

## 対数拡散方程式の解の漸近挙動

下條 昌彦 (Masahiko Shimojo)  
岡山理科大学理学部応用数学科

Department of Applied Mathematics, Okayama University of Science

### CONTENTS

1. 対数拡散方程式の導出	1
1.1. 非中性プラズマ	1
1.2. リッチ流	3
1.3. 気体分子運動論	7
1.4. 薄膜の運動	9
2. 対数拡散方程式の解に対する漸近挙動	12
2.1. 主定理のステートメント	12
2.2. 存在定理と正則性	13
2.3. 曲率流とのアナロジー	17
2.4. 主定理の証明	20
3. 漸近挙動の補足	22
3.1. 前向き自己相似解への収束	22
3.2. Type II 爆発解の構成	23
References	23

### 1. 対数拡散方程式の導出

本節ではタイトルにある対数拡散方程式の物理的な背景や幾何的な意味づけについて紹介する。1.1 節を読めばプラズマ物理の文脈から対数拡散方程式が自然に現れることがわかる。1.2 節では微分幾何学の曲面に関するリッチ流に付随した対数拡散方程式を導出している。また 1.3 節では統計物理学のボルツマン方程式との関係について紹介した。1.4 節では油滴の運動でも関連する方程式が現れることを説明している。なお 2.1 節から始まる解の漸近挙動に関する主結果とその証明アイデアは本節とは独立して読み進めることが可能である。

1.1. 非中性プラズマ. 非中性プラズマとは正か負どちらか片方の電荷を持つ粒子で構成された粒子群のことである。非中性プラズマでは、粒子の閉じ込め時間が中性プラズマに比較して圧倒的に長いことが知られている。そのため長い時間に渡って物理現象を追跡することが可能である。反対電荷との再結合が無いので低エネルギー状態で系を生成、維持することができることなど実験面でも優れた利点を持つ。プラズマは荷電粒子群の運動と電磁場が密接に絡み合った系である。したがって荷電粒子の運動方程式とマクスウェル方程式とを連立されることになる。ここで荷電粒子の運動を記述する方程式の選び方にはいくつかの選択肢があり、通常は流体方程式やボルツマン方程式を採用する。

真空中で広がりゆく電子雲の電荷密度に対する時間発展について考える ([18])。簡単のため電荷の分布は平衡状態にあり、等温マクスウェル分布をしていると仮定する。流体基礎方

程式として連続の式

$$(1.1) \quad \frac{\partial j}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial \tau} = 0,$$

電磁効果に関してはオームの法則

$$(1.2) \quad j = \sigma E = -\sigma \frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

を採用する。荷電粒子はマクスウェル分布

$$(1.3) \quad \rho = n_0 q \exp [q\Phi / k_B T_e]$$

である。ここで  $\rho$  は電荷密度、 $j$  は電流密度で  $E$  は電場、 $\Phi$  は系のポテンシャル、 $k_B$  はボルツマン定数、 $T_e$  は平衡温度、 $\sigma$  は導電率、 $n_0$  は密度、 $q$  は電気素量である。(1.3) を  $z$  で微分して (1.2) に代入すると

$$(1.4) \quad j = -\sigma \frac{k_B T_e}{q} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}.$$

これを (1.1) に代入して  $w = \rho / n_0 q$ ,  $x = z / \lambda_D$ ,  $t = \tau / (\varepsilon_0 / \sigma)$  とおく。ここで  $\varepsilon_0$  は真空の誘電率  $\lambda_D = (\varepsilon_0 k_B T_e / n_0 q^2)^{1/2}$  はデ바이長である。すると以下の対数拡散方程式を得る:

$$(1.5) \quad \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \left( \frac{1}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 \log w}{\partial x^2}.$$

線形熱方程式で基本解を求めるときは前向き自己相似解を探すのであった ([13])。ここでも方程式 (1.5) の自己相似構造を調べて特殊解をまず見つけよう。関数  $w(x, t)$  が (1.5) の解ならば自己相似変換された関数  $w^\lambda(x, t) = \lambda^{2\beta-1} w(\lambda^\beta x, \lambda t)$  も再び (1.5) の解である。 $w^\lambda(x, t) = w(x, t)$  が任意の  $\lambda > 0$  に対して成り立つ解を自己相似解という。ここで  $\beta$  は一意には決まらない。 $\beta$  を決定するには方程式 (1.5) の対称性以外にもう一つ条件が必要である。このような事情は線形熱方程式  $w_t = w_{xx}$  でも起こるが、そのときは総熱量が不変であるという条件を課す ([13])。今の場合、この自己相似変換で  $L^1$  ノルムを変えない変換は  $\beta = 1$  のみである。この変換での前向き自己相似解  $w_f$  は任意の  $\lambda > 0$  に対して  $w_f(x, t) = \lambda w(\lambda x, \lambda t)$  を満たす。よって  $\lambda = 1/t$  を代入したら、ある 1 変数関数  $f = f(y)$  を用いて  $w_f(x, t) = t^{-1} w(x/t, 1) =: t^{-1} f(x/t)$  と書ける。これを (1.5) に代入すると常微分方程式

$$0 = (\log f)'' + y f' + f = \{(\log f)' + y f\}'$$

を得る。ゆえにある積分定数  $C$  があって

$$(1.6) \quad (\log f)' + y f = C$$

物理的に考えて電荷密度  $\rho$  と電流密度  $j$  は遠方で 0 に減衰するはずである。電荷密度の減衰条件から  $\lim_{y \rightarrow \infty} f(y) = 0$ 、電流密度の減衰条件と (1.4) から  $\lim_{y \rightarrow \infty} (\log f)'(y) = 0$  を得る。これを (1.6) に代入したら  $C = 0$  を得る。これを変数分離法で解くと

$$0 = (\log f)' + y f \iff f' = -y f^2 \iff f = \frac{1}{A + y^2/2}.$$

ここで積分定数  $A$  は正の実数。以上から (1.5) の前向き自己相似解

$$(1.7) \quad w_f(x, t; A) = \frac{1}{t} \frac{1}{A + y^2/2} = \frac{2t}{x^2 + 2At^2}$$

を得る。なお定数  $A > 0$  は初期時間の電荷の総量により決まる。

1.2. リッチ流. 1982年ハミルトンはリッチ流と呼ばれる以下の発展方程式を考えた

$$(1.8) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}.$$

ここで  $R_{ij}$  はリーマン計量  $g_{ij}$  に付随するリッチ曲率である. 空間 2 次元のとき共形計量  $g_{ij}dx_i dx_j = w\delta_{ij}dx_i dx_j$  に対して次の関係式を得る:

$$R_{ij} = \frac{R}{2}g_{ij}, \quad R = -\frac{\Delta \log w}{w}.$$

ただし  $R$  はスカラー曲率. これより (1.8) は以下の対数拡散方程式に帰着する.

$$(1.9) \quad \partial_t w = \Delta \log w$$

以下, 平面  $\mathbb{R}^2$  上のリッチ流に対していくつかの特殊解を挙げる. まず最初の解は解が一点に潰れる時刻を  $T$  とすると

$$(1.10) \quad w_s(x, y, t) = \frac{8\lambda(T-t)}{(\lambda+x^2+y^2)^2} \quad \lambda > 0$$

とかけるものである. この解を球面上の計量に持ち上げて書き下すと  $ds^2 = 2(T-t)ds_{\text{can}}^2$  という空間一様な解になる. ここで  $ds_{\text{can}}^2$  は半径 1 の球面の計量のことである. 実際, 原点中心の単位球面  $S^2$  上の点を  $(X, Y, Z) =: S(x, y)$  とし点  $(0, 0, 1)$  を中心とした球面射影を用いて  $\mathbb{R}^2$  と  $S^2$  を対応させれば

$$X = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad Y = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad Z = \frac{-1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

すなわち平面上の距離は拡大率  $2/(1+x^2+y^2)$  で球面上に写される. このことは内分比と等角性に注目したらわかる. よって

$$ds_{\text{can}}^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{4}{(1+x^2+y^2)^2}(dx^2 + dy^2).$$

さて左辺の計量をリッチフローで発展させた解を  $ds^2(t) = r^2(t)ds_{\text{can}}^2$  とすると対応する, ガウス曲率は  $R = r^{-2}(t)$  なので

$$\partial_t r^2(t)ds_{\text{can}}^2 = -2\text{Ric}(ds^2) = -2Rds^2 = -2ds_{\text{can}}^2 \implies r^2(t) = 2(T-t).$$

この計量を射影  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow S^2$  で引き戻すと

$$S^*(ds \otimes ds) = 2(T-t)S^*(dX \otimes dX + dY \otimes dY + dZ \otimes dZ) = \frac{8(T-t)}{(1+x^2+y^2)^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy).$$

以上の導き方はなぜ球と対応させるのかという点が (1.9) だけからは全く謎であり, 天下り的な感じがある. そこで解 (1.10) が方程式 (1.9) の自己相似性から自然に見つかることを説明しよう. 関数  $w$  が解のとき自己相似変換された関数  $w^\lambda(x, y, t) = \lambda^{2\beta-1}w(\lambda^\beta x, \lambda^\beta y, \lambda t)$  も (1.9) の解である. そこで関係式  $w^\lambda(x, y, t) = w(x, y, t)$  が任意の  $\lambda > 0$  に対して成り立つ解を自己相似解という. ここで  $\beta$  は一意には決まらないので, リッチ曲率  $R_{ij}$  が変数変換で不変であるという仮定をさらに課すことにしよう. すると  $\beta = 0$  でないといけない. このスケーリングは放物型スケーリングとよばれている. さてこの変換での後向き自己相似解  $w_s$  とは任意の  $\lambda > 0$  に対して  $w_s(x, y, t) = \lambda^{-1}w_s(x, y, \lambda t)$  を満たす解のことである. 特に  $\lambda = 1/(-t)$  を代入したら,  $t = 0$  で消滅する後ろ向き自己相似解が, ある 1 変数関数  $g = g(x, y)$  を用いて  $w_s(x, y, t) = (-t)w(x, y, -1) =: (-t)g(x, y)$  と書ける. 解がつぶれる時間を  $t = T$  に平行移動すると

$$(1.11) \quad w_s(x, y, t) = (T-t)g(x, y)$$

と書ける. 変数変換  $u(x, y, \tau) = (T - t)^{-1}w(x, y, t)$ ,  $\tau = -\log(T - t)$  と考えると

$$\partial_\tau u = \Delta \log u + u$$

を得る. この方程式の定常解  $g(x, y)$  が後ろ向き自己相似解  $w_s(x, y, t)$  のプロファイルを与える. ここで解  $\log g(x, y)$  が球対称と仮定して良いことが動平面の方法からわかるので  $\log g(x, y) = G(\sqrt{x^2 + y^2})$  とし, 以下のゲルファント方程式を得る:

$$G'' + \frac{1}{r}G' + e^G = \Delta \log g + g = 0.$$

この方程式の解は陽に書き下せて ([30])

$$G(|x|) = \log \frac{8\lambda}{(\lambda + x^2 + y^2)^2} \implies g(x) = \frac{8\lambda}{(\lambda + x^2 + y^2)^2}.$$

これを (1.11) を代入すれば (1.10) を得る. 球面上のリッチ流の任意の解はこのソリトン解に収束する. このことはハミルトンが微分幾何的な手法で示したことであるが, [29] には質量保存型のリッチフローを直接解析する純解析的な証明が紹介されている. 極座標を用いて計算すると以下が示せる:

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} w_s(x, y, t) dx dy = \int_{\mathbb{R}^2} R w_s dx dy = -8\pi.$$

次に典型的なリッチ流の解は Cigar ソリトンである:

$$w_{\text{cig}}(x, y, t) = \frac{1}{\lambda(x^2 + y^2) + e^{4\lambda t}}.$$

この解は  $t \in \mathbb{R}$  で定義されているので全域解である. 解はコンパクトではなく, その積分が非有界である:

$$\int_{\mathbb{R}^2} w_{\text{cig}} dx dy = \infty.$$

Cigar ソリトンの見つけ方について説明する. リッチ流 (1.8) は対称性が高く, 放物型スケールリング以外にも微分同相写像による不変性もあることに注目すると良い. まず微分同相 1 パラメーター群  $\varphi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  に対して対応するベクトル場  $Y$  を考える. 固定された計量  $\mathbf{g}_0$  とベクトル場  $Y$  で

$$-2\text{Ric}(\mathbf{g}_0) = \mathcal{L}_Y \mathbf{g}_0$$

が成り立つとき  $\varphi_t^* \mathbf{g}_0$  は (1.8) の解になり, 定常リッチソリトンと呼ばれる. また  $Y$  がある関数  $f$  の勾配ベクトル場として  $Y = \text{grad}(f)$  と書けるとき, その定常ソリトンを定常勾配型ソリトンという. ここで  $\varphi_t^*$  はテンソルの引き戻しであり,  $\mathcal{L}_Y$  はベクトル場  $Y$  に沿ったリー微分でその定義は次式で与えられる:

$$\mathcal{L}_Y \mathbf{g}_0 := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi_t^* \mathbf{g}_0.$$

簡単のため定常勾配型ソリトン解を球対称と仮定する. このときユークリッド極座標  $(r, \theta)$  を用いると  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  に対して  $\mathbf{g}_0 = w_0(dx^2 + dy^2) = w_0(r)(dr^2 + r^2 d\theta^2)$ . ここで計量の第 1 成分を正規化するため, 測地極座標  $(s, \theta)$  を

$$(1.12) \quad s = \int_0^r \sqrt{w_0} dr, \quad \phi(s) := r\sqrt{w_0}$$

によって導入する. この座標ではリーマン計量  $\mathbf{g}_0$  は以下のように書き下せる:

$$\mathbf{g}_0 = w_0(dx^2 + dy^2) = w_0(dr^2 + r^2 d\theta^2) := ds^2 + \phi(s)^2 d\theta^2.$$

さて  $Y = \text{grad}(f)$  と関数  $f$  の球対称性から  $Y = f'(s)\partial_s$  と書ける. そこでこの計量にリー微分  $\mathcal{L}_{f'(s)\partial_s}$  を作用させると, テンソル積に対するライブニッツ則から

$$\mathcal{L}_Y \mathbf{g}_0 = \mathcal{L}_{f'(s)\partial_s} [ds \otimes ds + \phi(s)^2 d\theta \otimes d\theta] = 2f''(s)ds \otimes ds + 2f'(s)\phi(s)\phi'(s)d\theta \otimes d\theta$$

一方,  $R = -\phi''(s)/\phi(s)$  が知られているから

$$-2\text{Ric}(\mathbf{g}) = -2\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}\mathbf{g}_0 = -2\frac{\phi''(s)}{\phi(s)}ds \otimes ds - 2\phi''(s)\phi(s)d\theta \otimes d\theta.$$

これより次の連立常微分方程式を得る:

$$(1.13) \quad -\frac{\phi''(s)}{\phi(s)} = f''(s), \quad -\phi''(s) = f'(s)\phi'(s).$$

第1式に第2式を代入して  $f''/f' = \phi'/\phi$  を得る. この式の両辺を  $s$  に関して積分すれば  $f' = 2a\phi$  を得る. これを (1.13) の第2式に代入して積分すると

$$\phi' = -a\phi^2 + b$$

を得る. ここで  $a, b$  は積分定数である. 表示を簡単にするため  $a = b = 1$  とする. 境界条件  $\phi(0) = 0$  を課すと

$$\phi(s) = \tanh(s), \quad f(s) = 2 \log \cosh(s).$$

(1.12) に代入して積分すると関数  $s(r)$  の以下の微分方程式が得られる:

$$\tanh(s) = \phi(s) = r\sqrt{w_0} = r\frac{ds}{dr}.$$

これを変数分離法で解くと

$$r = \sinh s, \quad w_0 = \frac{1}{\cosh^2(s)} = \frac{1}{1+r^2}, \quad f = -\log(1+r^2).$$

よって

$$w_0 = \frac{1}{1+x^2+y^2},$$

$$Y = f'(s)\partial_s = -2 \tanh s \frac{\partial r}{\partial s} \partial_r = -2 \frac{\tanh s}{\sqrt{w}} \partial_r = -2r\partial_r = -2(x\partial_x + y\partial_y).$$

またベクトル場  $Y$  に対応する1パラメーター微分同相は  $\varphi_t(x, y) = (e^{-2t}x, e^{-2t}y)$  なので, 引き戻しのテンソル積に関する性質から Cigar ソリトン

$$\varphi_t^* \mathbf{g}_0 = \frac{1}{1+(e^{-2t}x)^2+(e^{-2t}y)^2} d(e^{-2t}x) \otimes d(e^{-2t}x) = \frac{1}{e^{4t}+x^2+y^2} (dx^2 + dy^2)$$

を得る. なお曲面上の定常勾配型ソリトンで曲率が正のものは Cigar ソリトンしかないことが知られている. この事実についてはたとえば [7] の Corollary 4.9 を見よ. 最後の例としてカスプソリトンという  $L^1$  有界な解

$$(1.14) \quad w_{\text{cusp}}(r, t) = \frac{2t}{r^2 \log^2 r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 1$$

がある. さてコーシー問題

$$(1.15) \quad \begin{cases} \partial_t w = \Delta \log w, & x \in \mathbb{R}^2, t \in [0, T), \\ w(x, y, 0) = w_0 \geq 0, & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

を考える。まず  $\|w\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \infty$  とする。このとき任意の  $\alpha \geq 0$  に対して解  $w^\alpha$  が存在して

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} w^\alpha dx dy = -2\pi(2 + \alpha).$$

この解の存在時間は  $T_\alpha := \frac{1}{2\pi(2+\alpha)} \int_{\mathbb{R}^2} w_0 dx dy$  と表せる。特に可積分な初期値に対する任意の解は、その存在時刻  $T_{\max}$  に関して不等式  $T_{\max} \leq \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} w_0(x) dx dy$  を満たす。この不等式に対して等号を成り立たせる解を最大解 (maximal solution  $\alpha = 0$ ) という。最大解の曲率は Type II とよばれる非自己相似的な爆発を起こし、適当にスケールすると遠方ではカスプソリトン、内部では Cigar ソリトンになることが知られている。すなわち最大存在時刻での平面上の最大解の漸近挙動は以下で与えられる

(i) 外部解はカスプソリトン:

$$u(x, t) \approx \frac{2T}{(x^2 + y^2) \log^2(\sqrt{x^2 + y^2})}, \quad (T - t) \log \sqrt{x^2 + y^2} > T$$

(ii) 内部解は自己相似変換をした Cigar ソリトン:  $\phi(r) = 2T^{-1}/(r^2 + b)$  に対して

$$u(x, t) \approx (T - t)^2 e^{-\frac{2T}{T-t}} \phi(e^{-\frac{T}{T-t}} \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (T - t) \log \sqrt{x^2 + y^2} < T.$$

$\alpha = 2$  のときは  $S^2$  上のリッチ流に対応する。それ以外 ( $\alpha \neq 0, 2$ ) の解は Orbifold という幾何的な対象である。球対称なときは  $\lim_{r=|x| \rightarrow \infty} r(\log w^\alpha)_r = -(2 + \alpha)$  を仮定することで、上のすべての解を拾うことが出来る。大事なことは対数拡散方程式は多孔性媒質方程式のような拡散がゆっくりな方程式とは違い、初期値が遠方で 0 に減衰しているというだけでは解が一意に定まらないことである。積分量や遠方の decay に制限することにより解が一意に求まる。なお初期値が必ずしも  $L^1$  でなくても解の存在までならわかる。平面上のリッチフローの詳細な性質や最大解の接合漸近展開については Daskalopoulos-Hamilton-Sesum-del Pino らにより調べられている ([8, 9])。

注意 1. カスプソリトン (1.14) は 1 次元の問題 (1.5) の解 (1.7) を用いて簡単に構成される。実際、 $r^2 W(r, t) = w(x, t)$ ,  $x = \log r$  という変換を施すと (1.5) から 2 次元の対数拡散方程式

$$W_t = \frac{1}{r} (r(\log W)_r)_r = \Delta(\log W)$$

が得られる。前向き自己相似解  $w_f(x, t) = 2t/x^2$  に対しカスプソリトン  $w_{cusp}(r, t)$  が対応する。同様に最大解を 1 次元の問題 (1.5) に変換すると

(i) 外部 (右側) 解は前向き自己相似解:

$$w(x, t) \approx \frac{2T}{x^2}, \quad x > T/(T - t)$$

(ii) 内部 (左側) 解は

$$w(x, t) \approx \frac{2T^{-1}(T - t)^2}{1 + b e^{\frac{2T}{T-t} - 2x}}, \quad x < T/(T - t).$$

ちなみに無限遠では境界条件  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_x(\log w) = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \partial_x(\log w) = 0$  が成立。

1.3. 気体分子運動論. 気体分子運動を記述する数学モデルとして, ボルツマン方程式

$$(1.16) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \mathbf{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll.}}$$

がある.  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$  は粒子の位置,  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^d$  は運動量,  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^d$  は衝突を除いて粒子に働く外力,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  は  $2d$  次元空間  $(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  中の分布関数である. ここで分布関数とは気体分子の集団から拾った1個の分子が  $\mathbf{x}$  と  $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$  の間の座標で  $\mathbf{p}$  と  $\mathbf{p} + d\mathbf{p}$  の間の運動量をもつ確率  $\times$  粒子密度を  $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{x}d\mathbf{p}$  で与える関数のことである. (1.16) の左辺にあるドリフト項は

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{p}(t), t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

と  $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{v}$ , および運動方程式  $d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}$  からしたがう. (1.16) の右辺は衝突項と呼ばれる. 考える粒子の相互の衝突で  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  なる運動量をもつ2個の粒子が衝突して  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$  の状態に移る遷移確率  $\Phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$  を用いれば衝突項は

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\text{coll.}} = & - \iiint \Phi(\mathbf{p}, \mathbf{p}_2; \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2) f(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}_2) d\mathbf{p}_2 d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 \\ & + \iiint \Phi(\mathbf{p}'_1; \mathbf{p}'_2, \mathbf{p}, \mathbf{p}_2) f(\mathbf{p}'_1) f(\mathbf{p}'_2) d\mathbf{p}'_1 d\mathbf{p}'_2 d\mathbf{p}_2. \end{aligned}$$

ここで式が余りに長くなるので変数  $\mathbf{x}$  を省略してある. またボルツマンの議論にしたがひ, 着目する粒子の存在する確率分布として, 衝突相手がいなかったときのものを採用している (衝突数算出の仮定). また力学的な衝突が何度起きても後の衝突には何も影響はなく, 衝突数算出の仮定が破綻することがないことも仮定している (分子的混沌状態の仮定). この仮定は物理的には衝突の影響が瞬時に消え去ってしまうという意味である.

ボルツマン方程式と共通した性質を多くもつ比較的容易に扱えるモデルが多くの人達によって考えられている. その中でも対数拡散方程式と関係するのは Carleman 模型とよばれるものである. 外力のない1次元の稀薄気体の分子運動を考える. すなわち  $\mathbf{F} = 0$ . 各分子は一点に分布するとし, 2個の分子しか同時には衝突しないと仮定する. 分子の総数を  $n$  とし, さらに各気体の速度は離散的な値  $v_i = \pm 1 (i = 1, \dots, n)$  しかとらないと仮定する. 運動エネルギー保存則から2分子の衝突による速度の入れ替えとして,  $\{+1, -1\} \Rightarrow \{-1, +1\}$  を考えるモデルと  $\{-1, -1\} \Rightarrow \{+1, +1\}$  を考えるものがある. 後者が Carleman 模型である. なお前者のモデルは自明な解しかないことが知られている. 後者のモデルでは運動量が保存されないので現実的でないと思われるかも知れないが, ボルツマン方程式の解の挙動をよく反映する方程式として知られている.

空間  $d = 1$  次元で  $n$  粒子の相空間を考える. 以下, 表記を簡単にするため分子の質量を  $m = 1$ , すなわち  $\mathbf{p} = \mathbf{v}$  とする. また相空間内の粒子の位置, 速度を  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  と書き表す. そして  $n$  分子の分布関数のことを, 上と同じ記号になってしまうが,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  と書くことにする. 遷移確率を求めるために  $i$  番目の分子と  $j$  番目の粒子を考える. 分子に大きさはないと考えているので両方の粒子が同じ点に来なければ衝突は起きない. ゆえに遷移確率の空間成分はデルタ関数を用いて  $\alpha_n \delta_{x_i - x_j}$  として書ける. ここで  $\alpha_n$  は粒子数に依存する定数であり, 関数  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  を確率分布として正規化するための定数である. この定数  $\alpha_n$  の具体的な値は後で決まる. 衝突に関する条件から衝突前の速度  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$  の  $i$  成分と  $j$  成分は同符号であり, 衝突後にその両方の符号が入れ替わる. そうして得られるベクトルを  $\mathbf{v}'_{ij} := (v_1, \dots, -v_i, \dots, -v_j, \dots, v_n)$  と書くことにする. 速度は離散値  $\{\pm 1\}$  しかとらないので, 運動量に関する積分は数列の総和記号になる.

$$(1.17) \quad \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \alpha_n \sum_{v_i, v_j > 0, i \neq j} \delta_{x_i - x_j} [f(\mathbf{v}'_{ij}) - f(\mathbf{v})]$$

さて両辺を  $x_2, v_2, x_3, \dots, x_n, v_n$  で積分すればどのような微分方程式が得られるかを考える。以下では  $m \leq n$  に対する周辺確率分布を  $f_m$  と表すことにする。すなわち  $f_m$  は位置と速度の  $m$  個のペアを選んで積分して得られる関数のことである。(1.17)の左辺に

$$f_1(x_1, v_1, t) = \int \cdots \int f(x_1, v_1, \dots, x_n, v_n) dx_2 dv_2 \cdots dx_n dv_n$$

を代入すれば関数  $f_1$  が満たす後述の微分方程式の左辺が得られる。さらに(1.17)の右辺の積分を計算を行う。そのために分布関数を  $v_2, \dots, v_{j-1}, v_{j+1}, \dots, v_n$  について積分した

$$f^{(2)}(x, v_1, v_j, t) = \int \cdots \int f(x_1, v_1, \dots, x_n, v_n) dv_2 dv_3 \cdots dv_{j-1} dv_{j+1} \cdots dv_n$$

という記号を導入すると便利である。実際の積分を遂行すると

$$\begin{aligned} & \int \cdots \int \sum_{v_i, v_j > 0, i \neq j} \delta_{x_i - x_j} [f(\mathbf{v}'_{ij}) - f(\mathbf{v})] dx_2 dv_2 \cdots dx_n dv_n \\ &= \int \cdots \int \sum_{v_i = v_j, i \neq j} [f(x_i = x_j; -v_i, -v_j) - f(x_i = x_j; v_i, v_j)] dx_2 dv_2 \cdots \widehat{dx}_j \cdots dx_n dv_n \\ &= \int \cdots \int \sum_{v_i = v_j, j=2 \cdots n} [f^{(2)}(x_i = x_j; -v_i, -v_j) - f^{(2)}(x_i = x_j; v_i, v_j)] dx_2 dx_3 \cdots \widehat{dx}_j \cdots dx_{n-1} dx_n dv_j \\ &= (n-1)[f_2(x_1, -v_1; x_1, -v_1) - f_2(x_1, v_1; x_1, v_1)] \end{aligned}$$

ここで  $\widehat{dx}_j$  は  $x_j$  に関する積分が除いてあることを意味する。これより

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = \alpha_n (n-1) [f_2(x_1, -v_1; x_1, -v_1) - f_2(x_1, v_1; x_1, v_1)]$$

を得る。このとき分子の分布状態  $f(x, \mathbf{v}, t)$  は次の方程式で記述される; 分子的混沌状態の仮定より各粒子の衝突の影響が瞬時でなくなるので, 2分子の分布関数は衝突相手がいないと思っただ場合の分布の積  $f_2(x_1, v_1, x_2, v_2, t) = f_1(x_1, v_1, t) f_1(x_2, v_2, t)$  になる。  $\alpha_n = 1/n$  において分子数について  $n \rightarrow \infty$  の極限を考えると Carleman モデル

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} = f_1^2(x_1, -v_1, t) - f_1^2(x_1, v_1, t)$$

を得る。ここで  $v = \pm 1$  なので, この方程式は連立の一階双曲型方程式になる。この方程式の解析については, たとえば [20, 22] を見よ。以下  $f_1(x_1, v_1, t) = p(x, v, t)$  とし添え字は書かないことにする。特異極限を考えると次のようにパラメーターを入れる

$$\frac{\partial p}{\partial t} + v \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\varepsilon} \{p^2(x, -v, t) - p^2(x, v, t)\}.$$

形式的な級数  $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \cdots$  がこの方程式の解とすると漸化式

$$\frac{\partial p_{n-1}}{\partial t} + v \frac{\partial p_{n-1}}{\partial x} = \sum_{i+j=n} p_i(x, -v, t) p_j(x, -v, t) - p_i(x, v, t) p_j(x, v, t).$$

を得る。  $p_{-1} \equiv 0$  より  $n = 0$  のときは左辺は 0。よって右辺で  $i = j = 0$  を計算して  $p_0^2(x, -v, t) = p_0^2(x, v, t)$  を得る。  $p$  は確率分布なので  $p_0 \geq 0$  としてよいから,  $p_0(x, -v, t) =$



$p_0(x, v, t)$  を得る. すなわち  $p_0$  は速度に関して偶関数である. 次に  $n = 1$  を考えると

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \frac{\partial p_0}{\partial t} + v \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 2\{p_0(x, -v, t)p_1(x, -v, t) - p_0(x, v, t)p_1(x, v, t)\} \\ &= 2p_0(x, v, t)\{p_1(x, -v, t) - p_1(x, v, t)\}. \end{aligned}$$

左辺は  $v$  に関して偶関数と奇関数の和であり, 右辺は  $v$  に関して奇関数である. ゆえに  $\partial p_0/\partial t$  は偶関数かつ奇関数, すなわち  $\partial p_0/\partial t \equiv 0$ . これは  $p_0$  が  $p_0(x, v, t) = p_0(x, v)$  と表せることを意味する. この式を (1.18) に代入して

$$v \frac{\partial p_0}{\partial x} = 2p_0(x, v)\{p_1(x, -v, t) - p_1(x, v, t)\} = -4p_0(x, v)(p_1)_{\text{odd}}(x, v, t)$$

式を整理すると

$$(1.19) \quad (p_1)_{\text{odd}}(x, v, t) = -\frac{v}{4p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x}.$$

さて  $n = 2$  を考えると

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_1}{\partial t} + v \frac{\partial p_1}{\partial x} &= 2\{p_2(x, -v, t)p_0(x, -v, t) - p_2(x, v, t)p_0(x, v, t)\} + \{p_1^2(x, -v, t) - p_1^2(x, v, t)\} \\ &= 2p_0(x, v, t)\{p_2(x, -v, t) - p_2(x, v, t)\} + \{p_1^2(x, -v, t) - p_1^2(x, v, t)\} \end{aligned}$$

であり, 右辺は  $v$  に関する奇関数になる. そこで両辺の偶関数の部分だけを抜き出すと

$$\frac{\partial (p_1)_{\text{even}}}{\partial t} = -v \frac{\partial (p_1)_{\text{odd}}}{\partial x}$$

これに (1.19) を代入する.  $v = \pm 1$  ならば  $v^2 = 1$  なので

$$\frac{\partial (p_1)_{\text{even}}}{\partial t} = \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right).$$

一方,  $p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots$  に対して  $p_0$  が  $v$  に関して偶関数であること,  $\partial p_0/\partial t \equiv 0$  に気をつけて  $\varepsilon^2$  以上の項を無視すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial p_{\text{even}}}{\partial t} &= \frac{\partial (p_0)_{\text{even}}}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial (p_1)_{\text{even}}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial (p_1)_{\text{even}}}{\partial t} \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{p_0} \frac{\partial p_0}{\partial x} \right) = \frac{\varepsilon}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{(p_0)_{\text{even}}} \frac{\partial (p_0)_{\text{even}}}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\varepsilon}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{p_{\text{even}}} \frac{\partial p_{\text{even}}}{\partial x} \right) = \frac{\varepsilon}{4} \frac{\partial^2 (\log p_{\text{even}})}{\partial x^2}. \end{aligned}$$

$x \mapsto x/\sqrt{\varepsilon}$  を施せば対数拡散方程式を得る. この特異極限の収束の証明に関しては, [16, 17, 23] で議論されている.

#### 1.4. 薄膜の運動. 無次元化した Navier Stokes 方程式

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{v}$$

を考える. ここで  $\mathbf{v}(x, y, z)$  は流体の流速,  $R_e = \rho V l / \nu$  はレイノルズ数であり,  $p(x, y, z)$  は圧力とする. また  $l$  は現象の特徴的な長さ,  $V$  は特徴的な流速,  $\nu$  は粘性係数,  $\rho$  は流体の密度である. 一般に壁から離れたところでは速度勾配はそれほど大きくない. ゆえに  $R_e \gg 1$  ならば壁から離れたところでは, 完全流体の問題として扱い,  $\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\nabla p$  を考える. 一方, 境界層では速度勾配が大きいため, たとえレイノルズ数が大きいたとしても拡散項が無視でき

ない。よって方程式  $0 = -\nabla p + \frac{1}{R_e} \Delta \mathbf{v}$  を考察する必要が生じる。この式を無次元化する前のもともとの座標で書くと

$$(1.20) \quad 0 = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{v}$$

となる。本節のトピックである薄膜の運動は流体全体が固体相である境界に近いので、(1.20) を考える必要がある。さらに固体の上に垂らされた油滴の三重点は接触角のある運動では、明らかに固体/液体/気体の境目での流速はゼロではない。よって no-slip 境界条件  $\mathbf{v} = 0$  を界面全体に課するのは得策ではない。三相の境目の点を自由境界問題の設定で考えなくてはならない。そこで Navier の slip 境界条件を考えることになる。液滴の高さを  $z = h(x, y, t)$  としたとき、固相  $z = 0$  で流速  $\mathbf{v} = (u(x, y, z, t), 0, 0)$  が  $u = k(h) \partial_z u$  を満たすと仮定する。ここで  $k(h) \propto h^{-1}$  は slip parameter とよばれる。また界面  $z = h(x, y, t)$  では  $\nu \partial u / \partial z = 0$  である。これは液相と気相の間では速度勾配を引き起こすことがないため粘性応力  $\nu \partial u / \partial z$  が生じないからである。

方程式 (1.20) を見ても分かるように、この運動の駆動力は圧力勾配である。圧力として熱力学的な表面張力や重力が関与しているだろう。さらに、化学反応やマイクロサイズの分子間力の効果を加味する方向性も薄膜運動の解析では不可欠である。文献 [12] にはいろいろなモデルが紹介されているが、ここでは液相・固相の間に長距離ファンデルワールス力を考えた方程式を採用する。気相と液相の間に働き、液相の厚さを保つために働く圧力を分離圧

$$(1.21) \quad \Pi(h) = A_D h^{D-5}$$

という。ここで  $D$  は薄膜を支える空間の次元で、 $A_D$  はハマカー定数と呼ばれる。ハマカー定数は液体と固体の相互作用と次元で決まる定数でその符号はファンデルワールス力が引力か斥力であるかによって決まる ([12] p93)。薄膜の運動は  $z$ -方向の空間分布が非常に小さいことが特徴的である。この仮定のもとで毛管数  $C_a = 3\nu V / \gamma$  ([12] p121)、レイノルズ数  $R_e = \rho V H / \nu$  が小さいとして Navier-Stokes 方程式を漸近展開する。ただし、 $\nu$  は粘性係数、 $\gamma$  は表面張力、 $V$  は薄膜の特徴的な速度、 $H$  は薄膜の特徴的な高さである。また毛管数  $C_a$  は粘性力と毛管力が競合する単位長さあたりの力を意味する。さて漸近展開後に得られる方程式は以下で与えられる ([11])。

$$(1.22) \quad \begin{cases} h_t + \nabla \cdot (f(h)(\nabla \Delta h - \nabla g(h))) = 0, \\ f(h) = h^3 + b^{3-p} h^p, \quad g(h) = (C_a)^{1/2} h + C \Pi(h). \end{cases}$$

なお定数  $b$  は無次元化した滑り距離である。また  $C$  は薄膜の特徴的な高さ  $H$  とハマカー定数に依存する定数。なおパラメーター  $b, p$  の取り方は物理学者によってさまざまである。

ここでは [12] の本に説明されている次元解析を用いて (1.22) がなぜ現れるかを説明しよう。簡単のため、流体は  $x$  方向に薄く広がっておりその方向に一次元的に動くものとし  $y$  軸方向には同じ形状をしているとする。また  $y$  方向は長さ 1 だと仮定する。残った  $z$  軸方向に薄膜の高さがあるものとする。速度場は  $x$  方向に沿って一定と考える、すなわち  $u = u(z)$  とする。この流れは圧力の勾配によって引き起こされるが、いま速度場が水平なので  $x$  方向の勾配のみだと考えればよい。この設定のもとでは (1.20) の  $x$  成分は以下の方程式になる

$$-\frac{\partial p(x, z)}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z^2} = 0.$$

ここで  $L$  を薄膜の横幅 (大きい) とし、 $H$  を薄膜の高さ (小さい) をあらわす特徴的なスケールとし  $V$  は水平方向の特徴的な速さとする

$$\nu \frac{V}{H^2} \sim \frac{\Delta p}{L} \implies V \sim \frac{H^2 \Delta p}{\nu L}.$$

さて単位時間当たりどれだけの流体が流れるかを表す流量  $Q = \int_0^{h(x,t)} u(z) dz$  は以下の関係式を満たす:

$$Q \sim HV = \frac{H^3 \Delta p}{\nu \frac{L}{L}}.$$

特徴的な圧力  $\Delta p$  は重力  $-\rho g H$ , 表面張力  $\gamma H/L^2$ , 分離圧  $-\Pi(H)$  の和であるから

$$(1.23) \quad Q \sim HV = \frac{H^3}{\nu} \left( -\frac{\rho g H + \Pi(H)}{L} + \frac{\gamma H}{L^3} \right) \Rightarrow Q \propto h^3 \left( -\frac{\partial(h + \Pi(h))}{\partial x} + \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right).$$

ただし簡単のため物理係数は全て 1 とした. 一方, 位置  $x$  と  $x + dx$  の間にある流体の体積は単位時間当たり  $\partial_t h dx$  減るので体積保存式

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial t}$$

が成り立つ. これに (1.23) を代入する. 定数倍は無視すると

$$h_t + \partial_x [h^3 \{ \partial_x^3 h - \partial_x (h + \Pi(h)) \}] = 0$$

を得る. 係数の詳細な値は境界条件を加味して, ここで行った議論を行えば決まる ([11]). だが数学の解析では定数はすべて正規化されるので, この形で扱うことが多い. ここで説明した近似法は潤滑近似とよばれている. 重力項を除くと薄膜を扱うときの典型的なモデル:

$$(1.24) \quad h_t + \nabla \cdot (f(h)(\nabla \Delta h - \nabla \Pi(h))) = 0, \quad f(h) = h^3$$

を得る. なお  $D = 2$  のとき分離圧の式 (1.21) よりこれは空間 4 階微分と超速拡散項が含まれる方程式になる. さらに分離圧も忘れて, 表面張力に由来する 4 階微分だけ残した方程式を考える. 簡単な計算により

$$h_t + \nabla \cdot (f(h)(\nabla \Delta h)) = 0$$

に対して質量保存の関係

$$\frac{d}{dt} \int h(x, t) dx = 0,$$

表面張力エネルギーの散逸<sup>1</sup>

$$\frac{d}{dt} \int |\nabla h(x, t)|^2 dx = - \int f(h) |\nabla \Delta h(x, t)|^2 dx \leq 0,$$

エントロピーの散逸

$$\frac{d}{dt} \int G(h(x, t)) dx = - \int |\Delta h(x, t)|^2 dx \leq 0$$

が成り立つ. ただし関数  $G$  は  $G''(h) = 1/f(h)$  を満たすものであればよい. なお  $f(h) = h$  のときは  $G(h) = h \log h$  となるからエントロピーとよばれている. Bernis-Friedman [5] はこれらの量を用いて  $D = 1$  次元の問題を一般化した方程式

$$h_t + (h^n h_{xxx})_x = 0, \quad h_x(\pm 1) = h_{xxx}(\pm 1) = 0$$

に対してどのような場合に正値性が保たれるかや, 自由境界が広がるかどうかなどを解析している. 一方,  $D = 2$  のときに 4 階微分を無視して, 分離圧の項だけ残すと (1.21) と (1.24) から再び対数拡散方程式 (2.1) が得られる.

<sup>1</sup> $(x, h(x, t))$  とすると微小面積素片は  $dA = \sqrt{1 + |\nabla h|^2} dx$  となる. 薄膜など  $|\nabla h|$  が小さいときは変形による表面張力は  $\int |\nabla h|^2 dx$  で与えられると思ってよい.

## 2. 対数拡散方程式の解に対する漸近挙動

## 2.1. 主定理のステイトメント. 対数拡散方程式の初期境界値問題

$$(2.1) \quad \begin{cases} \partial_t w = \partial_x^2(\log w), & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_x(\log w) = \gamma_-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \partial_x(\log w) = -\gamma_+, & t > 0, \\ w(x, 0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を考える. ただし  $\gamma_-, \gamma_+ \in (0, \infty)$  であり, 初期値は  $w_0 \in L^1(\mathbb{R})$  なる滑らかな正値関数. この初期値問題の適切性は Rodriguez-Vazquez [24] により調べられており, 解の一意性を保証するには上のような無限遠境界条件が不可欠である. 古典解の最大存在時刻は  $T = (\gamma_- + \gamma_+)^{-1} \|w_0\|_{L^1(\mathbb{R})}$  であり, このことは

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} w(x, t) dx = -(\gamma_- + \gamma_+) \implies \int_{\mathbb{R}} w(x, t) dx = (\gamma_- + \gamma_+)(T - t)$$

から見て取れる. 我々は問題 (2.1) に対して漸近挙動と凸性に関する以下の結果を得た ([25]).

**定理 1 (主定理).** 関数  $u(x, \tau) = e^\tau w(x, T - e^{-\tau})$  は  $\tau \uparrow \infty$  ( $t \uparrow T$ ) のときある進行波解に一樣収束する. またある時刻  $t_0 < T$  があって  $\log w(\cdot, t)$  は任意の  $t \in (t_0, T)$  に対して上に凸.

曲率流とリッチ流とは綺麗な対応があることを説明する. 1.2 節に説明したように平面

TABLE 1. 対数拡散方程式と曲率流との類比

方程式	対数拡散 (2.1)	曲率流 $V = -k$
弧長 $s$	$\int_{-\infty}^x w dx$	$\int_{l_-(t)}^x \sqrt{1 + w_x^2} dx$
偏角 $\theta$	$\partial_s w = \partial_x(\log w)$	$\arctan(w_x)$
曲率 $k := \partial_s \theta$	$-\partial_x^2(\log w)/w$	$-w_{xx}/(1 + w_x^2)^{3/2}$
幾何的 PDE	$w_t/w = -k$	$w_t/(1 + w_x^2)^{1/2} = -k$

上の対数拡散方程式  $\partial_t w = \Delta(\log w)$  は  $\mathbb{R}^2$  上のリッチ流  $\partial_t g_{ij} = -2R_{ij} = -Rg_{ij}$  の問題において共形計量  $g_{ij} = w\delta_{ij}$  の時間発展方程式として現れる. ここで  $R = -\Delta(\log w)/w$  はスカラー曲率である. 我々の問題 (2.1) は  $\mathbb{R}$  上のリッチ流と解釈できる. 直線上の計量は 1 次形式  $ds = w dx$ , 偏角は  $\theta = \partial_s w = \partial_x(\log w)$ , 曲率は  $k = -\partial_s \theta = -\partial_x^2(\log w)/w$ , またリッチ流は  $\partial_t w = -kw = \partial_x^2(\log w)$  となるからである. なお定数外力項がついたリッチ流は  $\partial_t w = (1 - k)w$  と表現される. 2.3 節で説明するように曲率流とリッチ流との表 1 のアナロジーは, 定理 1 の証明において強力な指導原理となる.

リッチ流の計量  $ds = w dx$  より解曲線の長さは  $\int_{\mathbb{R}} w(x, t) dx$  で与えられる. そこでこの弧長を時間変化しない一定値  $\gamma_- + \gamma_+$  にする変数変換

$$(2.2) \quad u(x, \tau) = \frac{w(x, t)}{T - t}, \quad \tau = -\log(T - t)$$

を施せば (2.1) から定数外力項がついたリッチ流の初期値問題:

$$(2.3) \quad \begin{cases} \partial_\tau u = \partial_x^2(\log u) + u, & x \in \mathbb{R}, \tau > 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \partial_x(\log u) = \gamma_-, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \partial_x(\log u) = -\gamma_+, & \tau > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

を得る. この変換で

$$(2.4) \quad \|u(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \gamma_- + \gamma_+$$

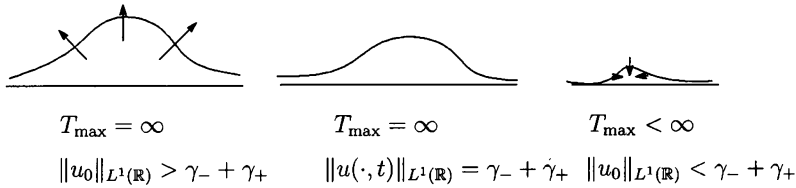
が成り立つ. ゆえに初期境界値問題 (2.1) の解  $w(x, t)$  が  $t \nearrow T$  でどのような形状になるかは, 対応する問題 (2.3)-(2.4) の  $\tau \rightarrow \infty$  における解  $u(x, \tau)$  の挙動を解析すればわかる.

以下では (2.4) を課さずに一般の初期値を与えたときに (2.3) の解がどのような振る舞いをするのかを考察しよう. まず (2.3) の両辺を  $x$  について積分すると

$$\frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}} u(x, \tau) dx = -(\gamma_- + \gamma_+) + \int_{\mathbb{R}} u(x, \tau) dx.$$

よって (2.4) の制約を除いて, 問題 (2.3) を考えると  $\|u_0\|_{L^1}$  と  $\gamma_- + \gamma_+$  の大小で問題 (2.3) の解の挙動は下図の 3 つに分類される.

(A) 拡大していく      (B) 時間大域的に有界      (C) 潰れていく



ここで  $T_{\max}$  は初期値問題 (2.3) の古典解の最大存在時刻とする. これらの漸近挙動は以下で与えられる.

**定理 2** (漸近挙動 [25]). 初期値問題 (2.3) の解の漸近挙動は (A)(C) の場合は (B) の場合に帰着する. (B) の場合, 解は  $\tau \rightarrow \infty$  のときある進行波解に一様収束する.

定理 2 の前半は変数変換:

$$U(x, \sigma) := \frac{\gamma_- + \gamma_+}{\|u(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})}} u(x, \tau), \quad \sigma := \int_0^t \frac{\gamma_- + \gamma_+}{\|u(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})}} d\tau$$

が境界条件を保ち,  $\partial_\sigma U = \partial_x^2(\log U) + U$  と  $\int_{\mathbb{R}} U(x, \sigma) dx \equiv \gamma_- + \gamma_+$  を成り立たせることからしたがう. 以下 (B) の場合を考える. 形状を保って水平方向に移動する進行波解が存在することは, 曲率  $k := -\partial_x^2(\log U)/U$  に関する発展方程式  $\partial_\sigma k = U^{-1} \partial_x^2 k + k(k-1)$  の定常問題を調べることでわかる. 解の進行波への収束について述べる. まず曲率  $k$  の発展方程式に関するリャプノフ関数を構成して解の形状が進行波の形状に収束することを示す. この段階では解が進行波の 1 パラメーター族を遷移する可能性が残されている. 実際に  $\sigma \rightarrow \infty$  のときの解  $U(x, \sigma)$  の収束先が進行波のどれか一つであることは交点数理論により保証される. 詳細は 2.4 節で説明する.

定理 2 の (B) を認めて定理 1 を証明する. (2.2) を (2.1) に施せば (2.3) を得るのであった. さきに述べたように  $\|u(\tau)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \gamma_- + \gamma_+$  である. したがって対数拡散方程式 (2.1) の特異性解析が定理 2 の (B) の漸近挙動に帰着できる. 以上から主定理が示された.

**2.2. 存在定理と正則性.** (2.1) の解の存在定理については  $L^1$  の初期値に関して論文 [24] で調べられている. ここでは初期値が微分可能でその導関数がヘルダー連続な場合に対して解の正則性とその証明方針を紹介する ([25]). 2.1 節で変数変換について説明したように, (2.3) の (B) の場合に局所解の存在定理を証明すれば十分である. よって以下では  $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx = \gamma_- + \gamma_+$  の場合のみを考える.

空間独立変数を弧長パラメーターに取りかえて  $\bar{u}(s(x, t), t) = u(x, t)$  を考える。ただし

$$(2.5) \quad s(x, t) := \int_{-\infty}^x u(x, t) dx.$$

である。我々は  $\int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) dx = \gamma_- + \gamma_+$  の場合を考えているので  $s(\cdot, t): \mathbb{R} \rightarrow (0, \gamma_- + \gamma_+)$  は直線  $\mathbb{R}$  と開区間  $(0, \gamma_- + \gamma_+)$  との微分同相写像であり

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} s(x, t) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} s(x, t) = \gamma_- + \gamma_+$$

となる。また連鎖律より

$$\bar{\theta}(s, t) = \partial_s \bar{u}, \quad \bar{k}(s, t) = -\partial_s \bar{\theta}.$$

さらに簡単な計算より

$$\partial_t s(x, t) = \int_{-\infty}^x \partial_t u(x, t) dx = \int_{-\infty}^x \partial_x^2 u(x, t) + u(x, t) dx = \theta(x, t) - \gamma_- + s(x, t).$$

これと (2.5) より関係式

$$ds = u dx + \left( \int_{-\infty}^x \partial_t u dx \right) dt = u dx + (\theta - \gamma_- + s) dt$$

を用いることで偏微分方程式

$$(2.6) \quad \partial_t \bar{u} = \bar{u} \partial_s^2 \bar{u} - (\partial_s \bar{u})^2 - (s - \gamma_-) \partial_s \bar{u} + \bar{u}, \quad 0 < s < \gamma_- + \gamma_+, \quad t > 0$$

を得る。ただし境界条件は

$$(2.7) \quad \bar{u}(0, t) = \bar{u}(\gamma_- + \gamma_+, t) = 0, \quad t > 0$$

である。次の定理が解の正則性の情報を与える

**命題 1.**  $\bar{u}_0 \in h^{1+\alpha}([0, \gamma_- + \gamma_+])$  は正值関数であり

$$\partial_s \bar{u}_0(0) = \gamma_-, \quad \partial_s \bar{u}_0(\gamma_- + \gamma_+) = -\gamma_+$$

が成り立つとする。このとき初期境界値問題 (2.6)-(2.7) はただ一つの古典解  $\bar{u}(s, t)$  をもち、

$$\bar{u}\left(\frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} - \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cos \xi, t\right) \in h^{2+\alpha}(\mathbb{R})$$

は  $t > 0$  のとき  $\xi$  について解析関数である。

**注意 2.** 読者は (2.3) の境界条件からノイマン境界条件  $\partial_s \bar{u}(0, t) = \gamma_-$  と  $\partial_s \bar{u}(\gamma_- + \gamma_+, t) = -\gamma_+$  も必要だと思われるかもしれない。だが (2.7) を (2.6) に代入するとノイマン境界条件の方は自動的に満足されてしまうので不要である。ここで  $L^1$  ノルムが時間保存量であることが効いている。

初期境界値問題 (2.6)-(2.7) は多孔性媒質の方程式と同じタイプの方程式である。このままでは一様楕円型でないのだが、[2] のアイデアを用いる。解  $\bar{u}(s, t)$  の存在は強楕円型の準線形楕円型方程式の存在定理に帰着できる。なお我々のケースは固定境界問題なので実は [3, 4] よりもさらに簡単である。以下のような変数変換を考える

$$V(\xi, t) = \bar{u}\left(\frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} - \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cos \xi, t\right), \quad \xi \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0.$$

このとき関数  $V$  は以下の偏微分方程式を満たす

$$(2.8) \quad \partial_t V = \frac{4}{(\gamma_- + \gamma_+)^2} \left\{ \frac{V}{\sin^2 \xi} (\partial_\xi^2 V - \cot \xi \cdot \partial_\xi V) - \left( \frac{\partial_\xi V}{\sin \xi} \right)^2 \right\} \\ - \frac{2}{\gamma_- + \gamma_+} \left( \frac{-\gamma_- + \gamma_+}{2} - \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cos \xi \right) \frac{\partial_\xi V}{\sin \xi} + V.$$

この微分方程式について以下の性質が本質的である:

- (a)  $V(\cdot, t)$  は周期  $2\pi$  の偶関数である. さらに  $\xi = 0 + 2\pi\mathbb{Z}$  ( $\xi = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$ ) が  $s = 0$  ( $s = \gamma_- + \gamma_+$ ) に対応する.
- (b) 変数変換  $\xi \mapsto s(\xi)$  は  $\xi \in \pi\mathbb{Z}$  を除いて微分可能である. また点  $\xi = 0$  では以下の近似式が成立する:

$$V(\xi, t) = \frac{\gamma_- + \gamma_+}{4} \partial_s \bar{u}(0, t) \cdot \xi^2 + o(\xi^2).$$

特に  $\partial_\xi V(0, t) = 0$  であり,  $\xi \rightarrow 0$  のとき

$$\frac{\partial_\xi V(\xi, t)}{\sin \xi} = \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cdot \partial_s \bar{u}(0, t) + o(1), \quad \frac{V(\xi, t)}{\sin^2 \xi} = \frac{\gamma_- + \gamma_+}{4} \cdot \partial_s \bar{u}(0, t) + o(1).$$

同様の近似式は  $\xi = \pi$  でも成り立っている.

- (c) また  $\partial_s \bar{u}(0, t) = \bar{\theta}(0, t) = \gamma_-$  および  $\partial_s \bar{u}(\gamma_- + \gamma_+, t) = \bar{\theta}(\gamma_- + \gamma_+, t) = -\gamma_+$  なので二階微分の係数  $V(\xi, t)/\sin^2 \xi$  は  $\mathbb{R}$  上で真に正の値で下から抑えられている. いいかえれば (2.8) は強楕円型の方程式である.

指数  $0 < \alpha < 1$  に対して little Hölder 空間を以下で定義する.

$$h^\alpha(\mathbb{R}) = \{V \in C(\mathbb{R}) \mid V(\xi) = V(\xi + 2\pi) = V(-\xi) \text{ and } \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-\alpha} \sup_{|\xi_1 - \xi_2| \leq \epsilon} |V(\xi_1) - V(\xi_2)| = 0\}$$

および

$$h^{N+\alpha} = \{V \in C^N(\mathbb{R}) \mid V, V', V'', \dots, V^{(N)} \in h^\alpha(\mathbb{R})\}$$

ただし  $N = 0, 1, 2, \dots$  とする.

次に

$$E_0 = \{V \in h^\alpha(\mathbb{R}) \mid V(\xi) = V(\xi + 2\pi) = V(-\xi) \text{ and } V(0) = V(2\pi) = 0\}, \\ E_1 = h^{2+\alpha}(\mathbb{R}) \cap E_0,$$

および関数空間  $E_1$  の開集合を

$$\mathcal{O} = \{V \in E_1 \mid V(\xi) > 0 \text{ for } 0 < \xi < \pi \text{ and } \partial_\xi^2 V(0), \partial_\xi^2 V(\pi) > 0\}.$$

で定める. ここで  $\partial_\xi^2 V(0) = \frac{\gamma_- + \gamma_+}{4} \partial_s \bar{u}(0, t) > 0$  に注意せよ. 同様に  $\partial_\xi^2 V(\pi) > 0$ .

初期境界値問題 (2.8) は抽象的な発展方程式

$$w'(t) = F(w(t)),$$

で書き表される. ここで  $F: \mathcal{O} \rightarrow E_0$  は

$$(2.9) \quad F(V) = \frac{4}{(\gamma_- + \gamma_+)^2} \left\{ \frac{V}{\sin^2 \xi} (\partial_\xi^2 V - \cot \xi \cdot \partial_\xi V) - \left( \frac{\partial_\xi V}{\sin \xi} \right)^2 \right\} \\ - \frac{2}{\gamma_- + \gamma_+} \left( \frac{-\gamma_- + \gamma_+}{2} - \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cos \xi \right) \frac{\partial_\xi V}{\sin \xi} + V.$$

この微分作用素で扱いが難しいのは, 一階微分に関する  $\cot \xi \cdot \partial_\xi V$  と  $\partial_\xi V / \sin \xi$  の項である. しかしながら, 上の性質 (b) のおかげで [3] の Lemmas 2.1 と Lemma 2.2 が適用でき

るので写像  $F: \mathcal{O} \rightarrow E_0$  は解析的である。写像  $F: \mathcal{O} \rightarrow E_0$  が半流を生成することおよび  $w(t)$  が実解析的であることを示すためには、フレッシュ微分

$$\begin{aligned} dF(w) &= \frac{4V}{(\gamma_- + \gamma_+)^2 \sin^2 \xi} \{ \partial_\xi^2 w - \cot \xi \partial_\xi w \} \\ &\quad + \frac{2}{(\gamma_- + \gamma_+) \cos \xi} \left( \frac{\gamma_- - \gamma_+}{2} + \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cos \xi - \frac{4}{\gamma_- + \gamma_+} \frac{\partial_\xi V}{\sin \xi} \right) \cot \xi \partial_\xi w \\ &\quad + \left( 1 + \frac{4(\partial_\xi^2 V - \cot \xi \partial_\xi V)}{(\gamma_- + \gamma_+)^2 \sin^2 \xi} \right) w \end{aligned}$$

が解析半群を生成することをいえばよい。ここで最後の項が  $h^\alpha(\mathbb{R})$  から  $h^\alpha(\mathbb{R})$  への線形有界作用素であるから  $dF(w)$  が最大正則性をもつことを示すには最後の項は無視して良い。したがって、微分作用素  $A: E_1 \rightarrow E_0$ ;

$$\begin{aligned} A &= \frac{4V}{(\gamma_- + \gamma_+)^2 \sin^2 \xi} \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \cot \xi \frac{d}{d\xi} \right) \\ &\quad + \frac{2}{(\gamma_- + \gamma_+) \cos \xi} \left( \frac{\gamma_- - \gamma_+}{2} + \frac{\gamma_- + \gamma_+}{2} \cos \xi - \frac{4}{\gamma_- + \gamma_+} \frac{\partial_\xi V}{\sin \xi} \right) \cot \xi \frac{d}{d\xi} \end{aligned}$$

が  $\mathcal{O}$  上での解析半群を生成することを示すことが出来れば良い。[3] の Part II は

$$P = a(\xi) \left( \frac{d^2}{d\xi^2} - \cot \xi \frac{d}{d\xi} \right) + c(\xi) \cot \xi \frac{d}{d\xi}, \quad 0 < \xi < \infty,$$

の形の微分作用素が解析半群を生成することを示している。ただし  $a > 0, a, a^{-1}, c \in h^\alpha([0, \infty))$  かつ

$$\text{dom}(P) = \{V \in h^{2+\alpha}(\mathbb{R}) \mid V'(0) = 0\}$$

とする。したがって (2.9) で定義される写像  $F: \mathcal{O} \rightarrow E_0$  が開集合  $\mathcal{O}$  で局所的な半流を生成することになる。さらに [4] の Theorem 2.1 を用いれば初期値を  $E_{1/2} = h^{1+\alpha}$  から選ぶことが出来る。

この節を終るにあたって曲率の発展方程式を導くことにしよう。まず (2.6) を  $s$  で微分すると  $\bar{\theta}(s, t)$  に関する以下の方程式が得られる:

$$(2.10) \quad \partial_t \bar{\theta} = \bar{u} \partial_s^2 \bar{\theta} - (\bar{\theta} - \gamma_- + s) \partial_s \bar{\theta}$$

さらにもう一度  $s$  で微分すると曲率  $\bar{k}(s, t)$  の時間発展方程式を得る:

$$(2.11) \quad \partial_t \bar{k} = \bar{u} \partial_s^2 \bar{k} - (s - \gamma_-) \partial_s \bar{k} + \bar{k}(\bar{k} - 1).$$

最後に解が上に対数凸と仮定して関数  $\hat{k}(\theta, t)$  が満たす方程式を立てる。ただし  $\hat{k}(\theta, t)$  は  $\bar{k}(s, t) = \hat{k}(\theta(s, t), t)$  で定義される関数である。(2.11) にこれを代入すると

$$\partial_t \hat{k} + \partial_\theta \hat{k} \partial_t \bar{\theta} = \hat{u} (\partial_\theta^2 \hat{k} (\partial_s \bar{\theta})^2 + \partial_\theta \hat{k} \partial_s^2 \bar{\theta}) - (s - \gamma_-) \partial_\theta \hat{k} \partial_s \bar{\theta} + \hat{k}(\hat{k} - 1).$$

左辺に (2.10) を代入して項をいくつか消去すると

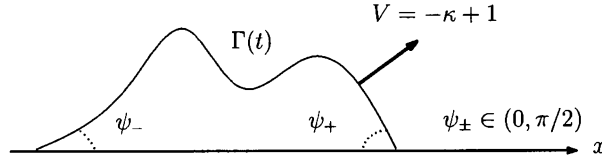
$$\partial_t \hat{k} = \hat{u} \hat{k}^2 \partial_\theta^2 \hat{k} - \theta \hat{k} \partial_\theta \hat{k} + \hat{k}(\hat{k} - 1) = \hat{k} \partial_\theta (\hat{u} \partial_\theta \hat{k}) + \hat{k}(\hat{k} - 1).$$

ついでに曲率関数  $\hat{k}(\theta, t)$  が満たす境界条件を直観的に説明しよう。無限遠方では曲率はほぼ時間変化しないことが予想されるので  $\theta = \mp \gamma_\pm$  のとき  $\partial_t \hat{k} = \hat{u} \hat{k}^2 \partial_\theta^2 \hat{k} = 0$  とおいてしまう。さらに  $\hat{k} \neq 0$  と仮定して以下の境界条件を得る:

$$\partial_\theta \hat{k} = \frac{\hat{k} - 1}{\theta} \quad \theta = \mp \gamma_\pm.$$



2.3. 曲率流とのアナロジー. 曲線短縮流は平面上の曲線上の各点の法線速度がその点の曲率の大きさと与えられる幾何的偏微分方程式である. 1980年代後半 Gage-Hamilton と Grayson らは, どんな単純閉曲線を初期値とする解曲線も時間が経つとそのうち凸曲線になり, 有限時間で一点に潰れることを示し, さらに一点に潰れる時の漸近挙動を計算している. 本節では曲線の境界に接触角に関する条件が課された自由境界問題を扱い, 曲線とその端点に関する漸近挙動について考える.

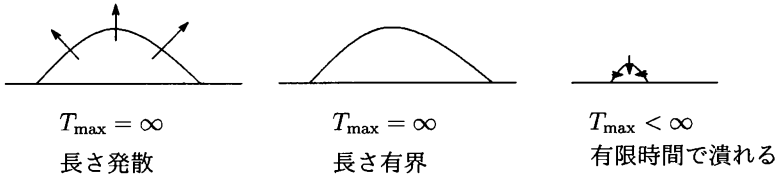


具体的には上半平面で  $V = -\kappa + 1$  という形の曲線の運動方程式を考える. ここで  $V$  は曲線の法線速度を表し,  $\kappa$  は曲率である. 界面の端点の動きが直線に拘束されており, その接触角が左側は  $\psi_-$ , 右側は  $\psi_+$  という一定角で固定された自由境界問題が考察の対象である. 解曲線がグラフの場合は  $y = u(x, t)$  と自由境界  $l_{\pm}(t)$  の組  $(u(x, t), l_{\pm}(t))$  が次の発展方程式を満たす:

$$(2.12) \quad \begin{cases} u_t = \frac{u_{xx}}{1 + u_x^2} + \sqrt{1 + u_x^2}, & x \in (l_-(t), l_+(t)), t > 0 \\ u(l_{\pm}(t), t) = 0, \quad u_x(l_{\pm}(t), t) = \mp \tan \psi_{\pm}, & t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad l_{\pm}(0) = l_{\pm}^0, & x \in [l_-^0, l_+^0]. \end{cases}$$

ただし  $\psi_{\pm} \in (0, \pi/2)$  であり  $-\infty < l_-^0 < l_+^0 < \infty$ . また初期曲線は  $C^2$  級で両立条件を満たす. この方程式の解の挙動は下図の3つの振る舞いで尽くされる ([15]).

- (A) 拡大していく      (B) 時間大域的に有界      (C) 潰れていく



さらに以下の解の漸近挙動をえた.

命題 2 (漸近挙動 [15]). 解の挙動が (A),(B),(C) の各々の場合に関して初期境界値問題 (2.12) の解の漸近挙動は以下で与えられる.

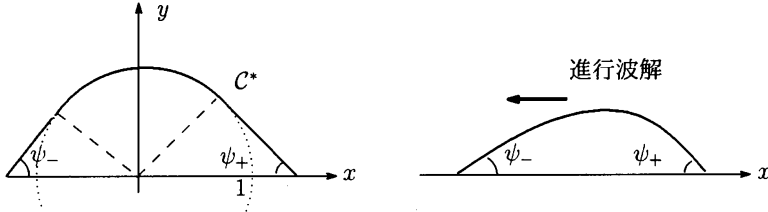
- (A)  $t^{-1}\Gamma(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  のとき  $V = 1$  の自己相似解のプロファイル  $C^*$  に一様収束.
- (B)  $\Gamma(t)$  は  $t \rightarrow \infty$  のときある進行波解にハウスドルフ距離の意味で一様収束.
- (C)  $\frac{1}{\sqrt{T-t}}\Gamma(t)$  は  $t \rightarrow T$  で  $V = -\kappa$  の自己相似解のプロファイル  $K^*$  に一様収束.

さらに解の挙動が (B) あるいは (C) であることが分かっている. このときある時刻  $t_0 < T$  があって  $u(\cdot, t)$  は任意の  $t \in (t_0, T)$  に対して上に凸.

命題 2 後半の (B) に関する漸近凸性は交点数の理論から簡単に証明できる. (C) に関する漸近凸性の証明ではまず  $C^{1+\alpha}$  収束までを Huisken の単調性公式と (スケーリング前の) 等周比評価で示してしまう. そして  $(\theta(s, t), L(t))$  の自由境界問題に対しての長さ正規化方程

式を考える。問題は半線形 (準線形でさえもない) の単なる Dirichlet 境界値問題に帰着してしまう。すると古典的な半線形放物型方程式の半群理論の枠組み ([26]) だけで簡単に  $C^\infty$  収束までいってしまう。なおこの方法は閉曲線にも適用が出来る Grayson の結果の別証明を与えることが出来る ([27])。

さて、命題 2 の前半の解の漸近挙動について説明する。まず曲率流 (2.12) の解全体の様子がどのようなになっているのかのイメージをつかむため最初に曲率の影響を忘れる。  $V = 1$  で角度の自由境界条件を満足する特殊解  $C_S(t)$  が以下のように構成できる。まず半径  $c = 1$  の円弧の一部に 2 つの直線をつなぎ合わせたものを考え、それらの 2 直線が境界条件を満たすように選ぶ。それを  $t$  倍に自己相似拡大した曲線  $C_S(t) = t \cdot C^*$  は  $V = 1$  と境界条件を満たす。この自己相似解のプロファイル  $\exists C^*$  は下図のようなものである。



(A) の解析では対応する Hamilton Jacobi 方程式  $V = 1$  の解との比較やスケージングの議論などを行う。この特殊解が解の漸近挙動を普遍的に記述していることがわかる。次に (C) の場合で解が一点に縮んでいくときだが Chen-Guo [6] によると (2.12) で外力項を除いた  $V = -\kappa$  の場合に関して後ろ向き自己相似解の存在が知られている。ここで後ろ向き自己相似解とは、あるプロファイル曲線  $K^*$  に対して  $\sqrt{T-t} \cdot K^*$  の形で与えられる解曲線のことである。Huiskens の平均曲率流に関する研究で用いられた後ろ向き自己相似座標での単調性公式を用いて自己相似解への収束は証明される。

さて命題 2 の (B) の漸近挙動に焦点を絞る。形状を保って水平方向に移動する「進行波」解が存在することは曲率  $\kappa$  に関する発展方程式  $\kappa_t = \kappa^2(\kappa_{\theta\theta} + \kappa - 1)$  の定常問題を調べることでわかる。収束性に関して、交点数理論のみによる進行波への収束は [15, 28] で見出せる。その議論はまず解の右端点がどれかの進行波の右端点に収束することを示して、その後オメガ極限で得られる解の形状が進行波のプロファイルに一致することを示すのが特徴的である。以下ではこの命題の別の証明を紹介する。ここは上の手順を逆転させ、最初に解の形状が進行波の形状になることを示した後に、右端点が進行波のどれかひとつに収束することを示す。以下で紹介する証明のアイデアが対数拡散方程式のコーシー問題の議論に対応することは後述の 2.4 節を読めば簡単に見てとれる。

偏角  $\theta = \arctan u_x$  を媒介変数に選ぶと解曲線の曲率  $k(\theta, t) := -u_{xx}/(1 + u_x^2)^{3/2}$  は以下の発展方程式を満たす:

$$(2.13) \quad \begin{cases} k_t = k^2(k_{\theta\theta} + k - 1), & -\psi_+ < \theta < \psi_-, \quad t > 0, \\ k_\theta = \cot \theta (k - 1), & \theta = \mp \psi_\pm, \quad t > 0, \\ k(\theta, 0) = k_0(\theta), & -\psi_+ \leq \theta \leq \psi_-. \end{cases}$$

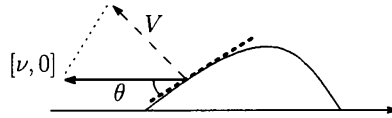
ここで両端点が  $x$  軸に乗っていないといけないので

$$(2.14) \quad \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{k_0(\theta)} d\theta = 0.$$

この等式 (2.14) が (2.13) の解に対して  $t > 0$  で保存されることは簡単に示せる. また (2.13) の定常解  $k^*$  は  $\{\nu \sin \theta + 1 \mid \nu \in \mathbb{R}\}$  の形で与えられる. これを積分条件 (2.14) に代入したら

$$V = -k^* + 1 = -\nu \sin \theta, \quad \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\sin \theta}{1 + \nu \sin \theta} d\theta = 0$$

を満たす  $\exists \nu$  と  $\exists k^*$  がただ一つに定まることが第 2 式に関する  $\nu$  についての簡単な微分計算と中間値の定理からわかる. さてこの式の意味は下の図を見れば一目瞭然であろう.  $\nu$  は水平方向への進行波の速度を表しているのである.



さて解の形状に関する収束は曲率流に付随する汎関数

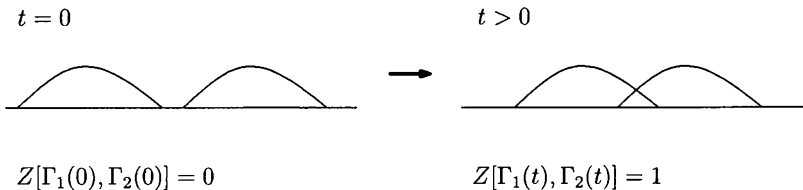
$$J[\kappa] = \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \left( \frac{1}{2} \kappa_\theta^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 + \kappa \right) d\theta - \cot \psi_- \left( -\kappa + \frac{1}{2} \kappa^2 \right) \Big|_{\theta=\psi_-} - \cot \psi_+ \left( -\kappa + \frac{1}{2} \kappa^2 \right) \Big|_{\theta=-\psi_+}$$

は

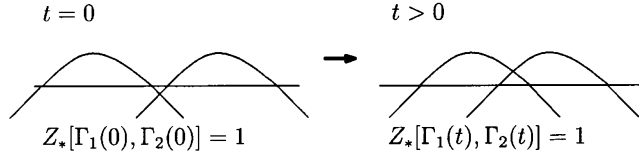
$$\frac{d}{dt} J[\kappa(\cdot, t)] = - \int_{-\psi_+}^{\psi_-} \frac{\kappa_t^2}{\kappa^2} d\theta \leq 0$$

を満たすのでリアプノフ関数である. 存在定理から (B) の場合に曲率はゼロには近づかないこともわかる. よって標準的な力学系の一般論から解  $\kappa(t)$  が  $\kappa^*$  に収束することがいえる.

この議論だけでは解の形状が進行波の形状に収束するだけで, 解曲線の端点が進行波の族を振動し続ける可能性を排除できない. だが以下の交点数の議論とを組み合わせれば右端点がある進行波の右端点に収束することは示せる. そこでこの自由境界問題に付随する交点数理論について概説しよう. 1次元の非線形熱方程式の解析において交点数の理論は有効である ([1, 21, 10, 27]). だが自由境界問題で通常の固定境界の場合のように交点数を数えようとまくいかない. 下の図を見ればわかるように, 自由境界問題では交点数が単調減少であると限らないからである. 実際, 解のサポートが端でぶつかった瞬間に交点数が増大してしまうことが簡単に見て取れるだろう.



だが簡単なアイデアでこの困難は回避できる. まず  $\gamma_1^*, \gamma_2^*$  は下半平面において  $\gamma_1, \gamma_2$  を線形拡張した曲線とする. この拡張した曲線に対して交点数を数え上げればよい. ここで交点数といったときは曲線  $\gamma_1$  と曲線  $\gamma_2$  に対して一方が他方の曲線をまたぐ回数を数えており, 退化している交点はカウントしないことに注意せよ. この拡張した曲線の交点数はトータルとしては常に時間に関して単調減少である.



これを動機として「拡張交点数」

$$Z_*[\gamma_1, \gamma_2] := \text{曲線 } \gamma_1^* \text{ と } \gamma_2^* \text{ の交点数.}$$

を導入すると  $Z_*[\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)]$  の値は  $t < T$  に関して単調減少である。さらに時刻  $t = t_0$  で (自由境界の点も含め) 退化した交点が現れたときに限り  $Z_*[\Gamma_1(t), \Gamma_2(t)]$  がその時間  $t = t_0$  を境に交点数が真に減少する。なお2曲線が一致しないならば、 $t > 0$  で拡張交点数は有限値になる。詳しい証明は論文 [15] に書いてある。

さて解の端点があるひとつの進行波のそれに収束することを示す。背理法で示すため、もし解曲線が時間無限大で進行波の1パラメーター族の間を遷移し続けると仮定する。さきに述べたように解の形状は進行波のそれと一致していると考えて良い。このときある進行波解  $W_0(t)$  と時間列  $\{t_n\}$  があって、解曲線  $\Gamma(t)$  と進行波解  $W_0(t)$  の右端点の座標  $l_+(\Gamma(t)), l_+(W_0(t))$  に対して  $l_+(\Gamma(t_{2m})) > l_+(W_0(t_{2m})), l_+(\Gamma(t_{2m+1})) < l_+(W_0(t_{2m+1}))$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \infty$  が成り立つ。だがこれは不可能である。なぜなら  $\Gamma(t)$  と  $W(t)$  の端点の位置が交互に入れ替わるごとに退化した交点が出現するので拡張交点数は真に減る。ゆえに交点数は無限に減り続けられないといけない。だが十分時間がたった後は双方の形状は全く一致していると思ってよいのだから、交点はひとつしかないので矛盾。よって  $t \rightarrow \infty$  の極限で解曲線の右端点もどれかのひとつの進行波の右端点に収束する。

この節の議論は対数拡散方程式 (2.3) の解析でも並行して行うことができる。以下の表 2 を参考に曲率流の概念をリッチ流の幾何的量に読み替えていけばよい。

TABLE 2. 対数拡散方程式と曲率流との類似

方程式	対数拡散 (2.3)	曲率流 (2.12)
弧長 $s$	$\int_{-\infty}^x u \, dx$	$\int_{l_-(t)}^x \sqrt{1 + u_x^2} \, dx$
偏角 $\theta$	$\partial_s u = \partial_x(\log u)$	$\arctan(u_x)$
曲率 $k := \partial_s \theta$	$-\partial_x^2(\log u)/u$	$-u_{xx}/(1 + u_x^2)^{3/2}$
幾何的 PDE	$u_t/u = -k + 1$	$V = -k + 1$
境界条件	$\theta = \mp \gamma_{\pm}$	$\theta = \mp \psi_{\pm}$

2.4. 主定理の証明. 2.1 節の定理 2 が 2.3 節の命題 2 と酷似しているのは容易に見て取れるであろう。対数拡散方程式は拡散係数が遠方で退化するのでテクニカルには様々な困難を孕んでいるのだが、全く同じアイデアに沿った証明が遂行できる。2.1 節で説明したように、定理 2 の (B) が証明できればすべて解決する。

対数拡散方程式 (2.3) に対しても交点数非増大則が同様に成り立つ。

補題 1. (2.3) の古典解  $u_1, u_2 : \mathbb{R} \times (t_1, t_2) \rightarrow \mathbb{R}_+$  に対して  $u_1(x, 0) - u_2(x, 0)$  が  $\mathbb{R}$  の上で有限回数符号変化すると仮定する。ただし  $0 < t_1 < t_2$  である。このとき以下が成り立つ

- 任意の  $t \in (t_1, t_2)$  に対して交点数  $Z[u_1(t) - u_2(t)]$  は有限回であり、 $t$  に対して単調非増大。さらにもし  $u_1(x, t') - u_2(x, t')$  がある  $x \in \mathbb{R}$  で重複度が 2 以上の零点を持つてば  $Z[u_1(t) - u_2(t)]$  は時刻  $t = t'$  の前後で少なくとも 2 つ減る。

ただし  $Z[w]$  は  $\{x \in \mathbb{R} : w(x) \neq 0\}$  の連結成分の数から 1 を引いたものとする。もし  $w$  が定符号で恒等的に 0 でないときは、 $Z[w] = 0$  と約束し、さらに  $Z[0] = -1$  とする。

注意 3. この補題は半線形方程式や曲率流などの強楕円型作用素に対する放物型方程式のストルムの定理と同じことを述べている。対数拡散方程式になっても、有限の範囲の交点の減り方に関しては半線形方程式の場合と全く同じ証明である。遠方から交点が現れないないことを認めれば完全に局所的な議論で済んでしまうからである。実のところ無限遠の扱いは、強楕円性が満たされていないため、半線形方程式や曲率流などと全く同じ議論ではうまくいかない。だが弱解の解析を通して無限遠方から交点が現れることがないことが証明されている ([25])。このため、結果として通常のストルムの定理と同じ主張が得られるのである。

十分時間がたつと  $\log u$  が下に凸な関数であることが [15] と同様の議論でわかる。証明は  $\log u$  と  $y$  方向に速度 1 で平行移動する直線波解の族と交点数の比較である。そこで以下では解  $u(x, t)$  は対数凸関数であると仮定して議論を進める。この仮定のもとでは解が偏角  $\theta = (\log u)_x$  でパラメータ付けできることに注意せよ。

さて対数拡散方程式問題 (2.3) に対し、解曲線の「弧長」は  $s = \int_{-\infty}^x u dx$  で与えられる。偏角は  $\theta = (\log u)_x = \partial_s \bar{u}$  である。2.2 節で説明したようにこれを媒介変数に選ぶと解曲線の曲率  $\hat{k}(\theta, t) = -\partial_\theta^2 \log u / u = -\partial_s \bar{\theta}$  は以下の発展方程式を満たす：

$$(2.15) \quad \begin{cases} \partial_t \hat{k} = \hat{k}^2 \partial_\theta (\hat{u} \partial_\theta \hat{k}) + \hat{k}(\hat{k} - 1), & -\gamma_+ < \theta < \gamma_-, \quad t > 0, \\ \partial_\theta \hat{k} = \frac{\hat{k} - 1}{\theta}, & \theta = -\gamma_+, \gamma_-, \quad t > 0, \\ \hat{k}(\theta, 0) = \hat{k}_0(v), & -\gamma_+ < \theta < \gamma_-, \end{cases}$$

なお解曲線  $(x, u(x, t)) = (\hat{x}(\theta, t), \hat{u}(\theta, t))$  とは以下の関係がある：

$$\hat{x}(\theta, t) - \hat{x}(0, t) = - \int_0^\theta \frac{d\theta}{\hat{k}(\theta, t) \hat{u}(\theta, t)}, \quad \hat{u}(\theta, t) = - \int_{-\gamma_+}^\theta \frac{\theta d\theta}{\hat{k}(\theta, t)}.$$

ここで解のグラフは両端が  $x$  軸に漸近していないといけないので

$$(2.16) \quad \int_{-\gamma_+}^{\gamma_-} \frac{\theta}{\hat{k}_0(\theta)} d\theta = 0,$$

この等式が (2.15) の解に対して  $t > 0$  で保存されることは簡単に示せる。また (2.15) の定常解  $\hat{k}^*(\theta)$  は  $\{1 + \nu\theta \mid \nu \in \mathbb{R}\}$  の形で与えられる。これを積分条件 (2.16) に代入したら

$$\int_{-\gamma_+}^{\gamma_-} \frac{\theta}{1 + c\theta} d\theta = 0.$$

を満たす  $\exists c$  と  $\exists k^*$  がただ一つに定まることが簡単な微分計算と中間値の定理からわかる。この解を 2.3 節の曲率流の場合と同じようにこれをもとの曲線で見れば進行波に対応することを簡単に確認しよう。水平方向へ速度  $c$  で進む進行波  $\varphi(x - ct)$  に対して

$$c\varphi' = (\log \varphi)'' + \varphi.$$

ここで両辺を  $\varphi$  で割ると対応する曲率  $\hat{k}^*$  と偏角  $\theta$  に対し  $c\theta = -\hat{k}^* + 1$  を得るからである。

さて解の形状に関する収束は曲率流に付随する汎関数

$$E[\kappa] := \int_{-\gamma_+}^{\gamma_-} \left\{ \frac{\kappa\mu}{2} (\partial_\theta \kappa)^2 - \frac{1}{2} \kappa^2 + \kappa \right\} d\theta, \quad \mu := - \int_{-\gamma_+}^\theta \frac{\theta}{\kappa} d\theta$$

は

$$\frac{d}{dt} E[\hat{k}(\cdot, t)] = - \int_{-\gamma_+}^{\gamma_-} \frac{(\partial_t \hat{k})^2}{\hat{k}} d\theta \leq 0$$

を満たすのでリアプノフ関数である。曲率に関する適当な評価から (B) の場合には曲率はゼロには近づかないこともわかる。また曲率関数  $\hat{k}(\theta, t)$  の境界までの正則性が命題 1 により保障されている。よって標準的な力学系の一般論から解  $\hat{k}(t)$  が  $\hat{k}^*$  に収束することがいえる。

この議論だけでは解の形状が進行波の形状に収束するだけで、解曲線が進行波の族を振動し続ける可能性を排除できない。曲率流の自由境界問題の場合のように交点数理論を用いてその可能性を排除する。このことは感覚的には明らかである。 $u(x, t)$  のオメガ極限関数  $u^\omega(x, t)$  は進行波と全く同じ解の形状をしている。もしその位置が進行波の間を遷移し続けると、適当な進行波を一つと  $u^\omega(x, t)$  は時間がたつと何度も退化した交点をもってしまふ。同じ形状の 2 つの進行波はそれが異なれば一点しか交点を持ちえない。その交点が無限回減ることはありえないのである。以上が定理 2 の証明のアイデアである。

### 3. 漸近挙動の補足

前節では初期境界問題 (2.1) に対して  $\gamma_\pm > 0$  を考えていた。この条件を緩めたら何が起きるかについてを考察し、本考究録を終えることにする。

3.1. 前向き自己相似解への収束。初期境界問題 (2.1) に対して  $\gamma_\pm = 0$  を考えた場合は主定理 1 を適用することが出来ない。容易にわかるように  $\int_{\mathbb{R}} w(x, t) dx$  は時間に依存しない定数であり、解は時間大域的に存在する。ここから次の疑問が自然に生じる。前向き自己相似解 (1.7) は、任意の解を前向き自己相似スケーリングをしてやれば漸近安定であろうか。この問題は弧長変数を用いれて解析するのが良い。まず  $s = \int_0^x w(x, t) dx$  を独立変数に選ぶ。さらに時間を平行移動すると (1.7) は

$$\bar{w}_f(s, t) = \frac{1 + \cos(\sqrt{2As})}{2A(1+t)}$$

となる。対応する偏角と曲率はこの式を  $s$  で微分すれば簡単に求まって

$$\bar{\theta}_f(s, t) = -\frac{1}{\sqrt{2A(1+t)}} \sin(\sqrt{2As}), \quad \bar{k}_f(s, t) = \frac{1}{1+t} \cos(\sqrt{2As}), \quad s \in [-\pi/\sqrt{2A}, \pi/\sqrt{2A}]$$

さて初期値  $w_0$  に対して  $\int_{\mathbb{R}} w_0(x) dx = \sqrt{2\pi}/\sqrt{A}$  となるように定数  $A$  を選ぶ。さらに  $w(x, t) = \bar{w}(s(x, t), t)$  として関数  $W(s, \tau) = (1+t)\bar{w}(s, t)$  を導入する。ただし本節では  $\tau = \log(1+t)$  とする。関数  $\bar{w}$  は  $\partial_t \bar{w} = \bar{w} \partial_s^2 \bar{w} - (\partial_s \bar{w})^2$  を満たすから簡単な計算により

$$(3.1) \quad \begin{cases} \partial_\tau W = W^2 \partial_s (\partial_s W / W) + W, & s \in I_A = (-\pi/\sqrt{2A}, \pi/\sqrt{2A}), \tau > 0, \\ W(\pm\pi/\sqrt{2A}, \tau) = 0, & \tau > 0, \\ W(s, 0) = \bar{w}(s, 0), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1.1 節からこの方程式はただ一つの定常解

$$W_f(s) = \frac{1 + \cos(\sqrt{2As})}{2A}$$

をもつ。さらにスケーリング方程式 (3.1) がリアプノフ関数を持つことが以下の計算からわかる。(3.1) の両辺に  $\partial_\tau W / W^2$  をかけて  $s$  について積分すると、境界で  $\partial_s W$  が常に 0 なの

で部分積分から

$$\int_{I_A} \frac{(\partial_\tau W)^2}{W^2} ds = - \int_{I_A} \partial_\tau \partial_s W \frac{\partial_s W}{W} + \frac{\partial_\tau W}{W} ds.$$

ここで関係式  $ds = w dx = e^{-\tau} W dx$  を用いると

$$\begin{aligned} e^\tau \int_{I_A} \frac{(\partial_\tau W)^2}{W^2} ds &= - \int_{\mathbb{R}} \partial_\tau \partial_s W \partial_s W dx + \partial_\tau W dx = - \int_{\mathbb{R}} \partial_\tau \frac{(\partial_s W)^2}{2} dx + \partial_\tau W dx \\ &= - \frac{d}{d\tau} \int_{\mathbb{R}} \frac{(\partial_s W)^2}{2} - W dx = - \frac{d}{d\tau} \left[ \left( \int_{I_A} \frac{(\partial_s W)^2}{2W} ds - \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{A}} \right) e^\tau \right]. \end{aligned}$$

これは解  $W(s, \tau)$  は  $\tau \rightarrow \infty$  のときに定常解  $W_f(s)$  に収束することを示唆する。このままでは位置情報が不明だが、もとの座標で位置もこめて収束することは交点数の議論による。

**3.2. Type II 爆発解の構成.** 1.2 節で述べたように平面上の対数拡散方程式の最大解の曲率は自己相似的でない爆発を起こす。空間 1 次元の問題 (2.1) に関しても同じタイプの解が構成できるだろうか。これに関しては  $\gamma_- > \gamma_+ = 0$  の場合を考えれば良いようである。この条件のもとで主定理 1 を真似て、(2.3) の進行波解を探そうとしても存在しない。進行波の速度を求めるステップで、伝播速度が正の無限大に発散してしまい議論が破たんするからである。これは (2.3) の面積保存解は針金のように横に伸びていくことを予期させる。自己相似スケーリングでこのような現象が起きるのは Type II 爆発が起きるときしかない。実際、1.2 節の注意 1 で説明したように  $\gamma_- = 2$  のときは詳細な漸近展開がわかっており、Type II 爆発が起きる。一般の  $\gamma_- > \gamma_+ = 0$  でも同様の解が構成できるに違いない。

謝辞: なおこの研究は科学研究費補助金 (若手 (B)No.16K17634) の援助の下で行われた。

#### REFERENCES

- [1] S. Angenent, *The zero set of a solution of a parabolic equation*, J. Reine Angew. Math. **380** (1988), 79–96.
- [2] S. Angenent, *Analyticity of the interface of the porous media equation after the waiting time*, Proceedings of the American Mathematical Society **102** (1988), 329–336.
- [3] S. Angenent, *Local existence and regularity for a class of degenerate parabolic equations*, Math. Ann. **280** (1988), 465–482.
- [4] S. Angenent, *Nonlinear analytic semiflows*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **115A** (1990), 91–107.
- [5] F. Bernis and A. Friedman, *Higher order nonlinear degenerate parabolic equations*, Journal of Differential Equations **83** (1990), 179–206.
- [6] X. Chen, J.-S. Guo, *Motion by curvature of planar curves with end points moving freely on a line*, Math. Ann. **350** (2011), 277–311.
- [7] B. Chow, P. Lu and L. Ni, *Hamilton’s Ricci Flow*, AMS and Science Press, 2008.
- [8] P. Daskalopoulos, R. Hamilton and N. Sesum, *Classification of ancient compact solutions to the Ricci flow on surfaces*, J. Differential Geom. **91** (2012), 171–214.
- [9] P. Daskalopoulos and M. del Pino, *Type II collapsing of maximal solutions to the Ricci flow in  $\mathbb{R}^2$* , Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis **24** (2007), 851–874.
- [10] V.A. Galaktionov, *Geometric Sturmian Theory of Nonlinear Parabolic Equations and Applications*, Chapman and Hall/CRC Applied Mathematics and Nonlinear Science.
- [11] H. P. Greenspan, *On the motion of a small viscous droplet that wets a surface*, J. Fluid Mech. **84** (1978), 125–143.
- [12] ドウジェンヌ・プロシャール・ヴィアール・ケレ, 奥村剛訳, 表面張力の物理学, 吉岡書店.
- [13] 儀我美一・儀我美保, 非線形偏微分方程式, 共立講座 21 世紀の数学 **25** (1999).
- [14] M. A. Grayson, *The heat equation shrinks embedded plane curves to round points*, J. Diff. Geom. **26** (1987), 285–314.

- [15] J.-S. Guo, H. Matano, M. Shimojo and C.-H. Wu, *On a free boundary problem for the curvature flow with driving force*, Arch. Rat. Mech. Anal. **219** (2016), 1207–1272.
- [16] H. G. Kaper and G. K. Leaf, *Initial value problems for the Carleman equation*, Nonlinear Anal. **4** (1980), 343–362.
- [17] H. G. Kaper, G. K. Leaf and S. Reich, *Convergence of semigroups with an application to the Carleman equation*, Math. Methods Appl. Sci. **2** (1980), 303–308.
- [18] K. E. Longman and A. Hirose, *Expansion of an electron cloud*, Phys. Lett. A **59** (1976), 285–286.
- [19] C. Mantegazza, *Lecture notes on mean curvature flow*, *Progress in Mathematics*, vol. 290, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.
- [20] 松村昭孝, 西原健二, 非線形微分方程式の大域解—圧縮性粘性流の数学解析, 日本評論社 (2004)
- [21] 小谷真一, 俣野博, 微分方程式と固有関数展開, 岩波書店 現代数学の基礎 (2006).
- [22] 三村昌泰, 2 次の非線形項をもつ半線形偏微分方程式系について, 数学 **28** (1976) 193–201.
- [23] H. P. McKean, *The central limit theorem for Carleman's equation*, Israel J. Math. **21** (1975), 54–92.
- [24] A. Rodriguez and J. L. Vazquez, *A well posed problem in singular Fickian diffusion* Archive for Rational Mechanics and Analysis **110** (1990), 141–163.
- [25] M. Shimojo, P. Takáč, E. Yanagida, *Asymptotic behavior of solutions to the logarithmic diffusion equation with a linear source*, Preprint.
- [26] P. Quittner and P. Souplet, *Superlinear Parabolic Problems. Blow-up, Global Existence and Steady States*. Birkhäuser Advanced Texts, Basler Lehrbücher, 2007.
- [27] 下條昌彦, 非線形熱方程式の交点数理論入門—芝浦 2015 年勉強会レクチャーノート <http://www.sic.shibaura-it.ac.jp/tisiwata/Workshops/ousuuws2015.html>
- [28] 下條昌彦, 外力項付き曲率流のある自由境界問題, 京都大学数理解析研究所考究録 **1979**
- [29] 鈴木 貴, 楕円型方程式と近平衡力学系 (下), 朝倉数学大系 9 (2015).
- [30] 鈴木 貴, 上岡 友紀, 偏微分方程式講義—半線形楕円型方程式入門, 培風館 (2005).