数理解析研究所講究録
第2069巻 2018年 1-10

共有線形相補制約を持つ一般化ナッシュ均衡問題の解法
A solving method to generalized Nash equilibrium problem with shared complementarity constraints

名古屋大学大学院　工学研究科　浅野　朗*，田地　宏一†
Hogara Asano, Kouichi Taji
Nagoya University, Graduate School of Engineering

1　はじめに

ゲーム理論は複数の主体が自らの利益を最大化したり，コストを最小化するように意思決定を行い，その意思決定が他の主体の利益あるいはコストに影響を与えるような問題とそのモデルである．モデルの主体をプレイヤーと呼ぶ．プレイヤーが互いに手を取り合うことなく自らの利益のみを考えるような問題を非協力ゲームと呼ぶ．非協力ゲームではいくつかの解が考えられるが，その中でも全てのプレイヤーが自らの戦略を変更することで得をしない，すなわち戦略を変更するインセンティブを持たない状態をナッシュ均衡と呼び，ナッシュ均衡を求める問題をナッシュ均衡問題と呼ぶ．[1]

ナッシュ均衡問題の中でも，マルチリーダーフォロワーゲーム (multi leader-follower game, multi L/F ゲーム) は 2 つ以上の大企業が存在する寡占市場のモデルとしてよく用いられる．このゲームではプレイヤーを 2 つのグループに分類する．ひとつは十分な競争力を以って業界を牽引していく大企業のグループ（リーダー），もうひとつはその他の小さい企業のグループ（フォロワー）である．フォロワーはリーダーの行動を観察し，自らの利益を最大にするような戦略を選択する．一方リーダーは，フォロワーがどのような行動をとるか予測して戦略を選択する．このようなモデルの問題の例として，電力市場モデルが挙げられる [6]．この例では大きな発電会社をリーダー，小さな発電会社をフォロワーとしている．大きな会社は電力市場において大きな影響があり，業界を牽引することができ，業界内で最初に行動をとる．小さな会社は大きな会社の行動を観察し，自らの効用を最適化するように行動する．

一般化ナッシュ均衡問題は，プレイヤーのとることのできる戦略の集合が，他のプレイヤーの戦略に依存する問題を指す．multi L/F ゲームでは，リーダーはフォロワーの行動を予測した戦略をとるが，フォロワーはすべてのリーダーの行動に依存して戦略を決定するので，リーダー同士ではフォロワーを介して互いに相手の戦略が自分の戦略集合に干渉することになる．全てのリーダーにとってフォロワーは同一なので，リーダーは全員共有の（フォロワーの応答に沿った）制約を持つことになる．つまり，multi L/F ゲームは共有制約付きの一般化ナッシュ均衡問題に帰着する．とくにその共有制約が相補制約であるとき，均衡制約付き均衡問題 (EPEC) となる．

*E-mail: h_asano@nuem.nagoya-u.ac.jp
†E-mail: taji@nagoya-u.jp

EPEC に関する研究は Hu らの論文 [1] や露口らの論文 [4] などがある．いずれもフォロワーの応答を平滑化関数を用いて近似する平滑化法を利用した解法を提案している．Hu らの論文では相補制約がすべて線形の場合を考えており，本論文でも同様の問題を扱う．

本論文では，目的関数が凸二次関数，制約条件が線形制約と共有線形相補制約からなる EPEC に対する 2 つの解法を提案し，数値実験により比較を行う．1 つ目は相補条件を分割（場合分け）して，しらみつぶし的に解く方法，2 つ目は相補条件の切り替えによるヒューリスティックである．しらみつぶし法については，MPEC についての Luo らの記述 [2] を参考にした．

この論文では以下の表現を用いる．n 次元実ベクトル空間を $\mathbb{R}^n$ と表す．ベクトル $x^1,\dots,x^n$ を並べた列ベクトル $((x^1)^T,\dots,(x^n)^T)^T$ を単に $(x^1,\dots,x^n)$ と表記する．ここで，上付きの T は転置を表す．

2 multi L/F ゲームと EPEC

この節ではまず multi L/F ゲームについて考え，次に EPEC について説明する．

multi L/F ゲームには N 人のリーダーを M 人のフォロワーがおり，添字番号をそれぞれ $\nu = 1,...,N$, $\omega = 1,\dots,M$ とする．それぞれ自身のコスト関数を最小にするために最適な戦略を選択する．リーダー ν とフォロワー ω の戦略ベクトルをそれぞれ $x^\nu \in \mathbb{R}^{n_\nu}$，$y^\omega \in \mathbb{R}^{m_\omega}$ と表す．全てのリーダーの戦略ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ とフォロワーの戦略ベクトル $y \in \mathbb{R}^m$ は次の式で定義される．

$$x := (x^1,...,x^N)$$

$$y := (y^1,...,y^M)$$

ここで，$n = \sum_{\nu=1}^N n^\nu$，$m = \sum_{\omega=1}^M m^\omega$．また，リーダー ν 以外のリーダーの戦略ベクトル $x^{-\nu} \in \mathbb{R}^{n-n_\nu}$，フォロワー ω 以外のフォロワーの戦略ベクトル $y^{-\omega} \in \mathbb{R}^{m-m_\omega}$ を以下の式で定義する．

$$x^{-\nu} := (x^1,...,x^{\nu-1},x^{\nu-1},...,x^N)$$

$$y^{-\omega} := (y^1,...,y^{\omega-1},y^{\omega-1},...,y^N)$$

リーダーとフォロワーはそれぞれ式 (1)，(2) の最小化問題を解き，自らのコスト関数を最小化するように戦略を決定する．

$$\begin{array}{ll} \underset{x_\nu}{\text{minimize}} & f_L^\nu(x,y) = f_L^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\ \text{subject to} & x^\nu \in X^\nu \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ll} \underset{y_\omega}{\text{minimize}} & f_F^\omega(y,x) = f_F^\omega(y^\omega, y^{-\omega}, x) \\ \text{subject to} & y^\omega \in Y^\omega \end{array} \tag{2}$$

フォロワー ω の問題の式 (2) において，フォロワーはリーダーの行動を観察して自らの戦略を決定するので，x はフォロワーの問題のパラメータである．フォロワーの戦略は，フォロワー同士のナッシュ均衡に落ち着くと仮定する．ナッシュ均衡とは次の式を満たす戦略 y^* である．

$$f_F^\omega(y^{\omega,*}, y^{-\omega,*}, x) \le f_F^\omega(y^\omega, y^{-\omega,*}, x), \quad {}^\forall\, y^\omega \in Y^\omega \quad {}^\forall\, \omega = 1,\dots,M \tag{3}$$

ここで，$f_F^\omega(\cdot, y^{-\omega,*}, x)$ が連続微分可能な凸関数，Y^ω が凸集合であると仮定すると，ナッシュ均衡 y^* は次の変分不等式の解となる．

$$F(y^*, x)^T(y - y^*) \geq 0 \quad {}^\forall y \in Y \tag{4}$$

ここで，$F(y,x) = (\nabla_{y^1} f_F^1(y,x), \ldots, \nabla_{y^M} f_F^M(y,x))$, Y は各フォロワーの制約 Y^ω の直積集合 $Y = \prod_{\omega=1}^M Y^\omega$ である．式 (4) の解 y^* の集合を $S(x)$ で表し，リーダーはフォロワーの戦略 y が $S(x)$ の中にあると予測して戦略を決定する．したがって，リーダー ν の問題は次のように書き表せる．

$$\begin{aligned} \underset{x_\nu}{\text{minimize}} \quad & f_L^\nu(x^\nu, x^{-\nu}, y) \\ \text{subject to} \quad & x^\nu \in X^\nu \\ & y \in S(x) \end{aligned} \tag{5}$$

この変分不等式による制約 $y \in S(x)$ を均衡制約 (equilibrium constraints) と呼び，均衡制約を持つナッシュ均衡問題を均衡制約付き均衡問題 (EPEC) と呼ぶ．

ここで，リーダーが式 (5) の問題を持つナッシュ均衡問題の均衡点は，すべての ν について次の式を満たす点 $(x^*, y^*) \in \prod_{\nu=1}^N X^\nu \times S(x^*)$ として定義される．

$$f_L^\nu(x^{\nu*}, x^{-\nu*}, y^*) \leq f_L^\nu(x^\nu, x^{-\nu*}, y^*) \quad {}^\forall x^\nu \in X^\nu, {}^\forall y \in S(x^\nu, x^{-\nu*}) \tag{6}$$

言い換えると，全てのリーダーは均衡点において自らの戦略を変更したとき，自らの目的関数を減少させせることはできない．EPEC の均衡点を求める方法については次節以降で説明する．

3　共有線形相補制約を持つ EPEC とその部分問題

以降の節では各リーダーの問題が次の式で表される EPEC の解法について議論する．

$$\begin{aligned} \underset{x^\nu, y}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}(x^\nu)^T H_\nu x^\nu + (x^\nu)^T G_\nu x^{-\nu} + (c^\nu)^T y \\ \text{subject to} \quad & A_\nu x^\nu \leq b^\nu \\ & 0 \leq y \perp My + \sum_{\nu=1}^N N_\nu x^\nu + q \geq 0 \end{aligned} \tag{7}$$

ここで，$H_\nu \in \mathbb{R}^{n^\nu \times n^\nu}$，$M \in \mathbb{R}^{m \times m}$ は正定対称行列，$G_\nu \in \mathbb{R}^{n^\nu \times (n-n^\nu)}$，$c^\nu \in \mathbb{R}^m$，$A_\nu \in \mathbb{R}^{l^\nu \times n^\nu}$，$b^\nu \in \mathbb{R}^{l^\nu}$，$N_\nu \in \mathbb{R}^{m \times n^\nu}$，$q \in \mathbb{R}^m$．$l^\nu \in \mathbb{N}$ はリーダー ν の個別の制約の数である．式 (7) の問題の目的関数は凸二次である．また，式 (7) の一番下の制約は直交する二つの関数が線形なので線形相補制約と呼ばれる．とくに，すべてのリーダー $\nu = 1, \ldots, N$ がこの制約を共有しているので，この制約は共有線形相補制約である．簡単のため相補制約ではない共有制約はない問題を考える．

式 (7) のナッシュ均衡点 $z^* = (x^*, y^*) \in \mathbb{R}^{n+m}$ に対して次のような添字集合を考える．

$$\begin{aligned} \alpha &:= \alpha(z^*) := \{i \mid y_i^* = 0, (My^* + \sum_{\nu=1}^N N_\nu x^{\nu*} + q)_i > 0\} \\ \beta &:= \beta(z^*) := \{i \mid y_i^* = 0, (My^* + \sum_{\nu=1}^N N_\nu \nu x^{\nu*} + q)_i = 0\} \\ \gamma &:= \gamma(z^*) := \{i \mid y_i^* > 0, (My^* + \sum_{\nu=1}^N N_\nu \nu x^{\nu*} + q)_i = 0\} \end{aligned} \tag{8}$$

以下では，$y_i, {}^\forall i \in \alpha$ を並べたベクトルを y_α と表記する．y_β，y_γ についても同様である．

β の分割 $(\beta_1, \beta_2) = \beta$，$\beta_1 \cap \beta_2 = \emptyset$ に対して，リーダー ν に対する式 (7) の実行可能領域を制限した以下の問題を持つ均衡問題を考える．

$$\begin{array}{ll} \underset{x^\nu, y}{\text{minimize}} & \frac{1}{2}(x^\nu)^T H_\nu x^\nu + (x^\nu)^T G_\nu x^{-\nu} + (c^\nu)^T y \\ \text{subject to} & A_\nu x^\nu \le b^\nu \\ & y_{\alpha\cup\beta_1} = 0, (My + \sum_{\nu=1}^{N} N_\nu x^\nu + q)_{\alpha\cup\beta_1} \ge 0 \\ & y_{\gamma\cup\beta_2} \ge 0, (My + \sum_{\nu=1}^{N} N_\nu x^\nu + q)_{\gamma\cup\beta_2} = 0 \end{array} \tag{9}$$

この問題を EPEC 部分問題と呼ぶ．EPEC 部分問題 (9) は EPEC(7) の実行可能領域を制限した問題なので，z^* を EPEC(7) の均衡解とすると，添字集合 $\alpha(z^*), \beta(z^*), \gamma(z^*)$ に対して EPEC 部分問題 (9) の均衡解となる．これより以下の定理を得る．

定理 3.1 z^* を *EPEC(7)* の均衡解とする．このとき，式 *(8)* で定義される添字集合 $\alpha(z^*), \beta(z^*), \gamma(z^*)$ が存在し，すべての β の分割 β_1, β_2 に対して z^* は *EPEC* 部分問題 *(9)* の均衡解である．

以上の EPEC 部分問題に対する考察により，以下の二つの EPEC の解法が考えられる．

1. しらみつぶし法

EPEC の共有線形相補制約に対して，その添字集合 $\{1, \ldots, m\}$ の分割 $P = \alpha \cup \beta_1$ と $Q = \gamma \cup \beta_2$ を考える．分割 P, Q は 2^m 通り存在し，そのすべてについて EPEC 部分問題 (9) を解く．元の EPEC に均衡解が存在すれば，その中にある．

2. 接錐を用いたヒューリスティックな方法

次の節で詳しく説明する．

4 接錐を用いたヒューリスティック

この節では，問題 (7) の接錐を考えることでヒューリスティックに EPEC の均衡解を求める方法を提案する．

今，添字集合 $\{1, \ldots, m\}$ のあるひとつの分割 $P \cup Q = \{1, \ldots, m\}$, $P \cap Q = \emptyset$ を考える．そして，$P = \alpha \cup \beta_1, Q = \gamma \cup \beta_2$ として EPEC 部分問題 (9) を解く．この EPEC 部分問題の均衡点を $z^* = (x^*, y^*)$ とする．この z^* に対して式 (8) と同様に $\alpha(z^*), \beta(z^*), \gamma(z^*)$ を定義する．このとき当然 $\alpha(z^*) \subset P$, $\gamma(z^*) \subset Q$ である．

また，接錐 (tangent cone) を次の式で定義する．

$$\mathcal{T}(z^*) := \{d \in \mathbb{R}^{n+m} \mid \exists\{z^k\} \in \mathcal{Z}, \exists t_k \searrow 0 : z^k \to z^*, \frac{z^k - z^*}{t_k} \to d\} \tag{10}$$

ここで，$\mathcal{Z}$ は問題 (7) の実行可能領域を表す．このとき，EPEC 部分問題 (9) の実行可能点 z^* における接錐は次のようになる．

$$\mathcal{T}(z^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; \begin{array}{rll} \begin{bmatrix} A^T & 0 \end{bmatrix}_i d & \leq 0, & {}^\forall i \in \mathcal{I}(z^*) \\ \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}_i d & = 0, & {}^\forall i \in P \\ \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_N & M \end{bmatrix}_i d & \geq 0, & {}^\forall i \in \mathcal{I}_P(z^*) \\ \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_N & M \end{bmatrix}_i d & = 0, & {}^\forall i \in Q \\ \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}_i d & \geq 0, & {}^\forall i \in \mathcal{I}_Q(z^*) \end{array} \right\} \tag{11}$$

ここで，$I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}$ は単位行列．また，

$$A = \begin{bmatrix} A_1^T & \cdots & A_N^T \end{bmatrix}^T$$
$$\mathcal{I}(z^*) = \{i \mid (Ax)_i - b_i = 0\}$$
$$b = \begin{bmatrix} (b^1)^T & \cdots & (b^N)^T \end{bmatrix}^T$$
$$\mathcal{I}_P(z^*) = \{i \in P \mid (My + \sum_{\nu=1}^{N} N_\nu x^\nu + q)_i = 0\}$$
$$\mathcal{I}_Q(z^*) = \{i \in Q \mid y_i = 0\}$$

である．また，元の EPEC の問題 (7) の点 z^* における接錐 [3] は，

$$\mathcal{T}^{EPEC}(z^*) = \left\{ d \in \mathbb{R}^{n+m} \;\middle|\; \begin{array}{rll} \begin{bmatrix} A^T & 0 \end{bmatrix}_i d & \leq 0, & {}^\forall i \in \mathcal{I}(z^*) \\ \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}_i d & = 0, & {}^\forall i \in \alpha(z^*) \\ \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_N & M \end{bmatrix}_i d & = 0, & {}^\forall i \in \gamma(z^*) \\ \begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_N & M \end{bmatrix}_i d & \geq 0, & {}^\forall i \in \beta(z^*) \\ \begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}_i d & \geq 0, & {}^\forall i \in \beta(z^*) \\ (\begin{bmatrix} N_1 & \cdots & N_N & M \end{bmatrix}_i d) \cdot (\begin{bmatrix} 0 & I_m \end{bmatrix}_i d) & = 0, & {}^\forall i \in \beta(z^*) \end{array} \right\} \tag{12}$$

である．$\alpha(z^*), \beta(z^*), \gamma(z^*)$ と $P, Q, \mathcal{I}_P(z^*), \mathcal{I}_Q(z^*)$ の間には次のような関係がある．

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_P(z^*) \cup \mathcal{I}_Q(z^*) &= \beta(z^*) \\ P \setminus \mathcal{I}_P(z^*) &= \alpha(z^*) \\ Q \setminus \mathcal{I}_Q(z^*) &= \gamma(z^*) \end{aligned} \tag{13}$$

よって，$\beta(z^*) = \emptyset$ のときは，

$$\mathcal{T}^{EPEC}(z^*) = \mathcal{T}(z^*) \tag{14}$$

となる．これは，$\beta(z^*) = \emptyset$ ならば点 z^* における実行可能方向が EPEC の問題 (7) と EPEC 部分問題 (9) で一致していることを示している．これより，以下の定理を得る．

定理 4.1 *z^* が EPEC 部分問題 (9) の均衡解，かつ $\beta(z^*) = \emptyset$ であれば，z^* は EPEC(7) の均衡点となる．*

また，$\beta(z^*) \neq \emptyset$ の場合，

$$\mathcal{T}^{EPEC}(z^*) = \cup_{(\beta_1, \beta 2) = \beta(z^*)} \mathcal{T}(z^*) \tag{15}$$

となることが確かめられる．したがって以下の定理が得られる．

定理 4.2 ある点 z^* が $\beta(z^*) \neq \emptyset$ であるとき，すべての β の分割 (β_1, β_2) に対して z^* が *EPEC* 部分問題 *(9)* の均衡解であれば，z^* は *EPEC(7)* の均衡解となる．

以上のことから，次のような EPEC の均衡解を求めるためのアルゴリズムを提案する．

Step 1: 任意の $\{1, \ldots, m\}$ の分割 P, Q を設定し，部分問題の均衡点を求める．この点を z^0 とし，$\beta_0 = \beta(z^0)$ とする．$k \leftarrow 0$.

Step 2: $\beta_k = \emptyset$ であれば，z^k を解として終了．そうでなければ Step 3 へ

Step 3: β_k に含まれる任意の添字の部分集合について，その集合に含まれる添字を P から Q，あるいは Q から P に移動させてその部分問題を解き，その均衡解を $z^{k'}$ とおく．$z^{k'} \neq z^k$ であれば，$z^{k+1} \leftarrow z'_k$，$\beta_{k+1} = \beta(z^{k+1})$，$k \leftarrow k+1$ として Step 2 にもどる．そうでなければ Step 4 へ.

Step 4: Step 3 で β_k のすべての分割に対応した EPEC 部分問題を解いたのであれば z^k を解として終了．そうでなければ Step 3 にもどる.

5 数値実験

前節で紹介したアルゴリズムを用いて以下のようなプレイヤーが 2 人の共有相補制約つき均衡問題に対して数値実験を行った. 問題は Hu ら [1] の論文を参考にして作成した.

プレイヤー I に対して:

$$
\begin{aligned}
\underset{x^I, y}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}(x^I)^T H_I x^I + (x^I)^T G_I x^{II} + (c^I)^T y \\
\text{subject to} \quad & A_I x^I \leq b^I, \\
& 0 \leq y \perp My + N_I x^I + N_{II} x^{II} + q \geq 0,
\end{aligned}
$$

プレイヤー II に対して:

$$
\begin{aligned}
\underset{x^{II}, y}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}(x^{II})^T H_{II} x^{II} + (x^{II})^T G_{II} x^I + (c^{II})^T y \\
\text{subject to} \quad & A_{II} x^{II} \leq b^{II}, \\
& 0 \leq y \perp My + N_I x^I + N_{II} x^{II} + q \geq 0,
\end{aligned}
$$

ここで，M と H_I, H_{II} は正定値行列と仮定する．この EPEC に対して相補制約の添字の分割 P, Q を決めて EPEC 部分問題 (9) をつくり，それぞれの KKT 条件を連立させると，次の混合相

補性問題となる.

$$
\begin{aligned}
H_I x^I + G_I x^{II} + A_I^T \lambda^I + (N_I)_P^T \sigma_1^I + (N_I)_Q^T \mu_1^I &= 0 \\
c^I + M_P^T \sigma_1^I + (I_m)_Q^T \sigma_2^I + M_Q^T \mu_1^I + (I_m)_P^T \mu_2^I &= 0 \\
H_{II} x^{II} + G_{II} x^I A_{II}^T \lambda^{II} + (N_{II})_P^T \sigma_1^{II} + (N_{II})_Q^T \mu_1^{II} &= 0 \\
c^{II} + M_P^T \sigma_1^{II} + (I_m)_Q^T \sigma_2^{II} + M_Q^T \mu_1^{II} + (I_m)_P^T \mu_2^{II} &= 0 \\
0 \le b^I - A_I x^I \perp \lambda^I &\ge 0 \\
0 \le b^{II} - A_{II} I x^{II} \perp \lambda^{II} &\ge 0 \\
0 \le (My + N_I x^I + N_{II} x^{II} + q)_P \perp \sigma_1^I &\ge 0 \\
0 \le (My + N_I x^I + N_{II} x^{II} + q)_P \perp \sigma_1^{II} &\ge 0 \\
0 \le y_Q \perp \sigma_2^I &\ge 0 \\
0 \le y_Q \perp \sigma_2^{II} &\ge 0 \\
y_P &= 0 \\
(My + N_I x^I + N_{II} x^{II} + q)_Q &= 0
\end{aligned}
$$

ここで，$\lambda^I, \sigma_1^I, \sigma_2^I, \mu_1^I, \mu_2^I, \lambda^{II}, \sigma_1^{II}, \sigma_2^{II}, \mu_1^{II}, \mu_2^{II}$ はラグランジュ乗数．この混合相補性問題の求解には一般化ニュートン法 [7] を利用した．

5.1 数値実験 1

以下の数値例 ([1] の Example6.3) に対して，しらみつぶし法と接錐を用いたヒューリスティックのそれぞれについて計算実験を行った．結果はそれぞれ Table 1, 2 と Table 3 に示す．ここで，$w = My + N_I x^I + N_{II} x^{II} + q$ を表し，$0 \le y \perp w \ge 0$ である．共有相補制約の次元が 3 なので，しらみつぶし法では 8 通りの問題を解く必要がある．一方，ヒューリスティックではしらみつぶし法での解 8,6,4,1 の順に 4 回の探索で均衡解にたどりついていることがわかる．いずれの計算結果についても，$P = \emptyset$ の EPEC 部分問題の均衡解が EPEC の均衡解になることがわかる．

$$
H_I = \begin{pmatrix} 10.0 & 3.6 & 2.7 \\ 3.6 & 12.0 & -1.9 \\ 2.7 & -1.9 & 15.0 \end{pmatrix}, H_{II} = \begin{pmatrix} 12.0 & -1.2 & 3.1 \\ -1.2 & 10.0 & 2.5 \\ 3.1 & 2.5 & 8.0 \end{pmatrix},
$$

$$
G_I = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.0 & -1.6 \\ 1.3 & -2.1 & 0.0 \\ -1.2 & 1.5 & 0.3 \end{pmatrix}, G_{II} = \begin{pmatrix} 1.2 & 0.0 & -1.5 \\ 1.5 & 1.4 & 0.0 \\ -1.2 & 1.1 & -1.4 \end{pmatrix},
$$

$$
M = \begin{pmatrix} 5.6 & -1.2 & 1.5 \\ 3.2 & 7.2 & -2.4 \\ -1.8 & 2.5 & 6.4 \end{pmatrix}, N_I = \begin{pmatrix} -1.1 & 0.0 & -1.2 \\ 1.5 & -1.0 & -0.3 \\ -1.4 & 0.0 & 1.3 \end{pmatrix},
$$

$$
N_{II} = \begin{pmatrix} -1.3 & 0.9 & -0.6 \\ -1.4 & 1.2 & 0.0 \\ 1.5 & -0.7 & 1.4 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} -3.2 \\ -2.5 \\ -4.8 \end{pmatrix}, c^I = \begin{pmatrix} -3.6 \\ -2.7 \\ -4.8 \end{pmatrix},
$$

$$
c^{II} = \begin{pmatrix} -3.2 \\ -2.4 \\ -4.5 \end{pmatrix}, A_I = \begin{pmatrix} 1.6 & -1.3 & -1.2 \\ 1.2 & -1.7 & 1.3 \end{pmatrix}, A_{II} = \begin{pmatrix} 1.3 & -1.5 & -1.2 \\ 1.8 & 1.2 & -1.3 \end{pmatrix},
$$

$$b_I = \begin{pmatrix} -2.3 \\ -2.7 \end{pmatrix}, b_{II} = \begin{pmatrix} -1.4 \\ -1.6 \end{pmatrix},$$

Table 1: 計算結果 1-1-1（しらみつぶし法）

	P	x^I	x^{II}	y	w	β
1	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} -0.7105 \\ 0.9998 \\ -0.1137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.5515 \\ 0.0470 \\ 0.5106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3070 \\ 0.5487 \\ 0.5124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.9e-16 \end{pmatrix}$	$\emptyset$
2	$\{1\}$	$\begin{pmatrix} -0.9207 \\ 0.8014 \\ -0.1791 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.1132 \\ 0.2371 \\ -0.0917 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.6054 \\ 0.6554 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -7.1e-15 \\ -4.4e-16 \\ -8.9e-16 \end{pmatrix}$	$\{1\}$
3	$\{2\}$	$\begin{pmatrix} 0.4095 \\ 2.0567 \\ 0.2346 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.7175 \\ 0.1151 \\ 4.8757 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.7158 \\ 0 \\ 0.3418 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ -4.0e-15 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\{2\}$
4	$\{3\}$	$\begin{pmatrix} -1.5824 \\ 0.8973 \\ 0.5571 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0297 \\ -0.0254 \\ 1.1662 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6195 \\ 0.5478 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.2e-11 \end{pmatrix}$	$\{3\}$
5	$\{1,2\}$	$\begin{pmatrix} -0.2419 \\ 1.4419 \\ 0.0320 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.9991 \\ 2.3076 \\ 2.4699 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1.1056 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3.1798 \\ -1.8e-15 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\{2\}$
6	$\{2,3\}$	$\begin{pmatrix} 1.0408 \\ 2.6525 \\ 0.4309 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2707 \\ -1.7210 \\ 5.6711 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6096 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.9e-16 \\ -1.5e-14 \\ -1.2e-13 \end{pmatrix}$	$\{2,3\}$
7	$\{1,3\}$	$\begin{pmatrix} -2.6935 \\ 1.0047 \\ 0.0074 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.8635 \\ 0.3680 \\ 0.3749 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.8190 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.7e-13 \\ 8.9e-16 \\ -1.2e-13 \end{pmatrix}$	$\{1,3\}$
8	$\{1,2,3\}$	$\begin{pmatrix} -1.5660 \\ 0.3042 \\ 0.2336 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.2572 \\ 1.6025 \\ 5.2992 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.0e-13 \\ -2.4e-14 \\ -3.6e-14 \end{pmatrix}$	$\{1,2,3\}$

Table 2: 計算結果 1-1-2（Table 1 の目的関数）

P	目的関数 I	目的関数 II
$\emptyset$	1.5836	−1.0385
$\{1\}$	0.8515	4.5913
$\{2\}$	16.5282	91.9044
$\{3\}$	10.7435	4.5345
$\{1,2\}$	−4.4288	108.9691
$\{2,3\}$	50.5505	105.5727
$\{1,3\}$	32.8250	6.9238
$\{1,2,3\}$	26.6710	158.0595

Table 3: 計算結果 1-2-1(接錐を使ったヒューリスティック)

反復	P	x^I	x^{II}	y	w	β
1	$\{1,2,3\}$	$\begin{pmatrix} -1.5660 \\ 0.3042 \\ 0.2336 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2.2572 \\ 1.6025 \\ 5.2992 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.0e-13 \\ -2.4e-14 \\ -3.6e-14 \end{pmatrix}$	{1,2,3}
2	$\{2,3\}$	$\begin{pmatrix} 1.0408 \\ 2.6525 \\ 0.4309 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.2707 \\ -1.7210 \\ 5.6711 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1.6896 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -8.9e-16 \\ -1.5e-14 \\ -1.2e-13 \end{pmatrix}$	{2,3}
3	$\{3\}$	$\begin{pmatrix} -1.5824 \\ 0.8973 \\ 0.5571 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.0297 \\ -0.0254 \\ 1.1662 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.6195 \\ 0.5478 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2.2e-11 \end{pmatrix}$	{3}
4	$\emptyset$	$\begin{pmatrix} -0.7105 \\ 0.9998 \\ -0.1137 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.5515 \\ 0.0470 \\ 0.5106 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.3070 \\ 0.5487 \\ 0.5124 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -8.9e-16 \end{pmatrix}$	$\emptyset$

5.2 数値実験 2

$x^I, x^{II}, y \in \mathbb{R}^5$, 共有されてない不等式制約の式の数は 3 として，各行列をランダムに生成し，接錐を用いたヒューリスティックによる数値実験を行った．結果を Table 4 と 5 に示す．ここで，初期の部分問題が $P = \{1,2,3,4,5\}$ の場合は均衡解を求めることに成功しているが，$P = \emptyset$ とした場合は無限ループに陥ってしまい，均衡解を求めることができなかった．また，ここでは省略するが部分問題において一般化ニュートン法が収束せず KKT 条件を満たす点を求められない問題例も存在した．

Table 4: 計算結果 2-1（ランダム生成の問題：成功例）

反復	P	β	目的関数 I	目的関数 II
1	$\{1,2,3,4,5\}$	$\{3\}$	-0.4483	-0.1515
2	$\{1,2,4,5\}$	$\emptyset$	-6.0273	-4.6533

Table 5: 計算結果 2-2（ランダム生成の問題：失敗例）

反復	P	β	目的関数 I	目的関数 II
1	$\emptyset$	$\{1,3,5\}$	-203.3524	-67.6269
2	$\{5\}$	$\{1,2,3\}$	-32.3071	-27.6832
3	$\{3,5\}$	$\{1,2\}$	-8.6502	8.6278
4	$\{2,3,5\}$	$\{1,2\}$	-6.7514	-4.4219
5	$\{3,5\}$	$\{1,2\}$	-8.6502	8.6278
6	$\{2,3,5\}$	$\{1,2\}$	-6.7514	-4.4219

6 結論と今後の課題

本論文では EPEC の均衡点を求めるための二つの方法を提案した．数値実験 1 では EPEC の均衡解を求めることができているが，数値実験 2 ではランダムに生成した問題について，接錐を用

いたヒューリスティックが無限ループに陥る，EPEC 部分問題の KKT 条件を満たす点を求められないという問題が生じた．このような問題が発生しないための問題の仮定の追加，解法の修正が今後の課題となる．

参考文献

[1] M. Hu, M. Fukushima, “Smoothing approach to Nash equilibrium formulations for a class of equilibrium problems with shared complementarity constraints”, Computational Optimization and Applications vol.52, pp. 415-437, (2012).

[2] Z. Q. Luo, J. S. Pang, D. Ralph, ”Mathematical Programs with Equilibrium Constraints” Cambridge University Press, (1996)

[3] M. L. Flegel, C. Kanzow, “An Abadie-type constraint qualification for mathematical programs with equilibrium constraints”, Journal of optimization theory and applications, vol.124, No.3, pp. 595-614, (2005)

[4] 露口 大介，福田 エレン 秀美，胡 明，福島 雅夫　「平滑化法を用いたマルチリーダーフォロワーゲームの解法」数理解析研究所講究録 1981 巻, pp.149-157, (2016)

[5] A. von Heusinger, C. Kanzow, “Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido-Isoda-type functions” Computational Optimization and Applications, vol.43, No.3, pp.353-377, (2009).

[6] S. Leyffer, T. Munson, “Solving multi-leader-common-follower games” Optimization Methods & Software, vol.25, No.4, pp.601-623, (2010).

[7] F. Facchinei, J. S. Pang , “Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems volume I & II”, Springer Science & Business Media, (2003)