数理解析研究所講究録
第2067巻 2018年 65-73

Mathematica と web 小テストを併用した大学数学教育

日本大学・理工学部　藤井　利江子 (Rieko Fujii)
日本大学・理工学部　戸塚　英臣 (Hideomi Totsuka)
日本大学・理工学部　鈴木　潔光 (Kiyomitsu Suzuki)
College of Science and Technology,
Nihon University

1　はじめに

本学物理学科では，専門科目を学び始める前の1年生及び，教養科目の数学を一通り学び終わった2年生に，専門科目でよく使う基本的な数学を復習する授業を設置している．この授業は黒板には描き難いグラフや動画への理解を深めるため，一人一台のコンピュータを使える演習室で数式処理ソフト Mathematica を主に利用し，実践している．学生は近年のパソコンやスマートフォンの普及により，IT 機器の取り扱いになれており，授業中のコンピュータの扱いに関するサポートはほとんど必要ないが，Mathematica の命令を入力するとなると，大文字，小文字の区別や括弧の種別等のサポートが必要になる学生も多い．各学年，半期ずつの授業であるが，2年間 Mathematica に触れることで高学年時には必要なときに自力で Mathematica を利用して計算できるようになることも目標の一つとしている．Mathematica は英語を基本とした命令文であるため，理系英単語力が高い学生の方が飲み込みが早い．また毎年大学院進学を希望する学生も多いことから，本実践では英語教育も意識し，授業内に英文で簡単な問題に取り組む時間も設けている．一方で文部科学省による国語力の向上を目指した言語活動の充実が提言されている．本実践では物理教育上，現象を説明させることで表現力の習得などにも取り組んでいる．本実践の1年生の授業では，関数とグラフ，数列と極限，微分方程式，Newton 法，確率の計算，積分の計算，台形則，落体の運動，波動，うなり，振動，リサージュ図形などを扱っている．特に1年生では物理現象や問題に対する定性的な理解を得ることを目標とし，2年生では代数計算，微分積分，微分方程式，近似解法，フーリエ級数，数列・漸化式，振動と波動，ベクトル場を扱い，1年生の理解をさらに進めて定量的な理解を得ることを目標としている．両学年ともに比較的幅広く扱う内容となっているが，本稿では，主に微分方程式の実践内容の詳細とその教育効果について報告する．

本実践では e-learning システムも利用している．本システムはオンラインで小テストやアンケートを比較的簡単に作成して公開することができる．問題の解答形式は択一，複数選択，自由記述から選択することが可能であり，解答はパソコンからはもちろんスマートフォンからも行うことができる．回答結果を即時，集計できるので，事前に正解や解説などを入力しておくことでテスト終了と同時に，採点結果と解説を解答者へ提示することができる．本実践ではこの機能を利用し，単元ごとの小テストにおいて学生自身に勘違いや計算間違いなどの間違いやすいポイントの解説を行っている．また小テス

ト中は，学生間でのディスカッションを許可している．本実践の学期末試験はペーパーテスト形式で行っており，これはMathematicaを利用することでどのくらい数学的理解が深まったかを調査するためである．尚，本稿で利用したデータは2015年度に入学した学生の1年次，2年次のweb小テストと学期末試験の結果を参照したものである．

2　1年生での実践　ー1階微分方程式ー

微分方程式は物理において振動・波動をはじめとする様々な現象を表す方程式として，重要である．本実践の1年生での授業は前期に設置されており，学生は微分方程式をまだ履修していない．ただし，学生は前期にスタディスキルズという授業を受講している．これは様々な数学を学びながら物理を学ぶ上でこれらがどんな形で役立つかを知り，勉学への学習意欲をあげることを目的とした授業である．ただしこのスタディスキルズは，講義形式で行われるため学生が解のグラフを描くのは難しい．本実践ではスタディスキルズの内容とあわせてグラフを描画し，それを考察することで物理学への理解を深めていくことを目的としている．

微分方程式のオンラインによるweb小テストでは，下記の3つの微分方程式のグラフを1問目，2問目の選択肢は図1から，3問目は図2から選択させる択一問題として出題した．Mathemticaのグラフ描画機能ではオプションを入力しないとグラフの縦軸と横軸が交差する位置が原点であるとは限らず，勘違いが起こりやすい．この問題はグラフの概形だけでなく，それを正しく理解できているかを確認することも意識した小テストである．

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x，\text{初期条件 } x|_{t=0}=1\\ \frac{dx}{dt} &= -x，\text{初期条件 } x|_{t=0}=1\\ \frac{dx}{dt} &= \frac{1}{t+1}，\text{初期条件 } x|_{t=0}=1\end{aligned}$$

この3問のweb小テストの正答率は1問目85.1％，2問目83.3％，3問目72.8％と，全

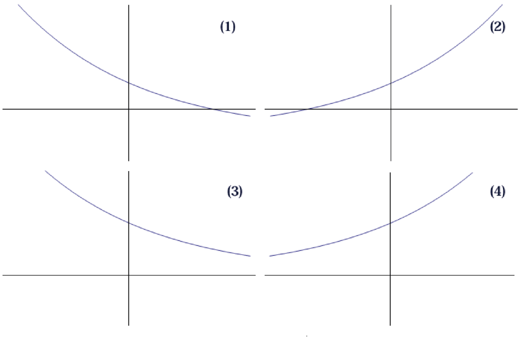

図1: 1階微分方程式の問題1問目，2問目の解のグラフの選択肢

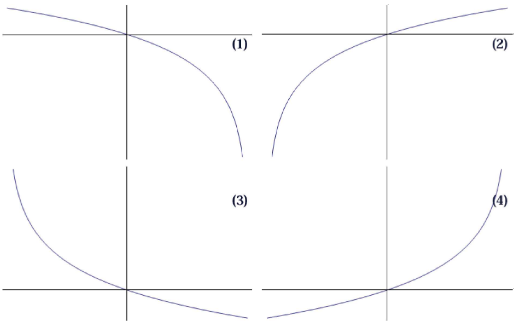

図 2: 1 階微分方程式の問題 3 問目の解のグラフの選択肢

体に正答率は高かった．1 問目，2 問目に比べると 3 問目は解の形が $\log(t+1)$ と多少見慣れない問題だったためか，正答率は 10 %程度下がったが，ほとんどの学生は理解できていることが分かった．即ち Mathematica の使い方はおおむね身につけていると思われる．

3　1 年生の実践　－2 階微分方程式－

1 年生では，様々な振動や波動を表す 2 階線形微分方程式も扱っている．振動を表す微分方程式の web 小テストでは微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x=0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0}=0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$$

と

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0}=0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=1$$

の解の $t=0$ 付近のグラフをそれぞれ図 3 の中から選択させる問題を出題した．

この二つの問題の式は符号が違うだけで似た形の微分方程式であるが，解の性質はまったく異なるため，グラフからその性質を読み取ることが重要である．この web 小テストの正答率は 1 問目が 83.5 %，2 問目が 76.5 %と，1 階微分方程式の web 小テストの正答率と同程度であった．

また，微分方程式の解の性質を動的に理解できる教材として微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0}=2,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$$

における γ と ω を図 4 のようなスライダーでそれぞれ変化させることで解のグラフがどのように変化するかを確認できる教材を配布し，実行させた．この教材を利用し，特に $\gamma>\omega$ と減衰振動へ変化する $\omega>\gamma$ の振る舞いの違いを中心に解説している．

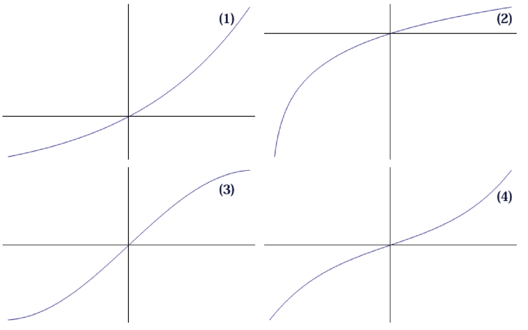

図 3: 2 階微分方程式のグラフの選択肢

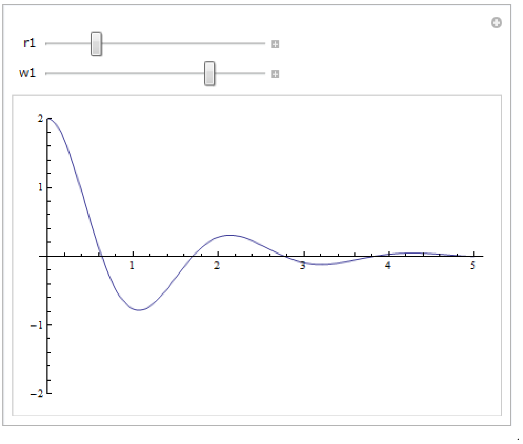

図 4: 微分方程式の係数と解のグラフの変化の関係を表す動的な教材

同様に強制振動に関する問題として

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \cos\omega t$$

の ω を ω_0 に図 5 のようなスライダーで近づけていくときの解の振る舞いがどう変化するかを確認させた．

振動に関する web 小テストでは 1 問目として 解の係数が全て 0 ではなく， $\gamma > 0$ であると仮定したとき，解のグラフが図 6 で表される ”可能性がある ” 微分方程式を

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= \cos\omega t \\
\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= 0, \\
\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 0,
\end{aligned}$$

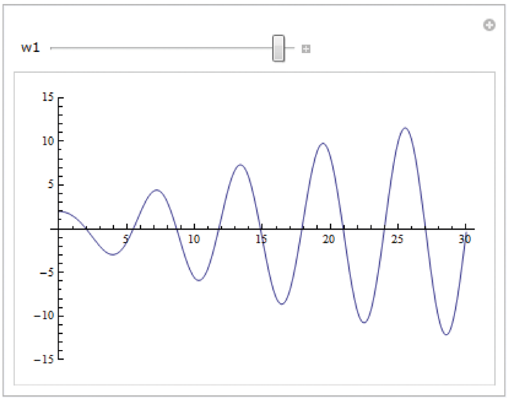

図 5: 強制振動を表す微分方程式のインタラクティブ教材

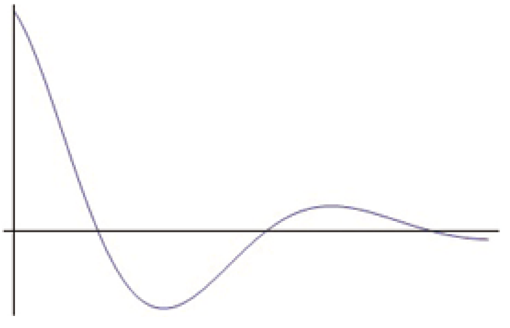

図 6: 減衰振動を表す微分方程式の解のグラフ

のなかから択一式で答えさせる問題を出題した．この問題は数学的には曖昧な表現の出題形式ではあったが，微分方程式の形から解を想像させるという問題であり，正答率は 73.5 %と高く，前週に配布した動的教材の効果が現れたかと思われる．

2 問目として，図 7 を微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$$

の解のグラフとしたとき，矢印で表されたところの座標を $\pi, 2\pi, \pi/\omega, 2\pi/\omega$ から択一式で答えさせる少し定量的な問題も出題したところ，正答率は 65.8 %であった．正解は π/ω であるが，π を選択した学生も 17.9 %程度いた．これは三角関数で表されるグラフの周期は常に 2π であるという ”勘違い” や ”思い込み” が一部の学生にあるのではないかと思われる．

3 問目として

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\gamma\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=\cos\omega t$$

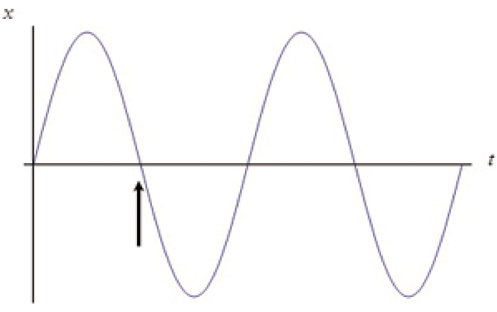

図 7: 微分方程式の解のグラフ（半周期）

において $\omega \approx \omega_0$ の時に起こる現象名を答えさせる問題を出題したところ，共鳴もしくは共振と答えられた学生は 12.0 %であり，あまり現象名とは結びついていなかったようである．

学期末試験問題では，微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

（ただし，$\gamma > 0$，$\omega > 0$）が振動しながら減衰するための条件を書かせた．この問題に $\omega > \gamma$ もしくは $\gamma^2 - \omega^2 < 0$ と答えられた学生は受験者 124 名中 43 名と正答率 34.6 %であった．また共鳴とはどんな現象であるか簡単に説明させる問題を出題した．この問題の正答率は 14.5 %であったが，正解ではない解答の中には「振動している物体の近くにあるものも振動し始めること」「ある振動に影響されて他の物体も振動すること」「振動が重なり合い，振幅がだんだん大きくなること」等がみられ，全く理解されていないのではなく表現力が不足しているものもあった．

4　2年生での実践　－2階微分方程式－

2 年生では定量的な問題に答えられるようになることや，グラフを描画できるようになることを目標としている．授業内では例えば振動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0} = 0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 1$$

の解を求めたあとグラフを描画し，解の物理現象との関係についての解説を行っている．さらに減衰振動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{5}\frac{dx}{dt} + \frac{9}{100}x = 0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0} = 2,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = -\frac{1}{5}$$

や過減衰を表す微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + \frac{3}{4}x = 0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0} = 2,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

などを扱っている．

2 階微分方程式を扱った web 小テストでは 1 問目として

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0}=1$$

の解の振幅を $1/2, 1, 2, 4$ の中から択一で答えさせる問題と，2 問目として同微分方程式の解の周期を $\pi/2, \pi, 2\pi, 4\pi$ の中から択一で答えさせる問題を出題したところ正答率はそれぞれ 88.7 %，74.8 % と 2 問ともに高い正答率が得られた．3 問目として

$$\frac{dy}{dt}=z, \frac{dz}{dt}=-y,\ \text{初期条件}\ y|_{t=0}=1,\ z|_{t=0}=1$$

の $y(t)$ の解のグラフの形を図 8 のなかから選択させる問題を出したところ正答率は 65.3

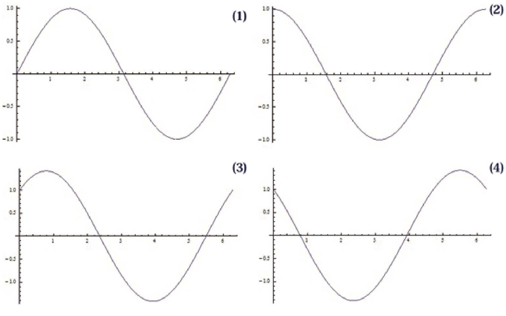

図 8: 連立微分方程式の解のグラフ

% であった．連立微分方程式の問題になったことで命令文が少し複雑化するものの，半数以上の学生が Mathematica を使って微分方程式を解き，グラフを描画することが出来た結果かと思われる．

学期末の試験問題では

$$\frac{d^2x}{dt^2}+4x=0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0}=0,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=2$$

の解を求め，そのグラフの概形を $[0 \le t \le 2\pi]$ の範囲で描かせる問題を出した．この微分方程式の解は

$$x(t)=\sin 2t$$

であるが，2016 年度の成績は 10 点満点中，平均点 7.6 点と高い正答率であった．また，微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2}-x=0,\ \text{初期条件}\ x|_{t=0}=1,\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$$

の解を求め，そのグラフを描かせる問題も出題した．この微分方程式の解は

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

と双曲線関数になるが，この問題の成績は10点満点中，4.9点であり，半数程度の正答率であった．正解者の中には

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{1}{2}e^{-t}$$

を $\frac{1}{2}e^{t}$ と $\frac{1}{2}e^{-t}$ に分解してグラフを描き，2つのグラフを合成した学生もいたが，一方で解は導けたもののグラフには

$$x = \frac{1}{2}e^{-t^2}$$

に似たグラフを描いた学生もおり，学生らの理解度には幅が見られた．

web小テストの成績と試験問題の成績との相関を取ってみる．まず，web小テストで単振動を表す微分方程式の振幅を答えさせる問題と試験問題の振動を表す微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

の解のグラフを描かせる試験問題の相関を取ったものを表1に表す．試験で振動のグラフを描けた学生は全体で66.0％であったが，小テスト時には振幅を正しく選択できなかった学生13名のうち6名は試験時には正しくグラフを描けていた．

表1: 小テスト(振幅)と試験問題(振動)の解のグラフの成績の相関

小テスト ＼ 試験	0点（12.3％）	部分点（21.7％）	満点（66.0％）
不正解13名	3名	4名	6名
正解97名	10名	19名	68名
未受験28名	4名	7名	17名

表2: 小テスト(周期)と試験問題(振動)の解のグラフの成績の相関

小テスト ＼ 試験	0点（12.3％）	部分点（21.7％）	満点（66.0％）
不正解28名	8名	6名	14名
正解81名	5名	17名	59名
未受験29名	4名	7名	18名

次にweb小テストで単振動を表す微分方程式の周期を答えさせる問題と，グラフ描画の試験問題の相関を取ったものを表2に示す．小テストで周期を正しく選択できなかった学生28名のうち14名が試験時に正しくグラフを描けていた．しかし，全体には小テストで好成績だった学生が試験でも良い成績を収めていた．

5 まとめと今後の展望

本実践では主に Mathematica を使用して，1年生，2年生の連続性を意識した授業を行った結果を報告した．1年生は大学へ入学して初めて触れる微分方程式であるが，1階，2階微分方程式とも解のグラフ選択問題で好成績を収めた．少なくとも，Mathematica の命令 DSolve や Plot の使い方を身につけているといえる．また減衰振動や強制振動の解の性質を理解させるために作成した教材を配布した結果，多くの学生が微分方程式の形から解のグラフを正しく選択できた．しかし，振動を表すグラフの半波長を答えさせる問題等，定量的な問題になるとやや理解度は下がるようである．また，強制振動において $\omega \approx \omega_0$ の時に起こる現象名を問う問題では正答率が 12.0 % とかなり低く，物理の現象名とはあまり結びついていないことがわかった．

2年生では1年次の理解をさらに進めて，定量的な問いに答える力を意識した．振動を表す微分方程式に対する理解度はかなり高く，学期末試験では多くの学生が正しくグラフを描けていた．しかし，解の形が三角関数で表される問題は扱いに慣れているようであったものの，双曲線関数に関するグラフを描かせる問題では理解度は少し下がった．また全体として，現象名や現象に対する説明などを求めた問題に対する日本語の表現力が低いことがわかった．

今後の展望として，本学に CBT 環境が整い次第，Mathematica を使う能力も問うことができる，コンピュータを利用した試験を実施したいと考えている．

謝辞

本研究は，京都大学数理解析研究所共同事業「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」による成果である．