreading mappings with Bregman distances"*, In: Nonlinear Mathematics for Uncertainty and Its Applications, 403-410. Springer, Berlin (2011)

[3] F. Kohsaka, *"Ray's theorem revisited: a fixed point free firmly nonexpansive mapping in Hilbert spaces"*, Journal of Inequalities and Applications (2015).

[4] W. O. Ray, *"The fixed point property and unbounded sets in Hilbert space"*, Amer. Math. Soc., [258], (1980), 531-537.

[5] R. Sine, *"On the converse of the nonexpansive map fixed point theorem for Hilbert space"*, Proc. Amer. Math. Soc., **100** (1987), 489–490.

[6] A. D. Sokal, *"A really simple elementary proof of the uniform boundedness theorem"*, American Mathematical Monthly, **118** (5) (2011), 450-452.

[7] W. Takahashi, J-C. Yao, and F. Kohsaka, *"The fixed point property and unbounded sets in Banach spaces"*, Taiwan. J. Math. **14** (2010), 73