数理解析研究所講究録
第2068巻 2018年 1-21

ファノ多様体内のラグランジュ平均曲率流の収束

東北大AIMR・國川慶太[1]
Keita Kunikawa
Advanced Institute for Materials Research, Tohoku University (AIMR)

産総研MathAM-OIL・梶ヶ谷徹[2]
Toru Kajigaya
National Institute of Advanced Industrial Science and Technology (AIST),
MathAM-OIL

1. 序

特定のリーマン多様体 M 内で体積最小性を持つ部分多様体を見つけよ, という問題は部分多様体の微分幾何において一つの古典的な問題である. 外側の空間 M としては様々なものが考えられるが, 本稿では, 主に M としてコンパクト Kähler 多様体を考える. この場合, 体積最小性を持つ部分多様体の典型的な例は複素部分多様体で, これはキャリブレート部分多様体の例として知られる. もし, M が Calabi-Yau 多様体 (Ricci 平坦) なら, もう一つのキャリブレート部分多様体として, 特殊ラグランジュ部分多様体がある. ラグランジュ部分多様体の特殊性は実際, 極小性 (平均曲率0) と同値であり, いくつかの構成法が知られている (例えば, [11] を参照).

一方で, Kähler 多様体 M が正の Ricci 曲率を持つ場合には, 状況が異なる. 例えば, Fubini-Study 計量を持つ複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 内で安定, すなわち体積汎関数に関して極小であるような部分多様体は, 複素部分多様体に限るという Lawson-Simons の定理が知られる. 特に, ラグランジュ部分多様体は複素部分多様体になり得ないから, $\mathbb{C}P^n$ 内で安定なラグランジュ部分多様体は存在しないと言うことがわかる. ところが, 90年代に, Y.-G.Oh により, ラグランジュ部分多様体のハミルトン変形のもとでの安定性, すなわち**ハミルトン安定性**の概念が導入され, $\mathbb{C}P^n$ を含む正の Ricci 曲率を持つエルミート対称空間内にハミルトン安定なラグランジュ部分多様体の例が複数存在することが分かり大きなインパクトを与えた ([23],[24]). キャリブレート部分多様体の場合と異なり, M が正の Ricci 曲率を持つ場合, 極小ラグランジュ部分多様体のハミルトン安定性は非自明な性質であるが, その後, 大仁田らの研究により様々な例が発見されている (例えば, [21], [27] を参照).

平均曲率流は極小部分多様体を見つける1つの方法である. 実際, 平均曲率流は部分多様体の体積汎関数の勾配流であり, 停留点として極小部分多様体が現れる. さらに, M が Kähler-Einstein 多様体で初期部分多様体がラグランジュ部分多様体の場合, ラグランジュ性は平均曲率流に沿って保たれることが知られており ([28]), 特にこの場合を**ラグランジュ平均曲率流**とよぶ. ラグランジュ平均曲率流が時間大域的に存在し, ある意味で安定な極小ラグランジュ部分多様体に収束するかどうかは自然な問いかけであるが, 一般には極めて難しい問題として知られる. 例えば, M が Calabi-Yau 多様体の場合の進展については, 文献 [12], [22], [33] などを参照して頂きたい.

これまでのところ, ラグランジュ部分多様体の安定性や平均曲率流に関する研究の

[1] E-mail: keita.kunikawa.e2@tohoku.ac.jp
[2] E-mail: kajigaya.tr@aist.go.jp

多くは, Kähler-Einstein 多様体内で考えられてきたが, この Kähler-Einstein という設定は, ラグランジュ部分多様体やハミルトン変形などのコンセプトが純粋にシンプレクティック幾何的なものであるにも関わらず, 限定的である. 例えば, よく知られているように Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量の存在には障害があり, Kähler-Einstein 計量を許容しない Kähler 多様体の例が存在する. 本研究の一つの動機は, 扱う対象を Kähler-Einstein を含むもう少し広いクラス, 特に (標準的に Kähler 構造を持つ)Fano 多様体の場合に拡張することにある. 結論から言えば, Kähler-Einstein の場合に知られていたほとんどすべての結果は, 自然な形で, Fano 多様体を含むより広いクラスに拡張できる. このことは, 最初, T. Behrndt [3] による概 Calabi-Yau 多様体内のラグランジュ平均曲率流の研究において明確に指摘され, 今回の結果はその方法の Fano 多様体への適用と言うことができる. 以下に述べる結果や手法は既存の結果の拡張に過ぎないのだが, 対象となる Kähler 多様体やラグランジュ部分多様体は大きく広がっていることに注意しておく.

なお, ラグランジュ平均曲率流をより一般のシンプレクティック多様体に拡張しようとする試みは, 本研究以前にも, いくつかの方向で研究が進められている. ここではその全容を述べることはしないが, 興味のある方は本論文 [15] や Behrndt [3], Lotay-Pacini [19], Smoczyk-Wang [30], Smoczyk-Tsui-Wang [31] などを参照して頂きたい.

2. 極小ラグランジュ部分多様体と重み付きハミルトン安定性

この節では, 重み付き体積汎関数に関するラグランジュ部分多様体の体積変分問題を考える. 重み付き体積汎関数のハミルトン変形のもとでの第一及び第二変分公式を導出し, 重み付きハミルトン安定性の概念を導入する. さらに, そのような具体例が自然に現れることを見る. 詳細は, 論文 [15] を参照して頂きたい.

2.1. f-極小ラグランジュ部分多様体

(M,ω,J) を実 $2n$ 次元の (概)Kähler 多様体とする. ここで, ω はシンプレクティック形式, J は (概) 複素構造である. また, これらと両立する (概)Kähler 計量を g とかく. 実 n 次元多様体 L のはめ込み $\phi : L \to M$ が**ラグランジュ**であるとは, $\phi^*\omega = 0$ になることを言う. M 上にコンパクトサポートを持つ滑らかな関数 $f \in C_c^\infty(M)$ を 1 つ取る. 特に誤解の恐れがない限り, L 上に引き戻した関数 $\phi^* f$ も同じ記号 f で書くことにする. $d\mu$ を $\phi^* g$ に関する体積要素とし, L 上の重み付き測度距離空間 $(L, g, d\mu_f := e^{nf} d\mu)$ を考える. f に関する**重み付き体積**を

$$\mathrm{Vol}_f(\phi) := \int_L d\mu_f = \int_L e^{nf} d\mu$$

と定義する. この重み付き体積は, 共形計量 $g_f := e^{2f} g$ に関して測った ϕ の体積に他ならない. この重み付き体積汎関数に関する体積変分問題を考えよう. まず, 次の定義を置く:

定義 2.1 (cf. [15]). はめ込み ϕ が f-**極小** (resp. **ハミルトン** f-**極小**) であるとは, ϕ の任意の無限小変形 (resp. ハミルトン変形) に関して, ϕ が重み付き体積汎関数 Vol_f の臨界点になることを言う.

ϕの無限小変形ϕ_sに対し, 重み付き体積$\mathrm{Vol}_f(\phi_s)=\int_L d\mu_f$の第1変分は

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s)=-\int_L g\big(H-n(\overline{\nabla}f)^{\perp},V\big)d\mu_f$$

で与えられる[3]. ここで, $V=\frac{d}{ds}|_{s=0}\phi_s$は変分ベクトル場, $(\overline{\nabla}f)^{\perp}$は$M$上のグラディエント$\overline{\nabla}f$の$L$の法空間への射影である. そこで,

$$K_f:=H-n(\overline{\nabla}f)^{\perp}$$

とおけば,

$$\phi\text{が}f\text{-極小}\iff K_f\equiv 0$$

である. K_fのことをここではfに関する**変形平均曲率ベクトル**と呼ぶ[4]. 誤解の恐れがない場合には, fを省略して, K_fのことを単にKと書く.

ハミルトンf-極小性は次のように記述できる: まず,

$$\alpha_K:=\phi^*(i_K\omega)=\alpha_H-n\phi^*d^cf$$

とおき, これを**変形平均曲率形式**と呼ぶ. 今, $\Omega^1(L)$に作用する重み付き余微分作用素$\delta_f\alpha$と$C^\infty(L)$に作用する重み付きラプラシアンΔ_fを

$$\begin{aligned}\delta_f\alpha&:=-e^{-nf}\,\mathrm{div}(e^{nf}\alpha^{\sharp})=\delta\alpha-ng(df,\alpha),\quad \alpha\in\Omega^1(L),\\ \Delta_fu&:=-\delta_fdu=e^{-nf}\,\mathrm{div}(e^{nf}\nabla u)=\Delta u+ng(\nabla f,\nabla u),\quad u\in C^\infty(L),\end{aligned}$$

で定義する. ここで, $\Delta=\mathrm{div}\nabla=-\delta d$はLaplace-Bertrami作用素 (i.e., Hodge-de Rhamラプラシアンの-1倍)である. このとき, 第一変分公式から,

$$\phi\text{がハミルトン}f\text{-極小}\iff\delta_f\alpha_K\equiv 0$$

が分かる ([15]).

以降で見ていくように, 重みをつけて考えることにメリットがある場合や, 自然に重みが考えられる場合がある. また, 標準的な計量gでは極小とならない部分多様体を, ある種の極小部分多様体として捉えることができるため, f-極小部分多様体自体には様々な例が考えられる. いくつか例を挙げておく:

例 2.2. $M=S^2(\simeq\mathbb{C}P^1)$を考える. $U:=\{(\theta,h);0\le\theta\le 2\pi,-1<h<1\}$を$S^2$上の円柱座標系とする. すなわち,

$$(\theta,h)\mapsto(\sqrt{1-h^2}\cos\theta,\sqrt{1-h^2}\sin\theta,h)\in S^2.$$

$\omega:=d\theta\wedge dh$と定義すれば, これがU上の標準的なシンプレクティック形式を定める. S^2内のラグランジュ部分多様体はS^2上の曲線に他ならない. 今, z-軸に関する回転として, S^2上のS^1-作用を定めると, 点$p\in U$に対し, 軌道$S^1\cdot p$は小円であり, 高さ$h=0$

[3] f-極小性は単に共形計量に関する極小部分多様体と言うだけで, 概念として新しいものではない. また, 任意のリーマン多様体内の部分多様体に対して定義でき, 第一変分公式も一般にこの形をしている. しかし, どのような重み関数fを選ぶかが後で重要になる.

[4] 論文[15]では, [3]や[30]に倣って, Kのことを"generalized mean curvature vector"と呼んだ.

の点を通る軌道だけが, S^2 上の標準計量に関して極小 (測地線) である. 他の小円は極小ではないが, 一定の平均曲率を持つ.

高さ関数[5] $h: S^2 \to \mathbb{R}$ と実数 $t \in (-\infty, \infty)$ を用いて, S^2 上の重み関数 f_t を $f_t := th$ と定める. $t = 0$ の時は重みがない場合 (標準計量の場合) なので, $t \neq 0$ と仮定する. この時, 高さ h の小円の f_t に関する変形平均曲率ベクトルを計算すれば, $K_{f_t} = \{-h + t(1-h^2)\}\frac{\partial}{\partial h}$ であることが分かる. 従って,

$$K_{f_t} = 0 \iff h = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4t^2}}{2t}$$

となる. 最後の関数は, ($t = 0$ のとき 0 と定義すれば) t に関する単調増加な関数で, その値域は $-1 < h < 1$ である. すなわち, 高さ h の小円はある $t \in (-\infty, \infty)$ が一意的に存在して, f_t-極小なラグランジュ部分多様体になる.

例 2.3 (トーラス軌道). M をコンパクトトーリック Kähler 多様体とする. すなわち, 実 n 次元トーラス T^n が正則等長的かつハミルトン的に M に作用しているとする. このとき, T^n の正則な軌道はラグランジュ軌道である. M 上の T^n-不変な関数 $f \in C^\infty(M)$ を取れば, $T^n \subset \mathrm{Isom}(M, g_f = e^{2f}g)$ なので, M のコンパクト性から, 正則な T^n-軌道全体の中で Vol_f を最大にする軌道が存在し, それは f-極小である. 実際は, 全ての正則なトーラス軌道がハミルトン f-極小になっている (cf. [15]).

例 2.4 (Kähler 簡約, cf. [14]**).** (M, ω, J) を Kähler 多様体とし, ある関数 $f \in C^\infty(M)$ と 0 でない定数 C が存在して, M の Ricci 形式 ρ が $\rho = C\omega + ndd^cf$ $(C \neq 0)$ を満たすと仮定する (例えば, Kähler-Einstein 多様体, この場合 $f = 0$). K を $\mathrm{Aut}(M, \omega, J)$ の連結コンパクト部分群とすると, $K \to M$ はハミルトン的であり, その標準的運動量写像 $\tilde{\mu}: M \to \mathfrak{k}^*$ が

$$\langle \tilde{\mu}(p), X \rangle = \frac{1}{C}\Big\{-\frac{1}{2}\mathrm{div}J\tilde{X}_p + nd^cf(\tilde{X}_p)\Big\} \quad \text{for} \quad X \in \mathfrak{g}$$

として取れる. ここで, $\tilde{X}$ は X の基本ベクトル場である. もし, 0 が $\tilde{\mu}$ の正則値で, K が $\tilde{\mu}^{-1}(0)$ に自由に作用するならば, 商空間 $M_0 = \tilde{\mu}^{-1}(0)/K$ は多様体であり, 標準的に Kähler 構造 (ω_0, J_0, g_0) が誘導される. 標準的な射影を $\pi: \tilde{\mu}^{-1}(0) \to M_0$ とかく. M_0 上に共形 Kähler 計量 g_{HL} を

$$\begin{aligned} g_{HL}(x) &= e^{2f_0(x)}g_0, \text{ where} \\ f_0(x) &:= \log vol_g(\mathcal{O}_p)^{1/(n-l)} + \frac{n}{n-l}\check{f}(x). \end{aligned}$$

と定義する. ただし, $p \in \pi^{-1}(x)$, $\mathcal{O}_p = K \cdot p = \pi^{-1}(x)$, $l = \dim_{\mathbb{R}}K$, $\check{f}(x) = \pi \circ f(p)$ である. この計量を $g_f := e^{2f}g$ に関する Hsiang-Lawson 計量と呼ぶ (詳しくは, [14] を参照).

今, 任意の K-不変な f-極小ラグランジュ部分多様体 L をとると, L は 0-レベルセット $\tilde{\mu}^{-1}(0)$ に含まれ, 商空間 L/K は M_0 内で f_0-極小ラグランジュ部分多様体になる. また, この逆も正しい ([14] の定理 1). この構成法とは若干異なるが, 同じ原理を用いて, f-極小ラグランジュ部分多様体の例を 2.4 節で構成する.

[5] S^1 作用の運動量写像である.

例 2.5 (トランスレーティングソリトン, 自己相似解). $\mathbb{R}^{2n}(\simeq \mathbb{C}^n)$ を標準的なユークリッド内積 $\langle , \rangle$ を持つユークリッド空間とする. 0でない定ベクトル $V \in \mathbb{C}^n$ に対して, 線形写像 $f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \frac{1}{n}\langle x, V\rangle$$

と定める. このとき, この重み関数に関する f-極小性は,

$$H = V^{\perp} \tag{1}$$

と同値であり, (1) を満たす $\mathbb{C}^n$ 内のラグランジュ部分多様体を**ラグランジュトランスレーティングソリトン**と呼ぶ.

また, 二次多項式 $f_{\pm} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ を

$$f_{\pm}(x) := \pm\frac{1}{2n}|x|^2$$

と定義すると, $f_{\pm}$-極小性は,

$$H = \pm\mathbf{x}^{\perp}, \tag{2}$$

と同値である. ここで, $\mathbf{x}$ は点 x の位置ベクトルを表す. (2) を満たすラグランジュ部分多様体を, **ラグランジュ自己拡大解** (符号が $+$ のとき) および**ラグランジュ自己縮小解** (符号が $-$ のとき) と呼ぶ. トランスレーティングソリトンも自己縮小・拡大解も実際には一般の実ユークリッド空間内の任意余次元の部分多様体に対して定義できる平均曲率流の特別な解であり, 平均曲率流に現れる特異点のモデルという意味を持つ.

例えば, 半径1の超球面 $S^{2n-1}(1)$ に含まれるラグランジュ部分多様体 L で, 球面内で極小となるものは, $\mathbb{C}^n$ 内で $H = -\mathbf{x}^{\perp}$ を満たし自己縮小解になる. このような L は, $\mathbb{C}^n$ の標準計量に関してハミルトン極小であることにも注意しておく. 一般にラグランジュトランスレーティングソリトンや自己拡大解の構成法は多くは知られていないが, 例えば Joyce-Lee-Tsui [13] による構成が知られている.

2.2. ハミルトン f-安定性

f-極小ラグランジュ部分多様体の安定性を定義しよう:

定義 2.6 ([15], [23]). f-極小なラグランジュはめ込み $\phi : L \to M$ に対して, ϕ が**f-安定 (resp. ハミルトン f-安定)** であるとは, ϕ の任意の無限小変形 (resp. ハミルトン変形) ϕ_s に対して, $\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s) \geq 0$ が成り立つことを言う.

M が Kähler 多様体であると言う仮定のもと, ラグランジュはめ込みの第二変分は次のように計算される:

命題 2.7 ([15]). (M, ω, J, g) を Kähler 多様体, $\phi : L \to M$ を任意のラグランジュはめ込みとする. また, $\{\phi_s\}$ を ϕ の法方向への任意の無限小変形とし, その変分ベクトル場を $V = (d/ds)|_{s=0}\phi_s \in \Gamma(T^{\perp}L)$ とかく. このとき, 次が成り立つ:

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s) = \int_L \{|\delta_f \alpha_V|^2 - \rho_f(V, JV) - g(B(JV, JV), K) - g(\overline{\nabla}_V V, K) + g(V, K)^2\} d\mu_f,$$

ここで, $\rho_f := \rho - ndd^c f$, B は ϕ の g に関する第二基本形式である. 特に, ϕ がハミルトン f-極小で, ϕ_s がハミルトン変形ならば, 第二変分公式は,

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s) = \int_L \{|\Delta_f u|^2 - \rho_f(\nabla u, J\nabla u) - 2g(B(\nabla u, \nabla u), K) + g(\nabla u, K)^2\} d\mu_f.$$

と書ける. ここで, $u \in C^\infty(L)$ は $JV = \nabla u$ となる関数である.

この変分公式からすぐに分かることとして,

系 2.8. 命題2.7と同じ仮定に加え, ρ_f が非正であると仮定する. このとき, 任意の f-極小ラグランジュ部分多様体は f-安定である.

例えば, M が Kähler-Einstein ならば, ρ_f が非正というのは, 非正の Ricci 曲率を持つことに他ならない. この系2.8は実際はもっと一般の M に対して成り立つことが知られている (Lê Hông Vân の定理 [16]).

$\rho_f > 0$ の場合には, 通常の意味で安定なラグランジュ部分多様体の存在はあまり期待できない (例えば, Lawson-Simons の定理 [20]). その代わりにハミルトン f-安定性を考えることがより自然な設定になる.

2.3. 重み関数

今, ある定数 $C \in \mathbb{R}$ と関数 $f_\omega \in C^\infty$ が存在して, M の Ricci 曲率が次を満たすとする:

$$\rho_{f_\omega} = C\omega, \quad \text{or equivalently,} \quad \rho = C\omega + ndd^c f_\omega. \tag{3}$$

この場合には, f_ω-極小ラグランジュ部分多様体に関するハミルトン安定性は次の単純な判定法を持つ. これは, M が Kähler-Einstein の場合の Chen-Leung-Nagano 及び Oh [23] の結果の拡張である:

定理 2.9 ([15]). (M, ω, J) を Kähler 多様体であって, (3) を満たすと仮定する. このとき, f_ω-極小なコンパクトラグランジュ部分多様体 L がハミルトン f_ω-安定であるための必要十分条件は

$$\lambda_1(\Delta_{f_\omega}) \geq C$$

が成り立つことである. ここで, $\lambda_1(\Delta_{f_\omega})$ は $C^\infty(L)$ に作用する重み付きラプラシアン Δ_{f_ω} の 0 でない最小固有値である.

Ricci 曲率に関する仮定 (3) を満たす例としては, 次のものが含まれる:

例 2.10 (Fano 多様体). (M, J) が Fano 多様体, すなわち, 第一 Chern 類 $c_1(M)$ が正であるコンパクト複素多様体の場合, 標準的に, Kähler 形式 ω を $\omega \in 2\pi c_1(M)$ となるようにとることができる. 一方で, Ricci 形式 ρ は $c_1(M)$ を代表するから, ある実関数 $f_\omega \in C^\infty(M)$ が存在して, $\rho = \omega + ndd^c f$ とかける. 必要であれば, 適当にスケール変換をして, ω をある正の定数 C に関して (3) を満たすように取り直すことができる. 特に $f_\omega = 0$ の場合, M は Kähler-Einsiten と呼ばれるが, よく知られているように, 一般に Fano 多様体上の Kähler-Einstein 計量の存在には障害がある.

また, シンプレクティック幾何の文脈では, ω と両立する概複素構造に関して $\omega \in C' c_1(M)$ $(C' > 0)$ となるシンプレクティック多様体は**単調** (**monotone**) と呼ばれる.

例 2.11 (概Calabi-Yau多様体). Kähler多様体(M,ω,J)が, (Joyce [11]の意味で) **概Calabi-Yau**であるとは, 0でない正則体積要素Ωが存在することを言う. この場合, 重み関数fを次のようにして定義することができる (cf. [3]):

$$e^{2nf}\frac{\omega^n}{n!} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\right)^n \Omega\wedge\overline{\Omega}. \tag{4}$$

このとき, Ricci形式は$\rho = ndd^c f$ (i.e., $C=0$)を満たすことが分かる. f-極小ラグランジュ部分多様体Lは, 共形計量$g_f = e^{2f}g$に関するキャリブレート部分多様体になっていて, 従ってまた, そのホモロジー類の中で重み付き体積最小である([3]). 特に, 任意のf-極小ラグランジュ部分多様体はハミルトンf-安定になるが, このことは系2.8からも分かる.

別の例として, 例2.5で挙げた$\mathbb{C}^n$内のトランスレーティングソリトンおよび自己相似解を考えてみよう. $\mathbb{C}^n$の標準的なKähler形式ω_{st}はRicci平坦なKähler-Einstein計量であるが, 例2.5で挙げた重み関数に対して, 重み付きRicci形式は,

$$f(x) = \langle x, V\rangle \Longrightarrow \rho_f = 0 \quad \text{with} \quad C=0,$$
$$f_{\pm}(x) = \pm\frac{1}{2n}|x|^2 \Longrightarrow \rho_f = \mp\omega \quad (\text{複合同順})$$

となっており, いずれも(3)を満たすことが確かめられる. 特に次が分かる:

命題 2.12. (1) $\mathbb{C}^n$内の任意のラグランジュトランスレーティングソリトンおよびラグランジュ自己拡大解は, 例2.5で定義した重み関数に関して, 重み付き体積安定である.

(2) $\mathbb{C}^n$内の任意のコンパクトなラグランジュ自己縮小解 (i.e., f_--極小ラグランジュ部分多様体) は, ハミルトンf_--不安定である.

Proof. (1)は系2.8から従う. (2)を示そう. f_--極小ラグランジュはめ込み$\phi: L\to\mathbb{C}^n$の座標関数$(x^1,\dots,x^n,y^1,\dots,y^n)$を考える. このとき,

$$\Delta\phi = H, \text{ or equivalently } \Delta x^i = g\Big(H, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) \quad \text{and} \quad \nabla x^i = \Big(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big)^{\top},$$

となることが分かる (ここで, y^iに関しても同様). 従って,

$$\begin{aligned}\Delta_{f_-}x^i &= \Delta x^i + ng(\nabla f_-, \nabla x^i) = g\Big(H, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) + g\Big(n\nabla f_-, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big)\\ &= g\Big(n(\overline{\nabla}f_-)^{\perp} + n(\overline{\nabla}f_-)^{\top}, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = g\Big(n\overline{\nabla}f_-, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big)\\ &= -\frac{1}{2}g\Big(\mathbf{p}, \frac{\partial}{\partial x^i}\Big) = -\frac{1}{2}x^i.\end{aligned}$$

すなわち, 座標関数はΔ_{f_-}の固有値1/2の固有関数になる. よって, Δ_{f_-}の第一固有値は, $\lambda_1(\Delta_{f_-}) \le \frac{1}{2} < 1$を満たし, 定理2.9からハミルトン$f_-$-不安定であることが分かる. □

例えば, $\mathbb{C}^n$内のクリフォードトーラスは自己縮小解の例である. これは, 例2.5で定義した重み関数に関してはハミルトン不安定なのであるが, $\mathbb{C}^n$の標準計量に関する体積に関しては, ハミルトン極小かつハミルトン安定であることが知られている (cf. [24]). この例が示しているように, 一般にハミルトン安定性は重みのつけ方に依存する.

2.4. 例: 重み付き射影空間内のトーラス軌道

ρ_f が正の場合に, ハミルトン f-安定な例を構成するために, ここでは重み付き射影空間内のトーラス軌道を考える.

$\mathbb{C}^{n+1}$ を標準的な Kähler 構造 (ω_{st}, J_{st}) を持つ複素ユークリッド空間とする. 今,

$$\omega_{st} = dd^c F \quad \text{with} \quad F(z) := \frac{1}{4}|z|^2. \tag{5}$$

であることに注意する.

最大公約数が 1 であるような, $n+1$ 個の自然数の組み $\mathbf{a} := (a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{N}^{n+1}$ を一つ固定する. $S^1 := \{e^{\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{C}^*; \theta \in \mathbb{R}\}$ の $\mathbb{C}^{n+1}$ への作用を

$$e^{\sqrt{-1}\theta} \cdot (z^1, \ldots, z^{n+1}) := (e^{\sqrt{-1}a_1\theta} z^1, \ldots, e^{\sqrt{-1}a_{n+1}\theta} z^{n+1}). \tag{6}$$

と定め, これを重み付き S^1-作用と呼ぶ. この作用はハミルトン的であり, その運動量写像 $\mu : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ は次で与えられる:

$$\mu(z) := -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} a_i |z^i|^2.$$

正則値 $c \in \mathbb{R}$ に対し, シンプレクティック商 $\mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}} := \mu^{-1}(c)/S^1$ を**重み付き射影空間**と呼ぶ. $\mathbb{C}^{n+1}$ の標準 Kähler 構造は, $\mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ 上の標準的な Kähler 構造 (ω_c, J_c, g_c) を誘導し (cf. [8] の定理 7.2.3), $\mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ はトーリックケーラー軌道体になる.

軌道体の構造は以下のように述べられる (cf. [1]): 点 $[z] = [z^1, \ldots, z^{n+1}] \in \mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ に対し, $[z]$ における軌道体構造群 (orbifold structure group) は $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ で与えられる. ここで, m は集合 $\{a_j; j = 1, \ldots, n+1 \text{ s.t. } z^j \neq 0\}$ の最大公約数である. 特に, $[z]$ が smooth point であるための必要十分条件は $m = 1$ となることである. 例えば, すべての $j = 1, \ldots, n+1$ に対して, $z^j \neq 0$ となるなら, $[z]$ は smooth point である. 特にもし, $\{a_j\}_{j=1}^n$ のどの組み合わせをとっても互いに素なら $\mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ は滑らかな多様体になる.

一方, 重み付き射影空間 $(\mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}, \omega_c, J_c)$ の smooth point における Ricci 形式は次のように計算される (cf. [14]):

$$\rho_c = C\omega_c + n dd^c f_{\mathbf{a}} \quad \text{where}$$
$$C := -\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n+1} a_i > 0 \quad \text{and} \quad f_{\mathbf{a}}(x) := \frac{1}{n} \Big\{ \Big(\frac{1}{c} \sum_{i=1}^{n+1} a_i \Big) \check{F}(x) + \log vol_{g_{st}}(\mathcal{O}_p) \Big\}.$$

ここで, $\check{F}$ は, S^1-不変関数 F から誘導される $\mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ 上の関数であり, $\mathcal{O}_p$ は点 x 上のファイバーである.

$n+1$ 次元の実トーラス T^{n+1} の $\mathbb{C}^{n+1}$ への標準的な作用

$$(e^{\sqrt{-1}\theta_1}, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_{n+1}}) \cdot (z^1, \ldots, z^{n+1}) := (e^{\sqrt{-1}\theta_1} z^1, \ldots, e^{\sqrt{-1}\theta_{n+1}} z^{n+1}).$$

を考え, その軌道として半径 r の **Clifford torus**

$$T^{n+1}_r := T^{n+1} \cdot (r, \ldots, r).$$

を考える. T_r^{n+1} は, $\mathbb{C}^{n+1}$ 内のラグランジュ部分多様体であり, 重み付き S^1-作用で不変である. 従って, T_r^{n+1} は重み付き S^1-作用に関するあるレベルセット $\mu^{-1}(c)$ に含まれる. ただしここで, $c = -\frac{r^2}{2}\sum_{i=1}^{n+1} a_i$ である. このとき, 商空間 $T_{\mathbf{a}}^n := T_r^{n+1}/S^1$ は $\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n$ 内の特異点を持たないラグランジュトーラスになる. このラグランジュトーラス $T_{\mathbf{a}}^n$ に対して, 次を示した:

定理 2.13 ([15]). $\mathbf{a} := (1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ とする. $T_{\mathbf{a}}^n = T_r^{n+1}/S^1$ を上で構成したラグランジュトーラスとすると, 次が成り立つ:

(1) $T_{\mathbf{a}}^n$ は $\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n$ 内の $f_{\mathbf{a}}$-極小ラグランジュ部分多様体である.

(2) $C^\infty(T_{\mathbf{a}}^n)$ に作用する $T_{\mathbf{a}}^n$ 上の平坦計量に関するラプラシアンの第一固有値は

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{r^2} = C.$$

を満たす. ここで, 等号成立は, $\mathbf{a} = (1, a_2, \ldots, a_{n+1})$ のうち少なくとも二つが等しい場合であり, そのときに限る. 特に, $T_{\mathbf{a}}^n$ は $\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n$ 内で標準的な重み関数 $f_{\mathbf{a}}$ に関して, ハミルトン $f_{\mathbf{a}}$-安定になる.

注意 2.14. (1) $\mathbf{a} = (1, 1, \ldots, 1)$ の場合は, $\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n = \mathbb{C}P^n$ であり, $T_{\mathbf{a}}^n$ は複素射影空間内の Clifford トーラスである. この場合のハミルトン安定性は Oh[23] による.

(2) $T_{\mathbf{a}}^n$ は, $(\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n, \omega_c)$ 内の (一意的な) 単調ラグランジュトーラス軌道になる (cf. [15]). Abreu-Macarini [2] によれば, $T_{\mathbf{a}}^n$ は, $\mathbb{C}P^n$ 内の Clifford トーラス同様, $\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n$ 内で Hamiltonian non-displaceable である.

注意 2.15. 定理2.13では, Kähler 簡約によって誘導される $\mathbb{C}P_{\mathbf{a}}^n$ 上の標準的 Kähler 構造が決める Ricci 形式に現れるポテンシャル関数として重み関数 $f_{\mathbf{a}}$ を考えた. これとは別に, 関数

$$f_{HL}(x) := \log vol_{g_{st}}(\mathcal{O}_p)^{1/n}$$

として重みを定義することも考えられる ($f_{\mathbf{a}}$ との違いに注意). この重み関数による共形計量 $g_{f_{HL}} := e^{2f_{HL}}g$ は Hsiang-Lawson 計量と呼ばれる. $T_{\mathbf{a}}^n$ は f_{HL}-極小ではないが, ハミルトン f_{HL}-極小であり, さらにハミルトン f_{HL}-安定にもなる.

3. 変形平均曲率流

前節で, f-極小ラグランジュ部分多様体のハミルトン f-安定性, および具体例について述べた. しかし, 一般にはハミルトン f-安定な f-極小ラグランジュ部分多様体を見つけることは難しい. そこで, 与えられたラグランジュ部分多様体を滑らかに変形していくことで, f-極小ラグランジュ部分多様体を見つけるという方法を考える. そのような方法の一つが, この節で解説する変形平均曲率流である.

3.1. 変形平均曲率流

まず M を一般の Riemann 多様体, $\phi : L \to M$ をコンパクトな多様体 L からのはめ込みとする. はめ込みの1径数族 $F : L \times [0, T) \to M$ が

$$\frac{\partial F}{\partial t}(x, t) = K_f(x, t), \quad F(\cdot, 0) = \phi \tag{7}$$

を満たしているとき, F のことを**変形平均曲率流**という. ただし $K_f(x,t)$ はある関数 $f \in C^\infty(M)$ による $F_t := F(\cdot,t) : L \to M$ の変形平均曲率ベクトルである. 変形平均曲率流と通常の平均曲率流との違いは, 低階微分の項 $-n(\nabla f)^\perp$ だけであるから, 短時間解の存在と一意性は保証されている. 変形平均曲率流は次の性質を持つ:

(a) 重み付き体積汎関数 Vol_f に関する勾配流である. すなわち,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}_f(F_t) = -\int_L g(K,K)d\mu_f = -\int_L |K|^2 d\mu_f$$

を満たす.

(b) 停留点は f-極小はめ込みである.

さらに, (M,ω,J) が $\rho = C\omega + ndd^c f$ を満たす複素 n 次元 Kähler 多様体で, $\phi : L \to M$ がラグランジュはめ込みならば次の性質を持つ:

(c) 変形平均曲率流ははめ込みのラグランジュ性を保つ.

この性質 (c) により, 初期値をラグランジュはめ込みとした変形平均曲率流のことを**変形ラグランジュ平均曲率流**とよぶ. これは Smoczyk [28] が導入した Kähler-Einstein 多様体内でのラグランジュ平均曲率流の拡張になっていることを注意しておく.

これらの性質から, 直感的には, 与えられたラグランジュ部分多様体を変形平均曲率流で変形していくことにより, f-極小ラグランジュ部分多様体にたどり着けるのではないかと期待できる. しかしこれは一般には正しくない. 実際, $\mathbb{C}P^1 = S^2$ 内の大円はハミルトン安定な極小ラグランジュ部分多様体であるが, その大円の近くの小円 (ラグランジュ部分多様体) をどのように取ってきても, 平均曲率流のもとでは大円に収束せずに一点に潰れてしまう. 一方, 初期ラグランジュ部分多様体として大円をハミルトン変形したものを選べば, それは平均曲率流のもとで大円に収束する. ここでの重要な観察は, 大円への収束のためには, 少なくとも初期ラグランジュ部分多様体が, 大円と同じハミルトンイソトピー類に属していなければならないということである. 一般の変形ラグランジュ平均曲率流においても, 同様の現象が起こっていると考えられる.

このことについてもう少し詳しく見ていく. まず (3) を満たす Kähler 多様体内のラグランジュ部分多様体上では, 変形平均曲率形式 α_K が閉形式 ($d\alpha_K = 0$) となる. したがって α_K はコホモロジー類 $[\alpha_K]$ を代表するが, 特に $[\alpha_K] = 0$ のとき, **完全なラグランジュ部分多様体**と呼ぶことにする. もちろん f-極小ラグランジュ部分多様体ならば $[\alpha_K] = 0$ であるから, 完全である. 完全なラグランジュ部分多様体 L 上では大域的な関数 $\theta \in C^\infty(L)$ が存在して,

$$\alpha_K = d\theta$$

を満たす. 我々はこの関数 θ を**ラグランジュ偏角**と呼ぶことにする.

命題 3.1 ([15]). 変形平均曲率形式 $[\alpha_K]$ について, 次が成立する:

(1) $[\alpha_K]$ はハミルトン変形により不変である.

(2) ラグランジュ部分多様体の完全性は, 変形平均曲率流のもとで保たれれる.

この命題から, 与えられたラグランジュ部分多様体を変形平均曲率流に沿って f-極小ラグランジュ部分多様体へ変形させるためには, 初期値として完全なラグランジュ部分多様体, すなわち f-極小ラグランジュ部分多様体と同じハミルトンイソトピー類に属するものを選ぶことが妥当であるとわかる. 詳細は [15] を参照していただきたい.

3.2. 変形平均曲率流の収束定理

ここから先は, 常に以下を仮定する:

- (M,ω,J) は複素 n 次元のコンパクトな Kähler 多様体で
$$\rho = C\omega + ndd^c f, \quad C>0, \quad f\in C^\infty(M)$$
を満たす.
- L を実 n 次元のコンパクト多様体とし, $\phi : L \to M$ をラグランジュはめ込みとする.

特に我々が興味のある Fano 多様体内の変形ラグランジュ平均曲率流を考える場合にはこの設定でよい. すでに述べたように, 初期ラグランジュ部分多様体が f-極小ラグランジュ部分多様体と同じハミルトンイソトピー類に属している場合に, 変形ラグランジュ平均曲率流の収束を考えたい. そこでまずハミルトンイソトピー類の中で, ハミルトン f-安定な f-極小ラグランジュ部分多様体にある意味で「十分近い」ラグランジュ部分多様体に対して変形平均曲率流の収束性を調べた. 我々の主結果は次である.

定理 3.2 ([15]). $L\subset M$ を完全なラグランジュ部分多様体とする. このとき任意の正定数 $V_0,\Lambda_0,\delta_0>0$ に対して, ある $\epsilon_0=\epsilon_0(n,V_0,\Lambda_0,\delta_0,C,\overline{R}_5,f_7,\mathrm{inj}(M))>0$ が存在して, もし L 上で
$$\mathrm{Vol}_f(L)\le V_0, \quad |B|\le \Lambda_0, \quad \lambda_1(\Delta_f)\ge C+\delta_0, \quad \int_L |K|^2 d\mu_f \le \epsilon_0$$
であれば, L を初期値とする変形ラグランジュ平均曲率流は時間大域的に存在し, 指数的速度でハミルトン f 安定な f-極小ラグランジュ部分多様体に C^∞ 収束する.

ここで定理の中で現れた $\overline{R}_5, f_7$ は次のように定義される定数である:
$$\overline{R}_k := \sum_{l=0}^{k}\sup_M |\overline{\nabla}^l\, \overline{\mathrm{Rm}}\,|, \quad f_r := ||f||_{C^r(M)} = \sum_{l=0}^{r}\sup_M |\overline{\nabla}^l f|.$$

定理3.2の中の条件を満たすような初期ラグランジュ部分多様体は, $\lambda_1(\Delta_f)>C$ を満たす f-極小ラグランジュ部分多様体を十分小さくハミルトン変形することにより得られる. 例えば定理2.13におけるラグランジュトーラス $T^n_{\mathbf{a}}\subset \mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ で, $\lambda_1>C$ の場合には, それを十分小さくハミルトン変形したものに対して定理3.2を適用できる. また収束先の f-極小ラグランジュ部分多様体も $\lambda_1>C$ を満たし, ハミルトン f-安定となることがわかる.

一方, 収束先として想定する f-極小ラグランジュ部分多様体で $\lambda_1=C$ となっているものに対しては定理3.2を適用できない. そこでもう少し別の考察をする必要がある. まず ϕ_s を f-極小ラグランジュはめ込み $\phi: L\to M$ のハミルトン変形とする. 特に,
$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s)>0 \tag{8}$$

となるハミルトン変形を**本質的ハミルトン変形**と呼び, その変分ベクトル場を

$$X := \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\phi_s$$

とおく. 本質的ハミルトン変形は次のように言い換えることができる.

補題 3.3. 極小ラグランジュ部分多様体 $L \subset M$ 上で, $\lambda_1(\Delta_f) = C$ と仮定し, L のハミルトン変形 $L_s = \phi_s(L)$ を考える. このとき, ϕ_s が本質的ハミルトン変形であるための必要十分条件は, 変分ベクトル場 X が, ある関数 $u \notin E_{\lambda_1}$ によって

$$X = J\nabla u$$

と書けることである. ただし, E_{λ_1} は λ_1 に関する固有空間とした.

Proof. ハミルトン変形 ϕ_s に沿った変分ベクトル場を $X_s = \frac{d\phi_s}{ds}$ とおく. L_s はハミルトン変形なので, 滑らかな関数族 $u_s \in C^\infty(L_s)$ が存在して, $X_s = J\nabla u_s$ と書ける. 命題2.7によれば, f-極小ラグランジュ部分多様体 L のハミルトン変形のもとでの第二変分公式は

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s) &= \int_L |\Delta_f u|^2 - C|\nabla u|^2 d\mu_f \\ &= \int_L (\Delta_f u + Cu)\Delta_f u d\mu_f.\end{aligned}$$

ここで Δ_f の固有値 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ に対応する固有関数 η_i を

$$\Delta_f \eta_i + \lambda_i \eta_i = 0, \quad \int_L \eta_i^2 = 1$$

を満たすものとして選んでおくと, u は

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \eta_i \tag{9}$$

と表すことができる. このとき固有関数の直交性を使うと

$$\frac{d^2}{ds^2}\Big|_{s=0}\mathrm{Vol}_f(\phi_s) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \lambda_i(\lambda_i - C) \geq 0.$$

いま L 上で $\lambda_1 = C$ であったので, 等号成立の必要十分条件は $a_i = 0, i \geq 2$ である. したがって (9) により, 等号成立の必要十分条件は $u \in E_{\lambda_1}$ である. □

本質的ハミルトン変形のもとで, 次の収束定理を示すことができる.

定理 3.4 ([15]). $\phi : L \to M$ を $\lambda_1(\Delta_f) = C$ を満たす f-極小ラグランジュ部分多様体とし, ϕ_s を ϕ の本質的ハミルトン変形とする. このとき, ある $\epsilon_0 = \epsilon_0(X, \phi(L), M) > 0$ が存在して, もし ϕ_s が

$$||\phi_s - \phi||_{C^3} \leq \epsilon_0$$

を満たせば, ϕ_s を初期値とする変形ラグランジュ平均曲率流は時間大域的に存在し, 指数的速度でハミルトン f-安定な f-極小ラグランジュ部分多様体に C^∞ 収束する.

例えば, 定理2.13におけるラグランジュトーラス $T^n_{\mathbf{a}} \subset \mathbb{C}P^n_{\mathbf{a}}$ で, $\lambda_1 = C$ の場合には定理3.4を適用できる. 以上, 2つの収束定理は M が Kähler-Einstein 多様体の場合に, Li [17] が示したラグランジュ平均曲率流の収束定理の変形平均曲率流への拡張になっている.

4. 収束定理の証明

この節では, 前節で述べた変形ラグランジュ平均曲率流の収束定理の証明の概要を述べる. $\lambda_1(\Delta_f) > C$ の場合である定理3.2の証明や, 詳細な計算については論文 [15] を参照していただきたい. ここでは $\lambda_1(\Delta_f) = C$ の場合である定理3.4について, どのように変形ラグランジュ平均曲率流の収束を示すのかを見ていくことにする. M や L の設定は前節と同じである. 以下, $L_s := \phi_s(L)$ を f-極小ラグランジュ部分多様体 $L_0 := \phi(L)$ の本質的ハミルトン変形とし, L_0 に沿った変分ベクトル場を X と書く. さらに, L_s を初期値とする変形平均曲率流を $L_{s,t}$ で表す.

収束定理の証明は込み入っているので, ここで大まかな証明の流れを述べておく. 目標は $|B|$ と $|K|$ を固定した時間区間でうまくコントロールすることである.

1. まず, 初期値として $||\phi_s - \phi||_{C^3} \leq \epsilon_0$ を仮定しているので,

$$\mathrm{Vol}_f(L_s) \leq V_0, \quad |B_s| \leq \Lambda_0, \quad |K_s| \leq \epsilon_0$$

   を満たしていると思ってよい.

2. 変形平均曲率流に沿って, 短い時間であれば $|B|$ や $|K|$ があまり大きく変化しないことを見る. これは最大値原理と, Gronwall の不等式によりわかる. そこで, その十分短い時間区間を固定しておけば, B と K に関する C^0 評価が得られる. しかしこの段階では時間区間の取り方によって評価が変わってしまうため, 同じ固定した時間区間で評価を改善する必要がある. それは以下でなされる.

3. 変形平均曲率流に沿って K の L^2 評価を, 固定した時間区間で求める:

$$\int_{L_{s,t}} |K|^2 d\mu_f \leq e^{-c(\Lambda_0,\epsilon_0)t} \int_{L_s} |K|^2 d\mu_f$$

4. 一方, 変形平均曲率流のもとでの B の固定した時間区間における高階微分の評価を, B の C^0 評価から出す. (これは通常の平均曲率流においても同様の方法でなされる.)

5. B の高階微分 (特に, 1 階微分) の評価から $|\nabla K|$ の評価が出るので, これと K の L^2 評価, そして体積非崩壊の条件を組み合わせることにより, 変形平均曲率流に沿った K の指数型 C^0 評価を, 固定した時間区間で出す.

6. B に関しても同様に同じ時間区間内で改善された C^0 評価を出し, そのことから変形平均曲率流の解がいくらでも延長できることを示す. 収束については K の評価により示す.

4.1. 収束定理の証明準備1

我々はf-極小ラグランジュ部分多様体L_0のハミルトン変形L_sを考えるのであるが, 命題3.1によりL_sは完全なラグランジュ部分多様体となり, L_sに沿ったラグランジュ偏角$\theta_s \in C^\infty(L_s)$が定義できる. 一方, L_sはハミルトン変形であるから, 定義からある関数$u_s \in C^\infty(L_s)$が存在して

$$JX = \nabla u_s$$

を満たしている. このとき次が成り立つ.

補題 4.1. $\phi : L \to M$を完全なラグランジュはめ込みとし, ϕ_sをϕのハミルトン変形とするとき, ϕ_sに沿ったラグランジュ偏角θ_sの変化は

$$\frac{d\theta_s}{ds} = \Delta_f u_s + C u_s \tag{10}$$

で与えられる.

さて, 収束定理3.4の証明のキーポイントとなるのは, 変形平均曲率流に沿った変形平均曲率ベクトルKのL^2ノルムの時間発展を計算し評価することである. これは重み付き体積汎関数Vol_fの第二変分と同様の方法で計算できる.

補題 4.2. 初期値L_0が完全なラグランジュ部分多様体である変形平均曲率流に沿って,

$$\frac{d}{dt}\int_{L_t} |K|^2 d\mu_f = \int_{L_t} -2|\Delta_f \theta|^2 + 2C|K|^2 + 2g(B(JK, JK), K) - |K|^4 d\mu_f$$

が成り立つ.

以下, ハミルトン変形L_sは次の意味で十分小さいと仮定する:

$$||\phi_s - \phi||_{C^3} \le \epsilon_0. \tag{11}$$

ただし, この$\epsilon_0 > 0$は次の命題の中で定まるものとする.

命題 4.3. L_0をf-極小ラグランジュ部分多様体, $L_s = \phi_s(L_0)$を本質的ハミルトン変形とし, その変分ベクトル場をXとする. このとき任意の$\Lambda > 0$に対して, ある$\epsilon_0 = \epsilon_0(L_0, X, M) > 0$と$\delta_0 > 0$が存在して, もし

$$|B_s|(t) \le \Lambda, \quad |K_s|(t) \le \epsilon_0, \quad \forall t \in [0, T] \tag{12}$$

が満たされるならば, $L_{s,t}$のラグランジュ偏角$\theta_{s,t}$は次を満たす:

$$\int_{L_{s,t}} |\Delta_f \theta_{s,t}|^2 d\mu_f \ge (C + \delta_0) \int_{L_{s,t}} |\nabla \theta_{s,t}|^2 d\mu_f, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{13}$$

したがって, 特に

$$\frac{d}{dt}\int_{L_{s,t}} |K_{s,t}|^2 d\mu_f \le -2(\delta_0 - \Lambda\epsilon_0) \int_{L_{s,t}} |K_{s,t}|^2 d\mu_f, \quad \forall t \in [0, T] \tag{14}$$

が成り立つ.

Proof. (13) が成り立たないと仮定すると, 定数の列 $s_i \to 0, \delta_i \to 0, t_i \in [0,T]$ であって

$$|B_{s_i}|(t) \leq \Lambda, \quad |K_{s_i}|(t) \to 0, \quad t \in [0,T] \tag{15}$$

かつ

$$\int_{L_{s_i,t_i}} |\Delta_f \theta_{s_i,t_i}|^2 d\mu_f < (C+\delta_i) \int_{L_{s_i,t_i}} |\nabla \theta_{s,t}|^2 d\mu_f \tag{16}$$

を満たすものがとれる. ここでChen-He [4] による次の結果が必要になる.

補題 4.4. 変形平均曲率流の列 $\phi_k(t) : L \to M$ がすべての k について

$$|B_k|(t) \leq \Lambda, \quad \forall t \in [0,T]$$

を満たしていれば, ある変形平均曲率流 $\phi_\infty(t), t \in (0,T)$ に幾何収束する $\phi_k(t)$ の部分列が存在し, 各 $\phi_\infty(t)(L)$ は滑らかなリーマン多様体となる.

Chen-Heの結果はもともとユークリッド空間内の平均曲率流に対して示されたものであった. M が一般のコンパクトリーマン多様体の場合には, M を次元の高いユークリッド空間に埋め込むことにより, Chen-Heの結果を適用すれば良い. この議論は変形平均曲率流に対しても同様に適用できる.

改めて証明の続きに戻る. (15) に補題4.4を適用すると, 変形ラグランジュ平均曲率流の列 $L_{s_i,t}$ は $L_{\infty,t}, (t \in (0,T))$ に滑らかに収束することが従う. このとき各 $t \in (0,T)$ に対して, $L_{\infty,t}$ は f-極小であることが(15)からわかる. さらに条件(11)から $L_{\infty,t}$ は $t \to 0$ で L_0 に $C^{2,\alpha}$ 収束する. したがって $s_i \to 0$ のとき, 変形平均曲率流の解の一意性から

$$L_{s_i,t} \to L_{\infty,t} = L_0, \quad t \in [0,T]$$

となる.

ここで, (16) の両辺を $s_i > 0$ で割ると

$$\int_{L_{s_i,t_i}} \left|\Delta_f \frac{1}{s_i}\theta_{s_i,t_i}\right|^2 d\mu_f < (C+\delta_i) \int_{L_{s_i,t_i}} \left|\nabla \frac{1}{s_i}\theta_{s_i,t_i}\right| d\mu_f.$$

さらに $s_i, \delta_i \to 0$ とすると

$$\int_{L_0} \left|\Delta_f \frac{\partial \theta_{s,t}}{\partial s}\Big|_{(0,t_i)}\right|^2 d\mu_f \leq C \int_{L_0} \left|\nabla \frac{\partial \theta_{s,t}}{\partial s}\Big|_{(0,t_i)}\right|^2 d\mu_f \tag{17}$$

を得る.

一方, 完全なラグランジュ部分多様体のハミルトン変形のもとでのラグランジュ偏角 $\theta_{s,t}$ の変化は補題4.1の式(10)により与えられていた. いま, 特に初期値が完全なラグランジュ部分多様体の変形平均曲率流を考えれば, ラグランジュ偏角の発展方程式は

$$\frac{d\theta_{s,t}}{dt} = \Delta_f \theta_{s,t} + C\theta_{s,t} \tag{18}$$

となる. この両辺を s_i で割って, $s_i \to 0$ とすると, 次の熱方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\Big|_{s=0} = \Delta_f \frac{d\theta_{s,t}}{ds}\Big|_{s=0} + C\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\Big|_{s=0} \tag{19}$$

を得る．ここで固有値分解(9)と，L上で$\lambda_1 = C$であることを使うと

$$\left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{(s,t)=(0,0)} = (-\Delta_f u_0 - Cu_0) \perp E_{\lambda_1} \tag{20}$$

がわかる．次に，これがすべての$t \in [0,T]$で成立していることを確かめる．まずtによらない関数$\eta \in E_{\lambda_1}$を適当にとる．そして(18)の両辺にかけて，L_0上で積分すると

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{L_0} \eta \left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0} d\mu_f &= \int_{L_0} \eta\Big(\Delta_f \left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0} + C\left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0}\Big) d\mu_f \\ &= \int_{L_0} \Big(\Delta_f \eta + C\eta\Big) \left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0} d\mu_f \\ &= 0\end{aligned}$$

となることがわかる．ただし最後の等式では，$\eta \in E_{\lambda_1}$と(20)を使った．したがって，すべての時刻$t \in [0,T]$について

$$\int_{L_0} \eta \left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0} d\mu_f = 0.$$

すなわち，時刻$t \in [0,T]$によらず，

$$\left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0} \perp E_{\lambda_1} \tag{21}$$

が言えた．また，ϕ_sが本質的ハミルトン変形であったことを思い出すと，第二変分公式から

$$\left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{(s,t)=(0,0)} = -\Delta_f u_0 - Cu_0 \neq 0$$

でなくてはならない．よって，$\frac{d\theta_{s,t}}{ds}|_{s=0}$は熱方程式(19)の解として，すべての時刻$t \in [0,T]$で0でない．したがって(21)により

$$\int_{L_0} \left|\Delta_f \left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0}\right|^2 d\mu_f \geq \lambda_2 \int_{L_0} \left|\nabla \left.\frac{d\theta_{s,t}}{ds}\right|_{s=0}\right|^2 d\mu_f$$

が従う．ここで$\lambda_2 = \lambda_2(\Delta_f) > \lambda_1 = C$は$\Delta_f$の第2固有値である．ところが，この不等式は(17)に矛盾する．よって，命題4.3の前半(13)が示された．

次に，後半の(14)を示す．まず$L_{s,t}$は完全なラグランジュ部分多様体であり，変形平均曲率流により完全性が保たれることを注意しておく．このとき補題4.2と(12), (13)により

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{L_{s,t}} |K|^2 d\mu_f &= \int_{L_{s,t}} -2|\Delta_f \theta_{s,t}|^2 + 2C|K|^2 + 2g(B(JK,JK),K) - |K|^4 d\mu_f \\ &\leq \int_{L_{s,t}} -2|\Delta_f \theta_{s,t}|^2 + 2(C+\Lambda\epsilon_0)|\nabla\theta_{s,t}|^2 d\mu_f \\ &\leq -2(\delta_0 - \Lambda\epsilon_0)\int_{L_{s,t}} |K|^2 d\mu_f\end{aligned}$$

と計算できる．これで命題4.3の後半も示された． □

4.2. 収束定理証明準備2

変形平均曲率流の収束を示すためには, 第2基本形式 B や変形平均曲率ベクトル K をうまく評価してやる必要がある. ここではそのような評価について述べておく. まず変形平均曲率流に沿って, 第2基本形式の時間によらない評価が得られたとすると, 実は第2基本形式の高階微分の評価は自動的に得られることがわかる.

補題 4.5. コンパクトなラグランジュ部分多様体に対する変形平均曲率流 L_t に沿って

$$\max_{L_t} |B|^2 \leq \Lambda < \infty, \quad t \in [0, T]$$

であれば, 各 $m \geq 1$ に対して定数 $c_m = c_m(n, \Lambda, \overline{R}_{m+1}, f_{m+3}, T)$ が存在して

$$\max_{L_t} |\nabla^m B|^2 \leq \frac{c_m}{t^m}, \quad t \in (0, T]$$

が成り立つ. 特に

$$\max_{L_t} |\nabla^m H|^2 \leq \frac{c_m}{t^m}, \quad \max_{L_t} |\nabla^m K|^2 \leq \frac{c_m}{t^m}, \quad t \in (0, T]$$

も成り立つ.

証明は [9] 参照. この評価から, 変形平均曲率流の解の存在時間について次のことがわかる.

命題 4.6. 変形平均曲率流 $L_t, t \in [0, T)$ に沿って, 第2基本形式が有界, すなわち

$$|B|^2(t) \leq \Lambda, \quad t \in [0, T)$$

であれば, L_t は時刻 T を越えて延長できる.

したがって, 変形平均曲率流の解が時間大域的に存在するためには, 第2基本形式の時刻によらない評価を得る必要がある.

さて, 我々はすでに変形平均曲率流に沿った K の L^2 評価を得ているのであるが, 最終的には K の C^0 評価が欲しい. L^2 評価から C^0 評価を導くために, ここでは体積比に関する以下の条件を考える. Riemann 多様体 L に関して, 正の定数 $\kappa > 0, r > 0$ が存在して

$$\frac{\mathrm{Vol}(B(x, s))}{s^n} \geq \kappa, \quad \forall x \in L, \quad \forall s \leq r$$

が成り立つとき, L はスケール r で κ-非崩壊という. ここで $B(x, s)$ は点 $x \in L$ を中心とした半径 $s > 0$ の L 上の測地球である. L がコンパクトのとき, [7] の命題14によれば, このような $\kappa > 0$ と $r > 0$ は次元 n と単射半径 $\mathrm{inj}(L)$ により定まることに注意しておく. [17] の補題3.5と同様にして次がわかる.

補題 4.7. $L \subset M$ はコンパクトかつスケール r で κ-非崩壊とする. このとき, L 上の任意のテンソル S に対して

$$|\nabla S| \leq \Lambda, \quad \int_L |S|^2 d\mu_f \leq \epsilon \leq r^{n+2}$$

ならば,

$$\max_L |S| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{\kappa \cdot \min_M e^{nf}}} + \Lambda \right) \epsilon^{\frac{1}{n+2}} = c \epsilon^{\frac{1}{n+2}}$$

が成り立つ. ただし $c = c(n, \Lambda, f_0, \mathrm{inj}(L)) > 0$ は定数.

さて, 次の補題は直感的には明らかである.

補題 4.8. 初期値 L_0 が

$$|B|(0) \leq \Lambda, \quad |K|(0) \leq \epsilon$$

を満たしているとする. このとき, ある時刻 $T = T(n, \Lambda, \overline{R}_1, f_3)$ が存在して, 変形平均曲率流 L_t は

$$|B|(t) \leq 2\Lambda, \quad |K|(t) \leq 2\epsilon \quad \forall t \in [0, T]$$

を満たす.

すなわち, 変形平均曲率流に沿って, 短時間であれば $|B|, |K|$ や体積比の条件は初期値から大きくは変化しない. 証明は [15] 参照.

いま, 初期値として $|B_s|(0) \leq \Lambda_0$ を仮定すると, 十分小さい時間区間 $[0, t_1]$ では $|B_{s,t}| \leq 3\Lambda_0$ と思ってよい. したがって補題4.5により高階微分の評価

$$|\nabla^m B_{s,t}| \leq c_m(\Lambda_0), \quad t \in [t_0, t_1]$$

が得られる. このとき [4] の命題 2.2 により, ある定数 $\iota = \iota(n, \Lambda_0, M) > 0$ が存在して, 変形平均曲率流 L_t に沿って

$$\mathrm{inj}(L_t) \geq \iota > 0, \quad t \in [t_0, t_1]$$

となる. 特に $r \leq \frac{1}{2}\iota$ としておけば, [7] の命題 14 により, この時間区間で一様にスケール r で κ-非崩壊とすることができる. したがって, $[t_0, t_1]$ を, 改めて $[0, T]$ とみなしてこれ以降の議論を行う.

4.3. 収束定理の証明の概略

以上の準備のもとで収束定理を示す. まず, 定理の仮定から初期ラグランジュ部分多様体 L_s は次を満たすとしてよい: L_s はスケール r で κ_0-非崩壊かつ

$$(*_0) \quad \mathrm{Vol}_f(L_s) \leq V_0, \quad |B_s|(0) \leq \Lambda_0, \quad |K_s|(0) \leq \epsilon_0.$$

ただし, $\epsilon_0 > 0$ は後で決まる. 補題4.8からわかるように, 十分短い時間であれば変形平均曲率流に沿って, これらの値が初期値から大きく変化することはない. したがって, 十分短い時刻 T において, $L_{s,t}$ はスケール r で κ_0-非崩壊かつ

$$(*) \quad |B_{s,t}| \leq 6\Lambda_0, \quad |K_{s,t}| \leq 2\epsilon_0^{\frac{1}{n+2}}, \quad \forall t \in [0, T]$$

と思ってよい. 特に条件 $(*)$ の成立する最大の時刻を T_* としておく. $T_* = +\infty$ であることを示せば, 時間大域解の存在が言える. そこで $T_* < +\infty$ と仮定して矛盾を導くことにする.

主張 4.9. 初期条件 $(*_0)$ と, 条件 $(*)$ のもとで $L_{s,t}$ はスケール r で κ_0-非崩壊かつ

$$(**) \quad |B_{s,t}| \leq 3\Lambda_0, \quad |K_{s,t}| \leq \epsilon_0^{\frac{1}{n+2}}, \quad \forall t \in [0, T_*)$$

を満たす.

この主張4.9と補題4.8により，ある$T_+ > 0$が存在して，再び

$$(*) \quad |B_{s,t}| \leq 6\Lambda_0, \quad |K_{s,t}| \leq 2\epsilon_0^{\frac{1}{n+2}}, \quad \forall t \in [0, T_* + T_+]$$

となる．ところがこれはT_*の最大性に反する．よって$T_* = +\infty$でなくてはならない．これで時間大域解の存在が言えた．

さて，ここで主張4.9の証明の概略を述べる．補題4.3により，$\epsilon_0 = \epsilon_0(X, \Lambda_0, L_0, M) > 0$が存在して不等式(14)が成り立つ．ここで(14)に対してGronwallの不等式を適用すると

$$\int_{L_{s,t}} |K|^2 d\mu_f \leq e^{-2(\delta_0 - \Lambda_0\epsilon_0)t} \int_{L_s} |K|^2 d\mu_f$$

を得る．よって，$\epsilon_0 > 0$を十分小さく選んでおけば，

$$\int_{L_{s,t}} |K|^2 d\mu_f \leq e^{-\delta_0 t} \int_{L_s} |K|^2 d\mu_f \leq c(n, f_0) V_0 \epsilon_0^2 e^{-\delta_0 t}, \quad t \in [0, T_*)$$

が成り立つ．

ここで，補題4.8により，ある時刻$0 < \tau < T_*$が存在して

$$|K_{s,t}| \leq 2\epsilon_0 \leq \epsilon_0^{\frac{1}{n+2}}, \quad t \in [0, \tau] \tag{22}$$

が$\epsilon_0 \leq \frac{1}{2}$に対して成り立つ．一方，条件$(*)$により，$[0, T_*)$で$|B_{s,t}| \leq 6\Lambda_0$であるから，補題4.5により

$$|\nabla B_{s,t}| \leq c(n, \Lambda, \overline{R}_2, f_4), \quad t \in [\tau, T_*).$$

を得る．したがって特に$|\nabla K_{s,t}| \leq c, \ t \in [\tau, T_*)$である．このことと，$L_{s,t}$がスケール$r$で$\kappa_0$-非崩壊であることを合わせると，補題4.7により

$$|K_{s,t}| \leq c(n, \kappa_0, r, \Lambda_0, \overline{R}_2, f_4, V_0) \epsilon_0^{\frac{2}{n+2}} e^{-\frac{\delta_0}{2(n+2)}t}, \quad t \in [\tau, T_*)$$

が導かれる．さらに$\epsilon_0 > 0$を十分小さく

$$c\epsilon_0^{\frac{1}{n+2}} \leq 1,$$

となるようにしておけば，

$$|K_{s,t}| \leq \epsilon_0^{\frac{1}{n+2}} e^{-\frac{\delta_0}{2(n+2)}t} \leq \epsilon_0^{\frac{1}{n+2}}, \quad t \in [\tau, T_*) \tag{23}$$

となる．最後に(22)と(23)を合わせれば，C^0評価$|K|(t) \leq \epsilon_0^{\frac{1}{n+2}}, t \in [0, T_*)$が得られる．

$|B|$に関する評価についても同様の手法を使うが，詳しくは[15]で述べたのでここでは省略する．

これで主張4.9が示されて，時間大域解の存在が言えた．収束に関しては，(23)からすぐに従う．以上で，変形平均曲率流の収束定理が示された．

参考文献

[1] M. Abreu, *Kähler metrics on toric orbifolds*, J. Differential Geometry **58** (2001), 151–187.

[2] M. Abreu and L. Macarini, *Remarks on Lagrangian intersections in toric manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 365 (2013), no. 7, 3851–3875.

[3] T. Behrndt, *Generalized Lagrangian mean curvature flow in Kähler manifolds that are almost Einstein*, Complex and Differential Geometry, Springer Proceedings in Mathematics **8** (2011), Springer-Verlag, Heidelberg, New York, 65–80.

[4] J. Chen and W.Y. He, *A note on singular time of mean curvature flow*, Math. Zeit., **266** (2010), no. 4, 921–931.

[5] B.-Y. Chen, P.-F. Leung and T. Nagano, *Totally geodesic submanifolds of symmetric spaces, III*, unpublished (1980), arXiv:1307.7325v2 (2013).

[6] X. Cheng and D. Zhou, *Eigenvalues of the drifted Laplacian on complete metric measure spaces*, Commun. Contemp. Math. 19 (2017), no. 1, 1650001, 17 pp.

[7] C. B. Croke, *Some isoperimetric inequalities and eigenvalue estimates*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **13** (1980), no. 4, 419–435.

[8] A. Futaki, *Kähler-Einstein metrics and integral invariant*, Lecture Notes in Mathematics 1314.

[9] X. Han and J. Sun, *ε_0-regularity for mean curvature flow from surface to flat Riemannian manifolds*, Acta Math. Sin. **28** (2012), no. 7, 1475–1490.

[10] R. Harvey and H.B. Lawson Jr., *Calibrated geometries.* Acta Math. 148 (1982), 47–157.

[11] D. Joyce, *Riemannian holonomy groups and calibrated geometry*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 12. Oxford University Press, Oxford, 2007.

[12] D. Joyce, *Conjectures on Bridgeland stability for Fukaya categories of Calabi-Yau manifolds, special Lagrangians, and Lagrangian mean curvature flow.* EMS Surv. Math. Sci. 2 (2015), no. 1, 1–62.

[13] D. Joyce, Y.-I. Lee, M.-P. Tsui, *Self-similar solutions and translating solitons for Lagrangian mean curvature flow.* J. Differential Geom. 84 (2010), no. 1, 127–161.

[14] T. Kajigaya, *Reductions of minimal Lagrangian submanifolds with symmetries*, arXiv:1710.05535, to appear in Math. Z.

[15] T. Kajigaya and K. Kunikawa, *Hamiltonian stability for weighted measure and generalized Lagrangian mean curvature flow*, arXiv:1710.05537.

[16] Lê Hông Vân, *Minimal Φ-Lagrangian surfaces in almost Hermitian manifolds.* (Russian) Mat. Sb. 180 (1989), no. 7, 924–936, 991; translation in Math. USSR-Sb. 67 (1990), no. 2, 379–391.

[17] H. Li, *Convergence of Lagrangian mean curvature flow in Kähler-Einstein manifolds*, Math. Zeit. **271** (2012), no. 1, 313–342.

[18] J. Li and L. Yang, *Generalized symplectic mean curvature flows in almost Einstein surfaces*, Chin. Ann. Math. Series B **35** (2014), 33–50.

[19] J.D. Lotay and T. Pacini, *From Lagrangian to totally real geometry: coupled flows and calibrations*, arXiv:1404.4227v2 (2016).

[20] H.B. Lawson Jr. and J. Simons, *On stable currents and their application to global problems in real and complex geometry.* Ann. of Math. (2) **98** (1973), 427–450.

[21] H. Ma and Y. Ohnita, *Hamiltonian stability of the Gauss images of homogeneous isoparametric hypersurfaces. I.* J. Differential Geom. **97** (2014), no. 2, 275–348.

[22] A. Neves, *Recent progress on singularities of Lagrangian Mean Curvature Flow*, Surveys

in geometric analysis and relativity, Adv. Lect. Math. 20 (2013), Int. Press, Somerville, MA, 413–418.

[23] Y.-G. Oh, *Second variation and stabilities of minimal lagrangian submanifolds in Kähler manifolds*, Invent. Math. **101** (1990), 501–519.

[24] Y.-G. Oh, *Volume minimization of Lagrangian submanifolds under Hamiltonian deformations*, Math. Zeit. **212** (1993), 175–192.

[25] Y.-G. Oh, *Mean curvature vector and symplectic topology of Lagrangian submanifolds in Einstein-Kähler manifolds*, Math. Zeit. **216** (1994), 471–482.

[26] Y.-G. Oh, *Symplectic Topology and Floer Homology*, Vol. 2. Floer homology and its applications. New Mathematical Monographs, 29. Cambridge University Press, Cambridge, 2015. xxiii+446 pp.

[27] Y. Ohnita, ラグランジュ部分多様体と等径超曲面の幾何学 (解説と展望), 数理解析研究所講究録 1775, pp1-24.

[28] K. Smoczyk, *A canonical way to deform a Lagrangian submanifold*, arXiv:dg-ga/9605005v2 (1996).

[29] K. Smoczyk, *Harnack inequality for the Lagrangian mean curvature flow*, Calc. Var. Partial Differential Equations **8** (1999), 247–258.

[30] K. Smoczyk and M.-T. Wang, *Generalized Lagrangian mean curvature flows in symplectic manifolds*, Asian J. Math. **15** (2011), no. 1, 129–140.

[31] K. Smoczyk, M.-P. Tsui and M.-T. Wang, *Generalized Lagrangian mean curvature flows: The cotangent bundle case*, to appear in J. Reine. Angew. Math.

[32] J. Sun and L. Yang, *Generalized Lagrangian mean curvature flows in almost Calabi-Yau manifolds*, J. Geom. Phys. **117** (2017), 68–83.

[33] R.P. Thomas ans S.T. Yau, *Special Lagrangians, stable bundles and mean curvature flow*, Comm. Anal. Geom. **10** (2002), no. 5, 1075–1113.

[34] G. Tian and X. Zhu, *Uniqueness of Kähler-Ricci solitons.* Acta Math. **184** (2000), no. 2, 271–305.

[35] X.-J. Wang and X.Zhu, *Kähler-Ricci soliton on toric manifolds with positive first Chern class*, Adv. Math. **188** (2004), no. 1, 87–103.