数理解析研究所講究録
第2065巻 2018年 131-139

特異性のある非整数階微分方程式に関する初期値問題の解の存在

Existence of solutions of initial value problems for singular fractional differential equations

川崎敏治　豊田昌史

Toshiharu Kawasaki　Masashi Toyoda

玉川大学工学部マネジメントサイエンス学科
194–8610 東京都町田市玉川学園 6–1–1
Department of Management Science, College of Engineering, Tamagawa University, 6–1–1 Tamagawa-gakuen, Machida-shi, Tokyo 194–8610.

1　はじめに

$[a,b]$ でルベーグ積分可能な関数全体からなる Banach 空間を $L[a,b]=\{u:[a,b]\to\mathbb{R}\mid \|u\|<\infty\}$ とする．ここで $\|u\|=\int_a^b|u(t)|dt$ である．次が成り立つ．

命題 1. $\nu>0$ とする．$n=[\nu]+1$ とする．u を $u\in L[0,b]$ および $D^{\nu}_{0+}u\in L[0,b]$ をみたすものとする．このとき，ある $C_1,C_2,\dots,C_n\in\mathbb{R}$ が存在して

$$I^{\nu}_{0+}D^{\nu}_{0+}u(t)=u(t)+C_1t^{\nu-1}+C_2t^{\nu-2}+\cdots+C_nt^{\nu-n}$$

が成り立つ．

ここで I^{ν}_{0+} および D^{ν}_{0+} は，それぞれ，ν 階 Riemann-Liouville 積分および ν 階 Riemann-Liouville 微分である．I^{ν}_{0+} および D^{ν}_{0+} の定義は，後に記す．

命題 1 は，非整数階微分方程式の解の存在を示す際に重要である．実際，[2] では $0<\nu<1$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示す際，命題 1 にあたる Proposition 2.4 を用いる．[8] では，[2] の Proposition 2.4 を引用して $0<\nu<1$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示している．[1] では $1<\nu\le 2$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示す際，命題 1 にあたる Lemma 2.2 を用いる．[4] では，[1] の Lemma 2.2 を引用して $1<\nu\le 2$ とするときの ν 階微分方程式の解の存在を示している．

[2] の Proposition 2.4 にしても [1] の Lemma 2.2 にしても，詳細な計算は読者に委ねられている．そこで，本論文では読者の便宜を図るため，命題 1 の証明を記す．さらに，命題 1 を使うと得られる定理の例を示す．命題 1 を使って，初期値問題と同値な積分方程式を導く．解の存在の詳細な証明は，例えば [4] を参照されたい．本論文では，命題 1 を使う部分 (定理 1) のみを記す．

2 Riemann-Liouville 積分と微分

本節では Riemann-Liouville 積分と微分を扱う．まずは $\nu > 0$ とするときの ν 階 Riemann-Liouville 積分 I^{ν}_{0+} と ν 階 Riemann-Liouville 微分 D^{ν}_{0+} の定義を記す．

u を $[a,b]$ 上の関数とする．$\nu > 0$ とする．u の ν 階 Riemann-Liouville 積分 I^{ν}_{a+} を

$$I^{\nu}_{a+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^t (t-s)^{\nu-1}u(s)ds$$

で定める．自然数 $n = 1,2,3,\ldots$ に対して $I^{n}_{a+}u(t) = \frac{1}{\Gamma(n)}\int_a^t (t-s)^{n-1}u(s)ds$ である．実際

$$\int_a^t \left(\int_a^{s_1}\left(\int_a^{s_2}\cdots\left(\int_a^{s_{n-1}} u(s_n)ds_n\right)\cdots ds_3\right)ds_2\right)ds_1 = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-s)^{n-1}u(s)ds$$

である．$u \in L[a,b]$ のとき $I^{\nu}_{a+}u$ は存在する．これを次の補題 1 で示す．

$1 \leq p \leq \infty$ とする．$L_p[a,b]$ は $L_p[a,b] = \{u : [a,b] \to \mathbb{R} \mid \|u\|_p < \infty\}$ で定める．ここで $\|u\|_p = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ $(1 \leq p < \infty)$, $\|u\|_\infty = \mathrm{esssup}_{x\in[a,b]}|u(x)|$ である．$L_1[a,b] = L[a,b]$ である．次が成り立つ ([5, Lemma 2.1(a)], [6, Theorem 2.6])．

補題 1. $\nu > 0$ とする．$u \in L[a,b]$ とする．このとき

$$\|I^{\nu}_{a+}u\|_1 \leq \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu\Gamma(\nu)}\|u\|_1$$

が成り立つ．すなわち $I^{\nu}_{0+}u \in L[a,b]$ である．

証明. Fubini の定理 (例えば [7, p.126]) より，積分順序を交換すると

$$\begin{aligned}
\|I^{\alpha}_{a+}u\|_1 &= \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^t (t-s)^{\nu-1}|u(s)|ds\right)dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_s^b (t-s)^{\nu-1}|u(s)|dt\right)ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^b |u(s)|\left(\int_s^b (t-s)^{\nu-1}dt\right)ds
\end{aligned}$$

を得る．ここで $\int_s^b (t-s)^{\nu-1}dt = \frac{1}{\nu}(b-s)^{\nu} \leq \frac{1}{\nu}(b-a)^{\nu}$ より

$$\|I^{\nu}_{a+}u\|_1 \leq \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_a^b |u(s)|\left(\frac{1}{\nu}(b-a)^{\nu}\right)ds = \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu\Gamma(\nu)}\int_a^b |u(s)|ds = \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu\Gamma(\nu)}\|u\|_1$$

を得る． □

$1 < p \leq \infty$ の場合も，補題 1 が成り立つ．すなわち，次が成り立つ ([5, Lemma 2.1(a)], [6, Theorem 2.6]): $1 \leq p \leq \infty$ とする．$\nu > 0$ とする．$u \in L_p[a,b]$ とする．このとき

$$\|I^{\nu}_{a+}u\|_p \leq \frac{(b-a)^{\nu}}{\nu\Gamma(\nu)}\|u\|_p$$

が成り立つ.

関数 u の ν 階 Riemann-Liouville 微分 D^{ν}_{a+} を

$$D^{\nu}_{a+}u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-s)^{n-\nu-1}u(s)ds$$

で定める. ここで $n=[\nu]+1$ であり $[\nu]$ は ν を越えない最大の自然数である. すなわち, n は $n-1\le\nu<n$ をみたす自然数である. Γ はガンマ関数である. 以下 $a=0$ を考える. $\nu>0,\ \beta>0$ のとき

$$I^{\nu}_{0+}t^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+\nu+1)}t^{\beta+\nu},\quad D^{\nu}_{0+}t^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+1-\nu)}t^{\beta-\nu}$$

である. これらは, 補題 2 の証明で用いる. $u\in L[0,b]$ のとき, ほとんどすべての点 t で $D^{\nu}_{0+}I^{\nu}_{0+}u(t)=u(t)$ である (補題 3).

$\nu>0,\ m=1,2,\dots,[\nu]+1$ とする. $u(t)=t^{\nu-m}$ に対して $D^{\nu}_{0+}u=0$ である ([6, p.37]). 実際, $n=[\nu]+1$ とする. $m=1,2,\dots,n$ に対して

$$\begin{aligned}D^{\nu}_{0+}u(t)&=\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\int_0^t(t-s)^{n-\nu-1}s^{\nu-m}ds\\&=\frac{1}{\Gamma(n-\nu)}\frac{d^n}{dt^n}\frac{\Gamma(n-\nu)\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(n-m+1)}t^{n-m}\\&=\frac{\Gamma(\nu-m+1)}{\Gamma(n-m+1)}\frac{d^n}{dt^n}t^{n-m}=0\end{aligned}$$

となる. 2 つめの等号は, $p,q>0$ に対する積分の式

$$\int_a^t(t-s)^{p-1}(s-a)^{q-1}ds=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}(t-a)^{p+q-1}$$

を用いた. この積分の式は, 補題 2 や 補題 3 の証明で用いる.

$[a,b]$ から $\mathbb{R}$ への関数 u が絶対連続であるとは, 任意の $\epsilon>0$ に対して, ある $\delta>0$ および互いに共通部分をもたないある有限個の $[a,b]$ の部分区間 $[a_1,b_1],[a_2,b_2],\dots,[a_n,b_n]$ が存在して

$$\sum_{k=1}^{n}(b_k-a_k)<\delta\Longrightarrow\sum_{k=1}^{n}|u(b_k)-u(a_k)|<\epsilon$$

をみたすときをいう. $u\in L[0,b]$ に対して, $I^1_{0+}u$ は絶対連続であり, ほとんどすべての点 t で $D^1_{0+}I^1_{0+}u(t)=u(t)$ である (例えば, [7, p.189, 定理4]). 特に, 任意の自然数 $n=1,2,3,\dots$ に対してほとんどすべての点 t で $D^n_{0+}I^n_{0+}u(t)=u(t)$ である. これは, 補題 2 や 補題 3 の証明で用いる.

3 命題 1 の証明

本節では, 命題 1 を証明をする.

まず, 次が成り立つ ([5, Corollary 2.1]).

補題 2. $\nu > 0$ とする. ほとんどいたるところ $D_{0+}^{\nu}u = 0$ とする. このとき, ある $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ が存在して, ほとんどすべての点 t で

$$u(t) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \cdots + C_n t^{\nu-n}$$

である. ここで $n = [\nu] + 1$ である.

証明. $D_{0+}^{\nu}u(t) = 0$ とする. すなわち $\frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = 0$ である. このとき $\frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = 0$ である. これより $\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1$ である. また $\frac{d^{n-2}}{dt^{n-2}} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1 t + C_2$ である. 同様に $\frac{d^{n-3}}{dt^{n-3}} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1 t^2 + C_2 t + C_3$ である. ただし $\frac{C_1}{2}$ をあらためて C_1 とした. 以下, 適宜, 定数を置き換える. 繰り返すと

$$\int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds = C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} + \cdots + C_n$$

である. ところで

$$\begin{aligned}
I_{0+}^{\nu} \int_a^t (t-s)^{n-\nu-1} u(s) ds &= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} \left(\int_a^s (s-\tau)^{n-\nu-1} u(\tau) d\tau \right) ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t u(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{\nu-1} (s-\tau)^{n-\nu-1} ds \right) d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t u(\tau) \left(\frac{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n)} (t-\tau)^{n-1} \right) d\tau \\
&= \frac{\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n)} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) d\tau \\
&= \Gamma(n-\nu) I_{0+}^{n} u(t)
\end{aligned}$$

である. また

$$I_{0+}^{\nu}(C_1 t^{n-1} + C_2 t^{n-2} + \cdots + C_n) = C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \cdots + C_n t^{\nu}$$

である. よって

$$\Gamma(n-\nu) I_{0+}^{n} u(t) = C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \cdots + C_n t^{\nu}$$

すなわち, 定数を置き換えて

$$I_{0+}^{n} u(t) = C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \cdots + C_n t^{\nu}$$

を得る. また, ほとんどすべての点 t で $D_{0+}^{n} I_{0+}^{n} u(t) = u(t)$ である. よって

$$D_{0+}^{n}(C_1 t^{\nu+n-1} + C_2 t^{\nu+n-2} + \cdots + C_n t^{\nu}) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \cdots + C_n t^{\nu-n}$$

であるから, ほとんどすべての点 t で

$$u(t) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \cdots + C_n t^{\nu-n}$$

が成り立つ. □

また, 次が成り立つ ([5, Lemma 2.4], [6, Theorem2.4]).

補題 3. $\nu > 0$, $u \in L[0,b]$ とする. $n = [\nu] + 1$ とする. このときほとんどいたるところで

$$D_{0+}^{\nu} I_{0+}^{\nu} u = u$$

である.

証明. 補題 1 より $I_{0+}u$ は存在する. D_{0+}^{ν}, I_{0+}^{ν} の定義および積分順序の交換から

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\nu} I_{0+}^{\nu} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\nu-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^s (s-\tau)^{\nu-1} u(\tau) d\tau \right) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \left(\int_\tau^t (t-s)^{n-\nu-1} (s-\tau)^{\nu-1} u(\tau) ds \right) d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t u(\tau) \left(\int_\tau^t (t-s)^{n-\nu-1} (s-\tau)^{\nu-1} ds \right) d\tau \end{aligned}$$

を得る. また $\int_\tau^t (t-s)^{n-\nu-1}(s-\tau)^{\nu-1} ds = \frac{\Gamma(\nu)\Gamma(n-\nu)}{\Gamma(n)} (t-\tau)^{n-1}$ であるから

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\nu} I_{0+}^{\nu} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} u(\tau) d\tau \\ &= \frac{d^n}{dt^n} I_{0+}^{n} u(t) \\ &= u(t) \end{aligned}$$

がほとんどすべての点 t で成り立つ. □

以上より, 命題 1 を証明できる.

命題 1 の証明. 補題 1 より, $I_{0+}^{\nu} u \in L[0,b]$ である. よって $I_{0+}^{\nu} D_{0+}^{\nu} u - u \in L[0,b]$ である. このとき, 補題 3 より, ほとんどいたるところで

$$\begin{aligned} D_{0+}^{\nu}(I_{0+}^{\nu} D_{0+}^{\nu} u - u) &= D_{0+}^{\nu} I_{0+}^{\nu} D_{0+}^{\nu} u - D_{0+}^{\nu} u \\ &= D_{0+}^{\nu} u - D_{0+}^{\nu} u \\ &= 0 \end{aligned}$$

である. 補題 2 より, ある $C_1, C_2, \ldots, C_n \in \mathbb{R}$ が存在して, ほとんどすべての点 t で

$$I_{0+}^{\nu} D_{0+}^{\nu} u(t) - u(t) = C_1 t^{\nu-1} + C_2 t^{\nu-2} + \cdots + C_n t^{\nu-n}$$

が成り立つ. これより与式を得る. □

4 命題 1 の適用例

命題 1 を使うと得られる定理の例を示そう. f を $[0,1] \times (0,\infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数とする. $\lambda > 0$ とする. $1 < \nu \le 2$ とする. ν 階微分方程式に関する初期値問題

$$\begin{cases} D_{0+}^{\nu} u(t) = f(t, u(t)) \quad \text{(a.a.}t\text{)}, \\ \lim_{t\to 0+} u(t) = 0, \ \lim_{t \to 0+} u'(t) t^{2-\nu} = (\nu - 1)\lambda \end{cases} \tag{1}$$

を考える. このとき, 次が成り立つ.

定理 1. $1 < \nu \leq 2$ とする．$\lambda > 0$ とする．$[0,1] \times (0,\infty)$ から $\mathbb{R}$ への関数 f が *Carathéodory* 条件をみたし，さらに次をみたすとする．

(a) ほとんどすべての点 $t \in [0,1]$ および $u_1 \leq u_2$ をみたす任意の $u_1, u_2 \in (0,\infty)$ に対して

$$|f(t,u_1)| \geq |f(t,u_2)|$$

をみたす．

(b) $0 < \alpha < \lambda$ をみたすある $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{t \to 0+} t \int_0^1 (1-s)^{\nu-2} |f(st, \alpha(st)^{\nu-1})| ds = 0$$

をみたす．

このとき，u が初期値問題 (1) の解であるための必要十分条件は u が積分方程式

$$u(t) = \lambda t^{\nu-1} + \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_0^t (t-s)^{\nu-1} f(s, u(s)) ds. \tag{2}$$

をみたすことである．ただし，u は，任意の $t \in (0,1]$ に対して $\alpha t^{\nu-1} \leq u(t)$ をみたすものとする．

ここで，u が初期値問題 (1) の解であるとは，ある $0 < h \leq 1$ が存在して $u \in C[0,h]$ が (1) をみたすときをいう．f が Carathéodory 条件をみたすとは，任意の $u \in (0,\infty)$ に対して $t \longmapsto f(t,u)$ がルベーグ可測であり，また，ほとんどいたるところの $t \in [0,1]$ に対して，$u \longmapsto f(t,u)$ が連続であるときをいう．

$[0,1]$ 上の関数 a は $(0,1]$ で連続で $\int_0^1 |a(t)| t^\sigma dt < \infty$ をみたすとする．また $\sigma < 0$, $\lambda > 0$ とする．このとき，[3] で扱った初期値問題

$$\begin{cases} u''(t) = a(t) u(t)^\sigma, \\ \lim_{t \to 0+} u(t) = 0, \ \lim_{t \to 0+} u'(t) = \lambda \end{cases} \tag{3}$$

は (1) の例である．実際，$f(t,u) = a(t) u^\sigma$ $((t,u) \in [0,1] \times (0,\infty))$ とする．このとき f は (a) をみたす．$t \in [0,1]$ および $u_1, u_2 > 0$, $u_2 \leq u_1$ とする．$u_1^\sigma \geq u_2^\sigma$ であるから

$$|a(t) u_1^\sigma| \geq |a(t) u_2^\sigma|$$

を得る．すなわち (a) をみたす．また f は (b) をみたす．実際，$\int_0^1 |a(t)| t^\sigma dt < \infty$ より

$$\lim_{t \to 0+} \int_0^t |a(s)| s^\sigma ds = 0$$

である．したがって

$$\int_0^t |a(s)| s^\sigma ds = \int_0^1 |a(ts)| (ts)^\sigma t ds = t^{\sigma+1} \int_0^1 |a(ts)| s^\sigma ds \to 0$$

が $t \to 0+$ のとき成り立つ．これより

$$t\int_0^1 |a(st)\,(\alpha st)^{\sigma}|\,ds = \alpha^{\sigma}t^{\sigma+1}\int_0^1 |a(st)|s^{\sigma}ds \to 0$$

が $t \to 0+$ のとき成り立つ．

定理 1 を証明する．

定理1の証明. u を初期値問題 (1) の解とする．また，任意の $t \in (0,1]$ に対して $\alpha t^{\nu-1} \le u(t)$ をみたすものとする．このとき，ある $0 < h \le 1$ が存在して $u \in C[0,h]$ である．したがって $u \in L[0,h]$ である．また，(b) より，ある $h_0 \le h$ が存在して

$$h_0\int_0^1 (1-s)^{\nu-2}|f(sh_0, \alpha(sh_0)^{\nu-1})|ds < \infty$$

である．したがって

$$\begin{aligned}\int_0^{h_0} |f(s,u(s))|ds &\le \int_0^{h_0}\left(1-\frac{s}{h_0}\right)^{\nu-2}|f(s,u(s))|ds\\ &\le \int_0^{h_0}\left(1-\frac{s}{h_0}\right)^{\nu-2}|f(s,\alpha s^{\nu-1})|ds\\ &= h_0\int_0^1 (1-s)^{\nu-2}|f(sh_0,\alpha(sh_0)^{\nu-1})|ds < \infty\end{aligned}$$

である．したがって $D_{0+}^{\nu}u(t) = f(t,u(t))$ より $D_{0+}^{n}u \in L[0,h_0]$ である．$D_{0+}^{\nu}u(t) = f(t,u(t))$ より，$I_{0+}^{\nu}D_{0+}^{\nu}u(t) = I_{0+}^{\nu}f(t,u(t))$ である．命題 1 より，ある C_1, C_2 が存在して

$$u(t) = I_{0+}^{\nu}f(t,u(t)) + C_1t^{\nu-1} + C_2t^{\nu-2}$$

である．Riemann-Liouville 積分 I_{0+}^{ν} の定義より

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-s)^{\nu-1}f(s,u(s))ds + C_1t^{\nu-1} + C_2t^{\nu-2}$$

である．条件 $\lim_{t\to0+} u(t) = 0$ より $C_2 = 0$ である．実際，条件 (a) と (b) より

$$\begin{aligned}\left|\int_0^t (t-s)^{\nu-1}f(s,u(s))ds\right| &\le \int_0^t (t-s)^{\nu-1}|f(s,u(s))|ds\\ &\le \int_0^t (t-s)^{\nu-1}|f(s,\alpha s^{\nu-1})|ds\\ &= t^{\nu}\int_0^1 (1-s)^{\nu-1}|f(st,\alpha(st)^{\nu-1})|ds\\ &\le t\int_0^1 (1-s)^{\nu-2}|f(st,\alpha(st)^{\nu-1})|ds \to 0\end{aligned}$$

が $t \to 0+$ のとき成り立つ．よって

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t (t-s)^{\nu-1}f(s,u(s))ds + C_1t^{\nu-1}$$

である. このとき

$$u'(t)=(\nu-1)C_1t^{\nu-2}+\frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^t(t-s)^{\nu-2}f(s,u(s))ds$$

である. 条件 (a) より

$$\begin{aligned}\left|u'(t)t^{2-\nu}-(\nu-1)C_1\right| &\le \frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^t\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\nu-2}|f(s,u(s))|ds\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^t\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\nu-2}|f(s,\alpha s^{\nu-1})|ds\\ &= \frac{t}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^1(1-s)^{\nu-2}|f(st,\alpha(st)^{\nu-1})|ds\end{aligned}$$

が成り立つ. また, 条件 (b) より

$$\lim_{t\to 0+}u'(t)t^{2-\nu}=(\nu-1)C_1$$

である. このとき $C_1=\lambda$ である. ゆえに u は積分方程式 (2) をみたす.

u は積分方程式 (2) をみたすとする. 任意の $t\in(0,1]$ に対して $\alpha t^{\nu-1}\le u(t)$ とする. $D_{0+}^{\nu}u(t)=f(t,u(t))$ である. 条件 (a) より

$$\begin{aligned}|u(t)| &\le \lambda t^{\nu-1}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-s)^{\nu-1}|f(s,u(s))|ds\\ &\le \lambda t^{\nu-1}+\frac{1}{\Gamma(\nu)}\int_0^t(t-s)^{\nu-1}|f(s,\alpha s^{\nu-1})|ds\\ &= \lambda t^{\nu-1}+\frac{t^{\nu}}{\Gamma(\nu)}\int_0^1(1-s)^{\nu-1}|f(st,\alpha(st)^{\nu-1})|ds\\ &\le \lambda t^{\nu-1}+\frac{t}{\Gamma(\nu)}\int_0^1(1-s)^{\nu-2}|f(st,\alpha(st)^{\nu-1})|ds\end{aligned}$$

が成り立つ. また, 条件 (b) より $\lim_{t\to 0+}u(t)=0$ である. このとき

$$u'(t)=(\nu-1)\lambda t^{\nu-2}+\frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^t(t-s)^{\nu-2}f(s,u(s))ds$$

である. 条件 (a) より

$$\begin{aligned}\left|u'(t)t^{2-\nu}-(\nu-1)\lambda\right| &\le \frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^t\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\nu-2}|f(s,u(s))|ds\\ &\le \frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^t\left(1-\frac{s}{t}\right)^{\nu-2}|f(s,\alpha s^{\nu-1})|ds\\ &= \frac{t}{\Gamma(\nu-1)}\int_0^1(1-s)^{\nu-2}|f(st,\alpha(st)^{\nu-1})|ds\end{aligned}$$

である. 条件 (b) より $\lim_{t\to 0+}u'(t)t^{2-\nu}=(\nu-1)\lambda$ である. u は初期値問題 (1) の解である. □

参考文献

[1] Z. Bai and H. Lü, *Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 311 (2005), 495–505.

[2] D. Delbosco and L. Rodino, *Existence and uniqueness for a nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematcial Analysis and Applications, 204 (1996), 609–625.

[3] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Existence of positive solution for the Cauchy problem for an ordinary differential equation*, Nonlinear Mathematics for Uncertainly and its Applications, Advances in Intelligent and Soft Computing, 100, Springer-Verlag, Berlin and New York, 2011, 435–441.

[4] T. Kawasaki and M. Toyoda, *Note on Knežević-Miljanović's theorem in a class of fractional differential equations*, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 16 (2015), 2235–2241.

[5] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava and J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, North-Holland Mathematics Studies, 204, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[6] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Translated from the 1987 Russian original, Gordon and Breach Science Publishers, Yverdon, 1993.

[7] 洲之内治男, ルベーグ積分入門, 第3版, 内田老鶴圃新社, 1981.

[8] S. Zhang, *The existence of a positive solution for a nonlinear fractional differential equation*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 252 (2000), 804–812.