数理解析研究所講究録
第2071巻 2018年 94-115

正則平坦構造と一般大久保型方程式

青山学院大学・理工学部物理・数理学科　川上　拓志
Hiroshi Kawakami
Department of Physics and Mathematics,
College of Science and Engineering,
Aoyama Gakuin University

琉球大学・理学部数理科学科　眞野　智行[1]
Toshiyuki Mano
Department of Mathematical Sciences,
Faulty of Science,
University of the Ryukyus

1 概要

加藤-眞野-関口 [6] において, 正則半単純平坦構造と大久保型微分方程式のモノドロミ保存変形との間の関係が明らかにされた. その応用として well-generated な有限複素鏡映群の軌道空間上の平坦構造の構成や, 半単純条件をみたす 3 次元一般 WDVV 方程式と Painlevé VI 方程式の同値性などが与えられた. 一方, Arsie-Lorenzoni [2] において, 半単純でない正則 bi-flat F-manifolds と Painlevé V 方程式および IV 方程式との同値性が示された (bi-flat F-manifold は [6] の定式化において用いられた Sabbah による Saito structure (without a metric) とほぼ同値な概念である). [2] では, David-Hertling [3] による半単純とは限らない正則 F-manifold に対する標準座標の構成を利用して, 個別の議論により bi-flat F-manifold と PV, PIV との対応を与えている. そこで本稿では, 川上 [7, 8] において導入された一般大久保型方程式のモノドロミ保存変形と半単純とは限らない正則平坦構造との関係について考察する. 結果として, 正則性条件の下で一般大久保型方程式のモノドロミ保存変形と一般 WDVV 方程式の同値性が証明される. またその帰結として, Painlevé V,IV,III,II 方程式と一般 WDVV 方程式の関係が記述される (ただし Painlevé I については現状では本稿の枠組みでは取り扱うことができない. 5 節参照).

本稿での議論の進行について若干のコメントを与える. [6] においては自由因子の概念が重要な役割を果たした. 正則半単純な Saito structure (without a metric) に付随する大久保型方程式の特異点集合は自由因子となるからである. これは複素鏡映群の軌道空間上の平坦構造の構成においても本質的に用いられた. しかし半単純でない正則 Saito structure (without a metric) に付随する一般大久保型方程式の特異点集合の定義方程式は被約にならないので, この場合自由因子の概念

[1]本研究は JSPS 科研費 JP25800082 の助成を受けたものである.

は有効に機能しない. よって本稿では, 自由因子の概念を用いずに議論を行うことが必要になるのが [6] との最も大きな違いである.

なお紙数の都合により, 本稿で述べきれなかった部分や詳細については準備中の論文 [9] を参照.

記号. 一般に行列 A に対して A_{ij} は A の (i,j) 成分を表すとする. また $m_1 \times m_1$ 行列 A_1 と $m_2 \times m_2$ 行列 A_2 に対して $A_1 \oplus A_2$ は $(m_1+m_2) \times (m_1+m_2)$ 行列 $\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$ を表すこととする.

2 一般大久保型方程式とその多変数化

$N \in \mathbb{N}$ として T, B_∞ を $N \times N$ 行列とする. 次の形の線形微分方程式を考える:

$$(1) \qquad (zI_N - T)\frac{dY}{dz} = -B_\infty Y.$$

行列 T が対角化可能のとき (1) は大久保型と呼ばれる. T が必ずしも対角化可能ではないとき一般大久保型と呼ばれる (cf. [8]). 大久保型のとき (1) はフックス型方程式であり, 一般大久保型は不確定特異点を許す微分方程式となる.

本稿では (1) について以下を仮定する:

(A1) $B_\infty = \mathrm{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_N]$ かつ $\lambda_i - \lambda_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ for $i \neq j$.

(A2) $m_1 + \cdots + m_n = N$ をみたす $m_k \in \mathbb{N}$ $(k = 1, \ldots, n)$ に対して T の Jordan 標準形は

$$(2) \qquad T \sim J_1 \oplus \cdots \oplus J_n,$$

ただし J_k は $m_k \times m_k$ 行列で

$$J_k = \begin{pmatrix} z_{k,0} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & z_{k,0} \end{pmatrix}$$

という形とする. さらに $k \neq l$ のとき $z_{k,0} \neq z_{l,0}$ を仮定する (正則性 (regularity)).

さて, (1) の多変数化を考える. $x = (x_1, \ldots, x_N)$ を z とは独立な変数とし, (1) の Pfaff 系への拡張

$$(3) \qquad dY = -(zI_N - T)^{-1}\bigl(dz + \sum_{i=1}^{N} \tilde{B}^{(i)} dx_i\bigr) B_\infty Y$$

を考える, ただし $T, \tilde{B}^{(i)}$ は x の正則関数を成分とする $N\times N$ 行列で, T, B_∞ は上と同様に仮定(A1),(A2)を満たすとする. 特に, 仮定(2)より, $(z_{k,0},\dots,z_{k,m_k-1})_{k=1,\dots,n}$ を z と独立な変数として ((x) には依存する), ある可逆行列 P が存在して

$$P^{-1}TP = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n \tag{4}$$

と書ける, ただし

$$Z_k = \begin{pmatrix} z_{k,0} & z_{k,1} & \cdots & z_{k,m_k-1} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & z_{k,1} \\ & & & z_{k,0} \end{pmatrix}, \quad k = 1,\dots,n. \tag{5}$$

(一般には P, Z_k は x の多価関数を成分にもつ.) ここで $m_k \times m_k$ 行列 Λ_k を

$$\Lambda_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & O \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

によって導入すると

$$Z_k = \sum_{l=0}^{m_k-1} z_{k,l}\Lambda_k^l$$

と書けることに注意する.

Proposition 2.1. *Pfaff系(3)について, $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty$ が以下をみたすならば(3)は積分可能である:*

$$[T, \tilde{B}^{(i)}] = O, \quad [\tilde{B}^{(i)}, \tilde{B}^{(j)}] = O \quad (\forall i, j), \tag{6}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i} + \tilde{B}^{(i)} + [\tilde{B}^{(i)}, B_\infty] = O, \quad i = 1,\dots,n, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \tilde{B}^{(i)}}{\partial x_j} - \frac{\partial \tilde{B}^{(j)}}{\partial x_i} = O, \quad i, j = 1,\dots,n, \tag{8}$$

このとき特に

$$P^{-1}\tilde{B}^{(i)}P = -\frac{\partial Z_1}{\partial x_i} \oplus \cdots \oplus -\frac{\partial Z_n}{\partial x_i} \tag{9}$$

となる.

また B_∞ が可逆ならば, $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty$ が(6),(7),(8)を満たすことと *Pfaff*系(3)が積分可能であることは同値である.

Proof. (1) が大久保型のときは [6] によって証明されている. よって (1) が一般大久保型のときを考える. この場合には大久保型から一般大久保型への合流操作を構成して大久保型の場合に帰着させる.

$k=1,\ldots,n$ に対して $m_k\times m_k$ 行列 $P_k(\varepsilon)$ を次で定める:

$$P_k(\varepsilon):=\sum_{l=0}^{m_k-1}a_{k,l}\Lambda_k^l,$$

ただし $a_{k,l}$ は次の式で帰納的に定義されるものとする:

$$a_{k,0}=1,\qquad a_{k,l}=\frac{\sum_{j=0}^{l-1}a_{k,j}z_{k,l-j}}{l\varepsilon z_{k,1}},\quad l=1,\ldots,m_k-1.$$

さらに

$$Z_k(\varepsilon):=\mathrm{diag}[z_{k,0},z_{k,0}+z_{k,1}\varepsilon,z_{k,0}+2z_{k,1}\varepsilon,\ldots,z_{k,0}+(m_k-1)z_{k,1}\varepsilon]$$

とおくと

$$P_k(\varepsilon)Z_k(\varepsilon)=Z_k(\varepsilon)P_k(\varepsilon)+\sum_{l=1}^{m_k-1}z_{k,l}\Lambda_k^lP_k(\varepsilon)\tag{10}$$

が成り立つことが分かる. そこで

$$P(\varepsilon):=P\big(P_1(\varepsilon)\oplus\cdots\oplus P_n(\varepsilon)\big),\quad Z(\varepsilon):=Z_1(\varepsilon)\oplus\cdots\oplus Z_n(\varepsilon)$$

とおいて

$$T(\varepsilon):=P(\varepsilon)Z(\varepsilon)P(\varepsilon)^{-1}\tag{11}$$

とおく. このとき, $\varepsilon\to0$ とすると $T(\varepsilon)\to T$ となることが次のように分かる. 実際, (10) より

$$\big(P_1(\varepsilon)\oplus\cdots\oplus P_n(\varepsilon)\big)Z(\varepsilon)\big(P_1(\varepsilon)\oplus\cdots\oplus P_n(\varepsilon)\big)^{-1}=Z(\varepsilon)+\bigoplus_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{m_k-1}z_{k,l}\Lambda_k^l\tag{12}$$

なので $\varepsilon\to0$ とすると (12) $\to Z_1\oplus\cdots\oplus Z_n$ となることが分かる ($Z_k(\varepsilon)\to z_{k,0}I_{m_k}$ に注意). よって $\varepsilon\to0$ のとき $T(\varepsilon)\to T$.

一方, (11) より明らかに

$$P(\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon)P(\varepsilon)=Z(\varepsilon)$$

なので

$$\big(zI_N-T(\varepsilon)\big)\frac{dY}{dz}=-B_\infty Y$$

は大久保型である. よって [6] より, Pfaff 系

$$dY = -\big(zI_N - T(\varepsilon)\big)^{-1}\big(dz + \sum_{i=1}^{N} \tilde{B}^{(i)}(\varepsilon)dx_i\big)B_\infty Y \tag{13}$$

について, $T(\varepsilon), \tilde{B}^{(i)}(\varepsilon), B_\infty$ が (6),(7),(8) をみたすならば (13) は積分可能であり

$$\tilde{B}^{(i)}(\varepsilon) = -P(\varepsilon)\frac{\partial Z}{\partial x_i}(\varepsilon)P(\varepsilon)^{-1} \tag{14}$$

となる. (14) において $\varepsilon \to 0$ とすると

$$P^{-1}\tilde{B}^{(i)}P = -\frac{\partial Z_1}{\partial x_i} \oplus \cdots \oplus -\frac{\partial Z_n}{\partial x_i}$$

が分かる. □

Definition 2.1. Pfaff 系 (3) が積分可能条件をみたすとき, (3) を多変数一般大久保型方程式と呼ぶことにする.

Remark 2.1. $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty$ が (6),(7),(8) をみたすならば任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して $T, \tilde{B}^{(i)}, B_\infty - \lambda I_N$ も (6),(7),(8) をみたす.

Remark 2.2. 多変数一般大久保型方程式を与えることは, x を変形パラメータとして一般大久保型方程式 (1) のモノドロミ保存変形を与えることと等価である (cf. [5]).

多変数一般大久保型方程式 (3) において [6] と同様の議論により, $\tilde{B}^{(N)} = I_N$ と仮定しても一般性を失わないので以下では本稿を通して $\tilde{B}^{(N)} = I_N$ を仮定する.

3 Saito structure (without a metric)

Sabbah [13] によって導入された Saito structure (without a metric) について復習する.

Definition 3.1 (C. Sabbah [13]). X を N 次元複素多様体として, TX をその接束とする, また Θ_X は TX の正則切断からなる層とする. X 上の Saito structure (without a metric) とは, 次の 3 つの対象 (i),(ii),(iii) からなるデータで下の条件 (a),(b) を満たすものである:

(i) TX 上の torsion free な平坦接続 ∇,

(ii) TX 上の対称 Higgs 場 Φ,

(iii) X 上のベクトル場 e および E, (e は unit field, E は Euler field と呼ばれる).

(a) 射影 $\pi : \mathbb{P}^1 \times X \to X$ による T_X の引き戻しから定まる $\mathbb{P}^1 \times X$ 上のベクトル束 $\pi^* TX$ を考える. $\pi^* TX$ 上の有理型接続

$$\nabla = \pi^* \nabla + \frac{\pi^* \Phi}{z} - \left(\frac{\Phi(E)}{z} + \nabla E \right) \frac{dz}{z} \tag{15}$$

は積分可能となる, ただし z は $\mathbb{P}^1$ の非斉次座標を表す,

(b) unit field e は ∇-水平的であり (すなわち $\nabla(e) = 0$) かつ $\Phi_e = \mathrm{Id} \in \mathrm{End}(\Theta_X)$ をみたす, ここで Higgs 場 Φ を $End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$ に値をもつ 1-形式とみなし $\Phi_e \in End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$ はベクトル場 e と 1-形式 Φ の縮約を表す.

Remark 3.1. Higgs 場 Φ を用いて Θ_X 上に積 $\star$ が, $\xi, \eta \in \Theta_X$ に対して $\xi \star \eta = \Phi_\xi(\eta)$ と定めることにより定義できる. 積 $\star$ が可換であるとき Higgs 場 Φ は対称であると呼ばれる. Definition 3.1 の条件 (b) $\Phi_e = \mathrm{Id}$ は e が積 $\star$ の単位元であることを意味する. Higgs 場 Φ の積分可能条件 (すなわち $\Phi \wedge \Phi = 0$) は積 $\star$ の結合律と同値である. 有理型接続 ∇ の積分可能条件から Higgs 場の積分可能条件が従うので, 積 $\star$ は Θ_X 上に単位元をもつ結合的可換 $\mathcal{O}_X$-代数を定める.

∇ は torsion free な平坦接続なので, (少なくとも単連結開集合 $U \subset X$ 上で) $\nabla(\partial_{t_i}) = 0$ をみたす “平坦座標系” $(t_1, \ldots, t_N)$ を取ることができる. 本稿では以下を仮定する:

(C1) $e = \partial_{t_N}$,

(C2) $E = w_1 t_1 \partial_{t_1} + \cdots + w_N t_N \partial_{t_N}$ for $w_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, N)$,

(C3) $w_N = 1$ and $w_i - w_j \notin \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ for $i \neq j$.

正則関数 $f \in \mathcal{O}_X(U)$ が重み $w(f) \in \mathbb{C}$ をもつ重み付き斉次関数であるとは, f が $Ef = w(f)f$ をみたすこととする. 特に平坦座標 t_i $(i = 1, \ldots, N)$ は重み $w(t_i) = w_i$ をもつ重み付き斉次関数である.

平坦座標に対して $\Theta_X(U)$ の基底を $\{\partial_{t_1}, \ldots, \partial_{t_N}\}$ と固定する. $\Phi \in End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^1_X$ を $\Phi = \sum_{k=1}^{N} \Phi^{(k)} dt_k$, $\Phi^{(k)} \in End_{\mathcal{O}_X}(\Theta_X)$ $(k = 1, \ldots, N)$ と表示して, 以下の行列を導入する:

(i) $\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}$ $(k = 1, \ldots, N)$ は $\Phi^{(k)}$ の表現行列とする, すなわち (i,j)-成分 $\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{ij}$ は

$$\Phi^{(k)}(\partial_{t_i}) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{ij} \partial_{t_j} \quad (i = 1, \ldots, N), \tag{16}$$

により定義される.

(ii) $\mathcal{T}$ および $\mathcal{B}_\infty$ はそれぞれ $-\Phi(E)$ および ∇E の表現行列とする, すなわち

$$-\Phi_{\partial_{t_i}}(E) = \sum_{j=1}^{N} \mathcal{T}_{ij} \partial_{t_j}, \qquad \nabla_{\partial_{t_i}}(E) = \sum_{j=1}^{N} (\mathcal{B}_\infty)_{ij} \partial_{t_j}. \tag{17}$$

以下では $-\Phi(E)$(あるいは $\mathcal{T}$) が U 上 regular であることを仮定する (すなわち U 上で $\mathcal{T}$ の各 Jordan ブロックに対する固有値が全て互いに相異なる). [6] では generically regular semisimple であることを仮定したが, 本稿では半単純でない平坦構造も扱うためにそれを仮定しない. それでも多くの議論は [6] と同様に行われる. [6] と異なる議論が必要な部分のみ照明を述べることにする.

Lemma 3.1. $\mathcal{B}_\infty = diag[w_1, \dots, w_N]$.

Proof. [6] 参照. □

Proposition 3.1. 有理型接続 ∇ が積分可能であるための必要十分条件は $\mathcal{T}, \mathcal{B}_\infty, \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} (i = 1, \dots, N)$ が以下の関係式をみたすことである:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{\partial \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}}{\partial t_j} = \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{B}}^{(j)}}{\partial t_i}, \quad i, j = 1, \dots, N, \\
[\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}, \tilde{\mathcal{B}}^{(j)}] = O, \quad i, j = 1, \dots, N, \\
[\mathcal{T}, \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}] = O, \quad i = 1, \dots, N, \\
\dfrac{\partial \mathcal{T}}{\partial t_i} + \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} + [\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}, \mathcal{B}_\infty] = O, \quad i = 1, \dots, N.
\end{array}
\right. \tag{18}
$$

Proof. [6] 参照. □

Proposition 2.1 より関係式 (18) は Pfaff 系

$$
dY = -(zI_N - \mathcal{T})^{-1} \Big(dz + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} dt_i \Big) \mathcal{B}_\infty Y \tag{19}
$$

が積分可能になるための条件に他ならない. すなわち Saito structure (without a metric) が与えられると, それから多変数一般大久保型方程式が生ずる. 次節では逆に多変数一般大久保方方程式が与えられたとき, それから Saito structure (without a metric) が構成できるための条件について調べる.

Lemma 3.2. *Higgs* 場 Φ が対称であるための必要十分条件は $\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{ij} = \tilde{\mathcal{B}}^{(i)}_{kj}$ $(i, j, k = 1, \dots, N)$ が成り立つことである.

Proof. [6] 参照. □

Lemma 3.3. ベクトル場 V_i $(i = 1, \dots, N)$ を

$$
\begin{pmatrix} V_N \\ \vdots \\ V_1 \end{pmatrix} = -\mathcal{T} \begin{pmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_N} \end{pmatrix} \tag{20}
$$

によって定める. このとき

$$
V_{N-k+1} h = (-1)^{N+1} tr \tilde{\mathcal{B}}^{(k)} h, \qquad k = 1, \dots, N
$$

が成り立つ, ただし $h = h(t) = \det(-\mathcal{T})$.

Proof. [6] 参照. □

Remark 3.2. $\mathcal{T}$ が generically regular semisimple な場合には Lemma 3.3 を用いて $D = \{t \in U; h(t) = 0\}$ が自由因子であることが証明できる ([6]). しかし $\mathcal{T}$ が semisimple でない場合には $h(t)$ が被約でないため自由因子という概念は有効に機能しない.

Lemma 3.4. 次をみたす $N \times N$ 行列 $\mathcal{C}$ が一意的に存在する:

$$\mathcal{T} = -E\mathcal{C}, \quad \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} = \frac{\partial \mathcal{C}}{\partial t_i}, \quad i = 1, \ldots, N$$

をみたし, かつ $\mathcal{C}$ の (i,j)-成分 $\mathcal{C}_{ij}$ は重さ $w(\mathcal{C}_{ij}) = 1 - w_i + w_j$ をもつ重み付き斉次関数である.

Proof. [6] 参照. □

Lemma 3.5. $(t_1, \ldots, t_N)$ を平坦座標系とする. すると $\mathcal{T}_{Nj} = -w_j t_j$ (あるいは $\mathcal{C}_{Nj} = t_j$), $j = 1, \ldots, N$ が成り立つ. これは $V_1 = E$ を意味する.

Proof. 仮定 (C1) $e = \partial_{t_N}$ より $\tilde{\mathcal{B}}^{(N)} = I_N$ が分かる. よって $\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{Nj} = \tilde{\mathcal{B}}^{(N)}_{kj} = \delta_{kj}$ が成り立つ. したがって, $\mathcal{C}_{Nj}$ の重み付き斉次性から $\mathcal{C}_{Nj} = t_j$ である. ゆえに $\mathcal{T}_{Nj} = -E\mathcal{C}_{Nj} = -Et_j = -w_j t_j$. □

Proposition 3.2. 次をみたす N-成分ベクトル $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N) \in \mathcal{O}_X(U)^N$ が一意的に存在する:

$$\mathcal{C}_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial t_i}$$

をみたし, かつ g_j $(j = 1, \ldots, N)$ は重さ $w(g_j) = 1 + w_j$ をもつ重み付き斉次関数.

Proof. [6] 参照. □

Definition 3.2 (Konishi-Minabe [10]). Proposition 3.2 のベクトル $\vec{g}$ (より正確には (局所) ベクトル場 $\mathcal{G} = \sum_{i=1}^N g_i \partial_{t_i}$) はポテンシャルベクトル場と呼ばれる. Manin [12] においても少し異なる枠組みの下ではあるが同様の定義が与えられた. そこでは local vector potential と呼ばれている.

Proposition 3.3. ポテンシャルベクトル場 $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N)$ は次の非線形微分方程式系をみたす:

$$\sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{m=1}^N \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, \quad i, j, k, l = 1, \ldots, N, \tag{21}$$

$$\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_N \partial t_i} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, N, \tag{22}$$

$$Eg_j = \sum_{k=1}^N w_k t_k \frac{\partial g_j}{\partial t_k} = (1 + w_j) g_j, \quad j = 1, \ldots, N. \tag{23}$$

Proof. [6] 参照. □

Definition 3.3. $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N)$ に対する非線形微分方程式系 (21), (22), (23) を一般 WDVV 方程式と呼ぶ.

逆に, 一般 WDVV 方程式 (21),(22),(23) の解が任意に与えられたとき, それから Saito structure (without a metric) を構成することができる.

Proposition 3.4. $w_i - w_j \notin \mathbb{Z}$ および $w_N = 1$ を満たす定数 $w_j \in \mathbb{C}, j = 1, \ldots, N$ を固定する. $\vec{g} = (g_1, \ldots, g_N)$ は $\mathbb{C}^N$ の単連結開集合 U 上の正則関数を成分とするベクトルで微分方程式系 (21), (22), (23) をみたすとする. このとき U 上の *Saito structure (without a metric)* で $(t_1, \ldots, t_N)$ を平坦座標系, $\vec{g}$ をポテンシャルベクトル場にもつものが存在する.

Proof. [6] 参照. □

Dubrovin による Frobenius 多様体 [4] との関係も generically regular semisimple のときと同様に次のように記述される. J は $N \times N$ 行列で, その (i, j)-成分が $J_{ij} = \delta_{i+j,N+1}$, $i, j = 1, \ldots, N$ で与えられるものとする. また, $N \times N$ 行列 A に対して A^* を $A^* := J\,{}^tAJ$ と定める.

Proposition 3.5. X 上の *Saito structure (without a metric)* に対して, 以下の条件は互いに同値である:

(i) 平坦座標系を適当に正規化すると, $\mathcal{C}^* = \mathcal{C}$ が成り立つ.

(ii) 平坦座標系を適当に正規化すると, 正則関数 $F \in \mathcal{O}_X$ が存在して

$$\frac{\partial F}{\partial t_i} = g_{N+1-i} = (\vec{g}J)_i, \quad i = 1, \ldots, N \tag{24}$$

が成り立つ.

(iii) ある定数 $r \in \mathbb{C}$ が存在して, 重みが

$$w_{n+1-i} + w_i = -2r, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{25}$$

という関係をみたし, かつ次を満たす "計量" η が存在する (本稿では "計量" とは TX 上の非退化対称 $\mathbb{C}$ 双線形形式を意味する):

$$\eta(\sigma \star \xi, \zeta) = \eta(\sigma, \xi \star \zeta), \quad \text{(積との可換性)} \tag{26}$$

$$(\nabla\eta)(\xi, \zeta) := d(\eta(\xi, \zeta)) - \eta(\nabla\xi, \zeta) - \eta(\xi, \nabla\zeta) = 0, \quad \text{(水平性)} \tag{27}$$

$$(E\eta)(\xi, \zeta) := E(\eta(\xi, \zeta)) - \eta(E\xi, \zeta) - \eta(\xi, E\zeta) = -2r\eta(\xi, \zeta), \quad \text{(斉次性)} \tag{28}$$

for any $\sigma, \xi, \zeta \in \Theta_X$.

Proof. [6] 参照. □

Proposition 3.5 の関数 F はプレポテンシャルあるいはポテンシャルなどと呼ばれる (cf. [4, 13]). プレポテンシャル F は次の方程式をみたすことが容易に分かる.

Proposition 3.6. プレポテンシャル F は次の非線形微分方程式系をみたす:

(29)
$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^3 F}{\partial t_k \partial t_i \partial t_m} \frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_j \partial t_{N+1-m}} = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^3 F}{\partial t_l \partial t_i \partial t_m} \frac{\partial^3 F}{\partial t_k \partial t_j \partial t_{N+1-m}}, \quad i,j,k,l = 1,\dots,N,$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial t_N \partial t_i \partial t_j} = J_{ij}, \quad i,j = 1,\dots,N, \tag{30}$$

$$EF = \sum_{k=1}^{N} w_k t_k \frac{\partial F}{\partial t_k} = (1-2r)F, \tag{31}$$

ただし w_i は $-2r = w_i + w_{n+1-i}$, $i = 1,\dots,N$ を満たす定数. 方程式 (29) は *WDVV*方程式と呼ばれる *[4]*.

以下では, 次節以降の準備のために X 上の Saito structure (without a metric) から生じる多変数一般大久保型方程式の性質について調べる. X 上の regular な Saito structure (without a metric) が与えられたとし, $(t_1,\dots,t_N)$ を X の単連結開集合 U 上の平坦座標系, また

$$dY = -(zI_N - \mathcal{T})^{-1}\Big(dz + \sum_{i=1}^{N} \tilde{\mathcal{B}}^{(i)} dt_i\Big)\mathcal{B}_\infty Y \tag{32}$$

を Saito structure (without a metric) から生じる多変数一般大久保型方程式とする. Saito structure (without a metric) が regular であるという仮定から, ある正則行列 P が存在して

$$P^{-1}\mathcal{T}P = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n \tag{33}$$

とできる, ここで Z_k は (5) の形の $m_k \times m_k$ 行列で $m_1 + \cdots + m_n = N$, $k \neq l$ ならば $z_{k,0} \neq z_{l,0}$. このとき正則行列 P の取り方には次の不定性があることに注意する: $a_{k,l}$, $k = 1,\dots,n, l = 0,\dots,m_k - 1$ ただし $a_{k,0} \neq 0$ に対して

$$A := A_1 \oplus \cdots \oplus A_n, \quad A_k = \sum_{l=0}^{m_k-1} a_{k,l}\Lambda_k^l \tag{34}$$

としたとき P を PA で取り換えても構わない (A_k と Z_k は可換なので).

Remark 3.3. $(-z_{k,0},\dots,-z_{k,m_k-1})_{k=1,\dots,n}$ を標準座標と呼ぶ (半単純とは限らない正則 F-manifold に対する標準座標は [3] によって与えられた). 標準座標は積構造 $\star$ に関して標準的な座標である. 実際 $(-\partial_{z_{k,0}},\dots,-\partial_{z_{k,m_k-1}})_{k=1,\dots,n}$ に関して積は次のように記述される:

$$(-\partial_{z_{k,l}}) \star (-\partial_{z_{p,q}}) = \begin{cases} -\delta_{k,p}\partial_{z_{k,l+q}}, & 0 \leq l+q \leq m_k - 1, \\ 0, & l+q \geq m_k. \end{cases}$$

Lemma 3.6. 平坦座標 $(t_1,\ldots,t_N)$ と標準座標 $(z_{k,0},\ldots,z_{k,m_k-1})_{k=1,\ldots,n}$ の間で次が成り立つ:

$$\frac{\partial z_{k,0}}{\partial t_N}=-1,\quad k=1,\ldots,n, \tag{35}$$

$$\frac{\partial z_{k,l}}{\partial t_N}=0,\quad k=1,\ldots,n,\ l=1,\ldots,m_k-1. \tag{36}$$

Proof. まず $\tilde{\mathcal{B}}^{(N)}=I_N$ であることに注意する. 一方 Proposition 2.1 より

$$P^{-1}\tilde{\mathcal{B}}^{(N)}P=-\frac{\partial Z_1}{\partial t_N}\oplus\cdots\oplus-\frac{\partial Z_n}{\partial t_N}$$

が成り立つ. すると $Z_k=\sum_{l=0}^{m_k-1}z_{k,l}\Lambda_k^l$ より明らか. □

Lemma 3.7. $P^{-1}\mathcal{T}P=Z_1\oplus\cdots\oplus Z_n$ をみたす正則行列 P は

$$P=\begin{pmatrix}\frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_1}\\ & \vdots & \\ \frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_N} & \cdots & \frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_N}\end{pmatrix}A$$

と書ける, ただし A は (34) の形の行列である.

Proof. Proposition 2.1 より

$$\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}P=-P\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial t_k}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial Z_n}{\partial t_k}\Big)$$

が成り立つ. 一方 $\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}_{Nj}=\tilde{\mathcal{B}}^{(N)}_{kj}=\delta_{kj}$ に注意して

$$(\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}P\text{ の }N\text{ 行目})=(P_{k1},P_{k2},\ldots,P_{kN}).$$

また

$$\begin{aligned}&\Big(-P\Big(\frac{\partial Z_1}{\partial t_k}\oplus\cdots\oplus\frac{\partial Z_n}{\partial t_k}\Big)\text{の }N\text{ 行目}\Big)\\ &=-\Big(P_{N,i_{0,0}}\frac{\partial z_{0,0}}{\partial t_k},P_{N,i_{0,0}}\frac{\partial z_{0,1}}{\partial t_k}+P_{N,i_{0,1}}\frac{\partial z_{0,0}}{\partial t_k},\ldots,\sum_{l=0}^{m_n-1}P_{N,i_{n,l}}\frac{\partial z_{n,m_n-1-l}}{\partial t_k}\Big)\\ &=-\Big(\frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_k},\ldots,\frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_k}\Big)P',\end{aligned}$$

ここで

$$P'=P'_1\oplus\cdots\oplus P'_n,\quad P'_k=\sum_{l=0}^{m_k-1}P_{N,i_{k,l}}\Lambda_k^l$$

である. よって $k=1,\ldots,N$ に対して

$$(P_{k1},P_{k2},\ldots,P_{kN})=-\Big(\frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_k},\ldots,\frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_k}\Big)P'$$

が成り立つ. 特に P' は (34) の形の行列である. □

Lemma 3.8. *unit field と Euler field について*

$$e=-\sum_{k=1}^{n}\partial_{z_{k,0}},\qquad E=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m_k-1}z_{k,l}\partial_{z_{k,l}} \tag{37}$$

が成り立つ. 特に $z_{k,l}$, $k=1,\ldots,n$, $l=0,\ldots,m_k-1$ は $w(z_{k,l})=1$ の重み付き斉次関数である.

Proof. Lemma 3.7 より

$$P=\begin{pmatrix} \frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_N} & \cdots & \frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_N} \end{pmatrix}$$

とすると

$$P^{-1}\mathcal{T}P=Z_1\oplus\cdots\oplus Z_n,\quad P^{-1}\tilde{\mathcal{B}}^{(k)}P=-\frac{\partial Z_1}{\partial t_k}\oplus\cdots\oplus-\frac{\partial Z_n}{\partial t_k}$$

となることが分かる. また

$$\begin{pmatrix}\partial_{t_1}\\ \vdots\\ \partial_{t_N}\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}$$

ゆえ

$$\Phi_{\partial_{t_l}}\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}=P^{-1}\tilde{\mathcal{B}^{(l)}}P\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}$$

である. よって

$$\begin{aligned}\Phi_{\partial_{z_{k,0}}}\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}&=\sum_{l=1}^{N}\frac{\partial t_l}{\partial z_{k,0}}(P^{-1}\tilde{\mathcal{B}^{(l)}}P)\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}\\ &=(O\oplus\cdots\oplus-I_{m_k}\oplus\cdots\oplus O)\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

これは $e=-\sum_{k=1}^{n}\partial_{z_{k,0}}$ を意味する.

また

$$-\Phi_{\begin{pmatrix}\partial_{t_1}\\ \vdots\\ \partial_{t_N}\end{pmatrix}}(E)=\mathcal{T}P\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots\\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}$$

ゆえ

$$-\Phi_{\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}}(E) = P^{-1}\mathcal{T}P\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix} = (Z_1\oplus\cdots\oplus Z_n)\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix}$$

である. よって

$$\begin{aligned} E &= \Phi_e(E) = -\Phi_{\sum_{k=1}^{n}\partial_{z_{k,0}}}(E) \\ &= (1,0,\dots,0,\dots,1,0\dots,0)(Z_1\oplus\cdots\oplus Z_n)\begin{pmatrix}\partial_{z_{0,0}}\\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}}\end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m_k-1} z_{k,l}\partial_{z_{k,l}}. \end{aligned}$$

□

4 多変数一般大久保型方程式と平坦構造

本節では, 多変数一般大久保型方程式が与えられたとき, それに平坦座標が定義されるための条件について調べる. 多変数一般大久保型方程式

$$dY = -(zI_N - T)^{-1}\big(dz + \sum_{i=1}^{N}\tilde{B}^{(i)}dx_i\big)B_\infty Y \tag{38}$$

が与えられたとし, (38) について Section 2 と同じ仮定をおく. ここで (38) が U 上の平坦構造をもつということについて正確な定義を与えておく.

Definition 4.1. $U\subset\mathbb{C}^N$ とする. (38) が U 上の平坦構造をもつとは, U 上の Saito structure (without a metric) が存在して, その平坦座標 $(t_1,\dots,t_N)$ と $\mathcal{T},\mathcal{B}_\infty,\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}$ について, 変数変換 $(t_1,\dots,t_N)=(t_1(x),\dots,t_N(x))$ が存在してかつ $\mathcal{T}=T,\mathcal{B}_\infty = B_\infty-(\lambda_N-1)I_N,\tilde{\mathcal{B}}^{(i)}=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial x_j}{\partial t_i}\tilde{B}^{(j)}$ $(i=1,\dots,N)$ となることである.

(38) は U 上 regular であると仮定する. P は $N\times N$ 正則行列で $P^{-1}TP = Z_1\oplus\cdots\oplus Z_n$ となるものとする. また以下では $k=1,\dots,n, l=0,\dots,m_k-1$ に対して $i_{k,l}:=\sum_{j=1}^{k}m_{j-1}+l+1$ という記号を用いる, ただし $m_0=0$ とする.

Lemma 4.1. 多変数一般大久保型方程式 (38) が U 上の平坦構造をもつための必要十分条件は次の (i)(ii) をみたすように P が取れることである:

(i) U 上至るところで $P_{N,i_{k,0}}=1, P_{N,i_{k,l}}=0,\ k=1,\dots,n, l=1,\dots,m_k-1,$

(ii) $Q = P^{-1}$ とおくと Q は次をみたす:

$$\frac{\partial Q_{i_{p,q},j}}{\partial z_{k,l}} = \frac{\partial Q_{i_{k,l},j}}{\partial z_{p,q}}, \quad \textit{for all } (k,l),(p,q),j, \tag{39}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m_k-1} z_{k,l}\frac{\partial Q_{ij}}{\partial z_{k,l}} = (\lambda_j - \lambda_N)Q_{ij}, \quad i,j = 1,\ldots,N. \tag{40}$$

Proof. (38) が U 上の平坦構造を持ったとする. 独立変数を平坦座標に取り換えることにより, 初めから $(x_1,\ldots,x_N) = (t_1,\ldots,t_N)$ は平坦座標であるとしてよい. Lemma 3.7 より

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial z_{1,0}}{\partial t_N} & \cdots & \frac{\partial z_{n,m_n-1}}{\partial t_N} \end{pmatrix}$$

と書けて, Lemma 3.6 より

$$P_{N,i_{k,0}} = -1, \ P_{N,i_{k,l}} = 0, \quad k = 1,\ldots,n, \ l = 1,\ldots,m_k - 1.$$

このとき

$$Q = P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial t_1}{\partial z_{1,0}} & \cdots & \frac{\partial t_N}{\partial z_{1,0}} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial t_1}{\partial z_{n,m_n-1}} & \cdots & \frac{\partial t_N}{\partial z_{n,m_n-1}} \end{pmatrix}$$

なので

$$\frac{\partial Q_{i_{p,q},j}}{\partial z_{k,l}} = \frac{\partial Q_{i_{k,l},j}}{\partial z_{p,q}}$$

が成り立つ. また $w(t_i) = w_i$ と Lemma 3.8 より

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m_k-1} z_{k,l}\frac{\partial Q_{i_{p,q},j}}{\partial z_{k,l}} = E\frac{\partial t_j}{\partial z_{p,q}} = (w_j - 1)\frac{\partial t_j}{\partial z_{p,q}} = (\lambda_j - \lambda_N)Q_{i_{p,q},j}.$$

次に逆を示すため (i)(ii) を仮定する. $E = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{m_k-1} z_{k,l}\partial_{z_{k,l}}$ として E を定める. 仮定 (ii) の (40) より Q_{ij} は $z_{k,l}$ について重さ $(\lambda_j - \lambda_N)$ の重み付き斉次関数である. すると (39) より $\frac{\partial t_j}{\partial z_{k,l}} = Q_{i_{k,l},j}$ をみたす重さ $(\lambda_j - \lambda_N + 1)$ の重み付き斉次関数 $t_j, j = 1,\ldots,N$ が存在することが分かる. 条件 (i) より $\frac{\partial z_{k,0}}{\partial t_N} = -1$, $\frac{\partial z_{k,l}}{\partial t_N} = 0 \ (l \neq 0)$ が成り立つ. これより $\partial_{t_N} = -\sum_{k=1}^{n}\partial_{z_{k,0}}$ となるので $e = \partial_{t_N} = -\sum_{k=1}^{n}\partial_{z_{k,0}}$ と定める. さらに TU 上の接続 ∇ を

$$\nabla_{\partial_{z_{p,q}}}(\partial_{z_{k,l}}) = \sum_{j=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=0}^{m_s-1}\frac{\partial^2 t_j}{\partial z_{k,l}\partial z_{p,q}}\frac{\partial z_{s,t}}{\partial t_j}\partial_{z_{s,t}}$$

で定める. すなわち

$$\nabla \begin{pmatrix} \partial_{z_{1,0}} \\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}} \end{pmatrix} = dQQ^{-1} \begin{pmatrix} \partial_{z_{1,0}} \\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}} \end{pmatrix}.$$

すると

$$\nabla \begin{pmatrix} \partial_{t_1} \\ \vdots \\ \partial_{t_N} \end{pmatrix} = \nabla \left(P \begin{pmatrix} \partial_{z_{1,0}} \\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}} \end{pmatrix} \right) = (dP + PdQQ^{-1}) \begin{pmatrix} \partial_{z_{1,0}} \\ \vdots \\ \partial_{z_{n,m_n-1}} \end{pmatrix} = 0.$$

また, 積 $\star$ を次のように定める (これは Higgs 場 Φ を定めることと同値である):

$$\partial_{z_{k,l}} \star \partial_{z_{p,q}} = \begin{cases} -\delta_{k,p}\partial_{z_{k,l+q}} & 0 \leq l+q \leq m_k - 1 \\ 0 & l+q \geq m_k. \end{cases}$$

このとき

$$E \star \partial_{z_{k,l}} = -\sum_{q=0}^{m_k-l-1} z_{k,q}\partial_{z_{k,l+q}}$$

なので $-\Phi(E)$ の $\{\partial_{z_{k,l}}\}$ に関する表現行列は $Z = Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n$ となる. □

Proposition 4.1. 多変数一般大久保型方程式 (38) が平坦構造をもつための必要十分条件は U 上至るところ $P_{N,i_{k,0}} \neq 0,\ k = 1, \ldots, n$ である.

Proof. $\Rightarrow$ は Lemma 4.1 より明らかなので, $\Leftarrow$ を示す.

$$E^{(k,l)} := \frac{\partial Z}{\partial z_{k,l}} = O \oplus \cdots \oplus \Lambda_k^l \oplus \cdots \oplus O$$

とおく. また

$$\tilde{E}^{(k,l)} := \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial x_j}{\partial z_{k,l}} \tilde{B}^{(j)} = -PE^{(k,l)}Q$$

とおく. ここで仮定より P の自由度を利用して, 適当な A を用いて P を PA で置き換えることにより

$$P = \begin{pmatrix} & & & & * & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & * & & & & \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

の形に取ることができ, このとき

$$\tilde{E}^{(k,l)} = \begin{pmatrix} & & * & \\ & & \vdots & \\ & & * & \\ Q_{i_{k,l},1} & Q_{i_{k,l},2} & \cdots & Q_{i_{k,l},N} \end{pmatrix}$$

が分かる. 一方 (7),(8) を $\tilde{E}^{(k,l)}$ について書き直して

$$\frac{\partial T}{\partial z_{k,l}} + \tilde{E}^{(k,l)} + [\tilde{E}^{(k,l)}, B_\infty] = O, \tag{41}$$

$$\frac{\partial \tilde{E}^{(k,l)}}{\partial z_{p,q}} - \frac{\partial \tilde{E}^{(p,q)}}{\partial z_{k,l}} = O. \tag{42}$$

(42) の N 行目より

$$\frac{\partial Q_{i_{k,l},j}}{\partial z_{p,q}} - \frac{\partial Q_{i_{p,q},j}}{\partial z_{k,l}} = 0$$

を得る. また

$$T = P(Z_1 \oplus \cdots \oplus Z_n)Q = -\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=0}^{m_p-1} z_{p,q} \tilde{E}^{(p,q)}$$

の両辺を $z_{k,l}$ で微分して

$$\frac{\partial T}{\partial z_{k,l}} = -\tilde{E}^{(k,l)} - \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=0}^{m_p-1} z_{p,q} \frac{\partial \tilde{E}^{(p,q)}}{\partial z_{k,l}} = -\tilde{E}^{(k,l)} - \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=0}^{m_p-1} z_{p,q} \frac{\partial \tilde{E}^{(k,l)}}{\partial z_{p,q}},$$

ここで再び (42) を用いた. これと (41) を比較して

$$\sum_{p=1}^{n} \sum_{q=0}^{m_p-1} z_{p,q} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial z_{p,q}} = (\lambda_j - \lambda_N) Q_{ij}$$

を得る. よって仮定より Lemma 4.1 の条件 (i)(ii) が導かれる. □

Lemma 4.2. 次の 2 つの条件は互いに同値である:

(i) U 上至るところ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_N} \end{vmatrix} \neq 0$$

(ii) U 上至るところ $P_{N,i_{k,0}} \neq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Proof. 対偶を示す.

not (i)$\Rightarrow$ not (ii) ある点 $x^0 \in U$ で (i) の行列式が 0 になったとする. すると 0 でないベクトル $(a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{C}^N$ が存在して, x^0 において

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \left(\frac{\partial T_{N1}}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_i} \right) = 0 \tag{43}$$

となる. また $\frac{\partial T_{Nj}}{\partial x_i} = (\lambda_N - \lambda_j - 1)\tilde{B}^{(i)}_{Nj}$ ゆえ, (43) より

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \tilde{B}^{(i)} = \begin{pmatrix} & * & \\ & \vdots & \\ & * & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \tag{44}$$

が従う. 一方

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \tilde{B}^{(i)} P = P \sum_{i=1}^{N} a_i \Big(-\frac{\partial Z}{\partial x_i}\Big)$$

より, Z は上三角行列であることに注意すると

$$\sum_{i=1}^{N} a_i \tilde{B}^{(i)} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,l}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,l}} \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{l} c_{k,l-j} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,j}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,j}} \end{pmatrix}$$

という形に書けることが分かる. これと (44) を合わせて

$$\sum_{j=0}^{l} c_{k,l-j} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,j}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,j}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが, ここでもし全ての (k,l) に対して $c_{k,l} = 0$ ならば $\sum_{i=1}^{N} a_i \tilde{B}^{(i)} = O$ となるが, $\sum_{i=1}^{N} a_i \tilde{B}^{(i)} \neq O$ なのでこれは矛盾である. よって $c_{k,l} \neq 0$ となる (k,l) が存在する. そのような (k,l) のうちで l が最小のものを取る. すると

$$\sum_{j=0}^{l} c_{k,l-j} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,j}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,j}} \end{pmatrix} = c_{k,l} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,0}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,0}} \end{pmatrix}$$

となるので $c_{k,l} \neq 0$ より $P_{N,i_{k,0}} = 0$ を得る. これは not (ii) を意味する.

<u>not (ii)⇒ not (i)</u> ある点 $x^0 \in U$ で $P_{N,i_{k,0}} = 0$ となる k が存在したとする.

$$\tilde{B}^{(i)} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,0}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & * & \\ & \vdots & \\ & * & \\ \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_i} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N - \lambda_1 - 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,0}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,0}} \end{pmatrix}$$

であるが, 一方で仮定より

$$\tilde{B}^{(i)} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,0}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,0}} \end{pmatrix} = -\frac{\partial z_{k,0}}{\partial x_i} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,0}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ \vdots \\ * \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるので

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_N - \lambda_1 - 1 & & \\ & \ddots & \\ & & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} P_{1,i_{k,0}} \\ \vdots \\ P_{N,i_{k,0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る. ところが P は可逆なので

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_N} \end{vmatrix} = 0.$$

□

以上の議論をまとめると次を得る.

Theorem 4.1. 多変数一般大久保方程式 (38) が U 上の平坦構造をもつための必要十分条件は, U 上至るところ

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_1} \\ & \vdots & \\ \frac{\partial T_{N1}}{\partial x_N} & \cdots & \frac{\partial T_{NN}}{\partial x_N} \end{vmatrix} \neq 0$$

となることである. 特に

$$t_j := -(\lambda_j - \lambda_N + 1)^{-1} T_{Nj}, \qquad j = 1, \ldots, N$$

が平坦座標を与える.

5 パンルヴェ方程式の平坦構造

前節までの議論により, 一般大久保型方程式のモノドロミ保存変形と平坦構造の関係が明らかになった. 本節では特に (古典的) パンルヴェ方程式の場合について述べる.

Painlevé VI 方程式と一般 WDVV 方程式の関係について [6] において次が示された:

Theorem 5.1. $N=3$ のとき, 一般 *WDVV*方程式

$$\sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_k \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_l \partial t_m} = \sum_{m=1}^{N} \frac{\partial^2 g_m}{\partial t_l \partial t_i} \frac{\partial^2 g_j}{\partial t_k \partial t_m}, \quad i,j,k,l = 1,\ldots,N, \tag{45}$$

$$\frac{\partial^2 g_j}{\partial t_N \partial t_i} = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1,\ldots,N, \tag{46}$$

$$E g_j = \sum_{k=1}^{N} w_k t_k \frac{\partial g_j}{\partial t_k} = (1 + w_j) g_j, \quad j = 1,\ldots,N. \tag{47}$$

に付加条件

$$(48)\qquad \left(-(1+w_j-w_i)\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1\le i,j\le 3} \sim \begin{pmatrix} z_{1,0} & & \\ & z_{2,0} & \\ & & z_{3,0} \end{pmatrix}$$

を課したものは *Painlevé VI* 方程式に同値である.

Remark 5.1. [1, 11] においても, Painlevé VI と bi-flat F-manifolod との関係が扱われている.

Painlevé V 方程式については本稿の議論を用いて次が得られる:

Theorem 5.2. *$N=3$ のとき, Theorem 5.1 の一般 WDVV方程式* (45), (46), (47) *に付加条件*

$$(49)\qquad \left(-(1+w_j-w_i)\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1\le i,j\le 3} \sim \begin{pmatrix} z_{1,0} & z_{1,1} & \\ & z_{1,0} & \\ & & z_{2,0} \end{pmatrix}$$

を課したものは Painlevé V 方程式に同値である.

Proof. Painlevé V 方程式

$$\frac{d^2\lambda}{dt^2} = \left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right)\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 - \frac{1}{t}\frac{d\lambda}{dt} + \frac{(\lambda-1)^2}{t^2}\left(\alpha\lambda+\frac{\beta}{\lambda}\right) + \gamma\frac{\lambda}{t} + \delta\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda-1}$$

は $x=0,\infty$ で確定特異点 $x=1$ で Poincaré rank 1 の不確定特異点をもつ次の 2 階線形微分方程式のモノドロミ保存変形より得られる:

$$(50)\qquad \frac{dY}{dx} = \left(\frac{A_1^{(-1)}}{(x-1)^2}+\frac{A_1^{(0)}}{x-1}+\frac{A_0^{(0)}}{x}\right)Y,$$

$$A_0^{(0)} = \begin{pmatrix} z_0+\alpha_3 & -uz_0 \\ (z_0+\alpha_3)/u & -z_0 \end{pmatrix},\quad A_1^{(-1)} = \begin{pmatrix} z_1+t & -vz_1 \\ (z_1+t)/v & -z_1 \end{pmatrix},$$
$$A_1^{(0)} = -A_0^{(0)} - \begin{pmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_0+\alpha_1-1 \end{pmatrix},$$

ただし

$$\begin{aligned}(1-\alpha_1)z_0 &= \lambda^2(\lambda-1)^2\mu^2 + \big(\alpha_0(\lambda-1)-\alpha_2-t\big)\big((\lambda-1)\mu+\alpha_0\big)\lambda \\ &\quad + \big(\alpha_0\lambda(\lambda-1)-t\big)\lambda\mu + \alpha_3(\alpha_1-1),\\ (1-\alpha_1)z_1 &= \lambda(\lambda-1)^3\mu^2 + \big(2\alpha_0\lambda^2-(2\alpha_0-\alpha_3+t)\lambda-\alpha_3\big)\big((\lambda-1)\mu+\alpha_0\big) \\ &\quad - \alpha_0^2\lambda(\lambda-1) + (\alpha_0+\alpha_1-1)t,\\ v &= \frac{\lambda-1}{\lambda}\frac{z_0}{z_1}u,\end{aligned}$$

および

$$\alpha=\frac{\alpha_1^2}{2},\quad \beta=-\frac{\alpha_3^2}{2},\quad \gamma=\alpha_0-\alpha_2,\quad \delta=-\frac{1}{2},$$
$$\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1.$$

(50) は 3 階一般大久保型方程式に変換することができる ([7]):

$$(xI_3-T_V)\frac{d\Psi}{dx}=C_V\Psi, \tag{51}$$

ただし

$$T_V=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$
$$C_V=\begin{pmatrix}\alpha_2-\alpha_0 & -\frac{1}{t}\det A_1^{(0)} & (C_V)_{13}\\ t & 0 & ((\lambda-1)\mu+\alpha_0)\lambda+\alpha_3\\ t-((\lambda-1)\mu+\alpha_0)(\lambda-1) & (C_V)_{32} & \alpha_3\end{pmatrix},$$

で

$$\begin{aligned}t(C_V)_{32}=&(\alpha_1-1)z_1+(\alpha_0+\alpha_1-1)(t-((\lambda-1)\mu+\alpha_0)(\lambda-1)),\\ (C_V)_{13}=&\frac{1}{t-((\lambda-1)\mu+\alpha_0)(\lambda-1)}\times\\ &\times\big((\alpha_1-1)z_0-(((\lambda-1)\mu+\alpha_0)\lambda+\alpha_3)(C_V)_{32}-\alpha_3(\alpha_0+\alpha_3)\big).\end{aligned}$$

一方, 付加条件 (49) は Saito structure (without a metric) に付随する多変数一般大久保型方程式 (38) において

$$T\sim\begin{pmatrix}z_{1,0}&z_{1,1}&\\&z_{1,0}&\\&&z_{2,0}\end{pmatrix}$$

となることを意味する. よって付加条件 (49) をみたす一般 WDVV 方程式の解から構成される多変数一般大久保型方程式は, (51) のモノドロミ保存変形と同値である. □

Painlevé I 以外の他の Painlevé 方程式についても同様の記述が可能なので結果のみ述べる:

PIV　Theorem 5.1 の一般 WDVV 方程式において $N=3$ として付加条件

$$\left(-(1+w_j-w_i)\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1\le i,j\le 3}\sim\begin{pmatrix}z_{1,0}&z_{1,1}&z_{1,2}\\&z_{1,0}&z_{1,1}\\&&z_{1,0}\end{pmatrix}$$

を課したものが Painlevé IV と同値.

PIII　Theorem 5.1 の一般 WDVV 方程式において $N=4$ として付加条件

$$\left(-(1+w_j-w_i)\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1\le i,j\le 4}\sim\begin{pmatrix} z_{1,0} & z_{1,1} & & \\ & z_{1,0} & & \\ & & z_{2,0} & z_{2,1} \\ & & & z_{2,0}\end{pmatrix}$$

を課し, かつ weight について $w_1=w_2, w_3=w_4$ という条件を課したものが Painlevé III に同値.

PII　Theorem 5.1 の一般 WDVV 方程式において $N=4$ として付加条件

$$\left(-(1+w_j-w_i)\frac{\partial g_j}{\partial t_i}\right)_{1\le i,j\le 4}\sim\begin{pmatrix} z_{1,0} & z_{1,1} & z_{1,2} & z_{1,3} \\ & z_{1,0} & z_{1,1} & z_{1,2} \\ & & z_{1,0} & z_{1,1} \\ & & & z_{1,0}\end{pmatrix}$$

を課し, かつ weight について $w_1=w_2, w_3=w_4$ という条件を課したものが Painlevé II に同値.

Remark 5.2. PV および PIV と bi-flat F-manifold の対応は [2] によって与えられた.

なお Painlevé I については一般大久保型の形に書いた時 regular にならないので, 現状の枠組みでは取り扱うことができない.

References

[1] A. Arsie and P. Lorenzoni: From Darboux-Egorov system to bi-flat F-manifolds, Journal of Geometry and Physics, **70**, (2013), 98-116.

[2] A. Arsie and P. Lorenzoni: F-manifolds, multi-flat structures and Painlevé transcendents, arXiv:1501.06435

[3] L. David and C. Hertling: Regular F-manifolds: initial conditions and Frobenius metrics, arXiv:1411.4553.

[4] B. Dubrovin: Geometry of 2D topological field theories. In:Integrable systems and quantum groups. Montecatini, Terme 1993 (M. Francoviglia, S. Greco, eds.) Lecture Notes in Math. 1620, Springer-Verlag 1996, 120-348.

[5] M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno: Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. Physica 2D (1981), 306-352.

[6] M. Kato, T. Mano and J. Sekiguchi: Flat structure on the space of isomonodromic deformations. arXiv:1511.01608

[7] H. Kawakami: Generalized Okubo systems and the middle convolution. Doctor thesis, Univ. of Tokyo, 2009.

[8] H. Kawakami: Generalized Okubo Systems and the Middle Convolution. Int. Math. Res. Not. **2010**, no.17 (2010), 3394-3421.

[9] H. Kawakami and T. Mano: Regular flat structure and generalized Okubo system, in preparation.

[10] Y. Konishi and S. Minabe: Local quantum cohomology and mixed Frobenius structure, arXiv:1405.7476.

[11] P. Lorenzoni: Darboux-Egorov system, bi-flat F-manifolds and Painlevé VI, IMRN (2014), Vol. 12, 3279-3302.

[12] Y. Manin: F-manifolds with flat structure and Dubrovin's duality, Adv. Math. **198** no. 1, (2005), 5-26.

[13] C. Sabbah: *Isomonodromic Deformations and Frobenius Manifolds. An Introduction.* Universitext. Springer