

特異有理曲線から構成される KP 階層の解について

津田塾大学数学科 中屋敷 厚*

Department of Mathematics, Tsuda University

1 はじめに

KP 階層のソリトン解の共鳴現象に関する児玉裕二らの研究 [4, 5] は、KP 階層の解についてまだいろいろ解明されるべきことがあることを示唆している。Krichever の理論により非特異代数曲線から KP 階層の解が構成される。伊達は通常 2 重点と呼ばれる特異点を持つ有理曲線の場合に Krichever の方法を拡張しソリトン解が構成できることを示した [9]。得られるソリトン解は薩摩のソリトン解 [3] と一致する。佐藤は薩摩のソリトン解よりも広いクラスのソリトン解を得ている [8]。これは現在ではロンスキアンの方法により構成できることが知られている [3, 4]。児玉らの扱ったソリトン解は佐藤のソリトン解である。Abenda と Grinevich は実・非特異な佐藤のソリトン解に対応する特異有理曲線を構成した [2]。その構成は位相的なもので、超楕円曲線の場合 [1] を除いて、非特異な代数曲線とそれに対応する代数幾何解（準周期解）が特異有理曲線と佐藤ソリトンに退化する、という具合にはできていない。

ここでは代数幾何解を退化させるという観点から、具体的な特異有理曲線に対応する KP 階層の解を調べる。講演では (n, s) 曲線と呼ばれる代数曲線についても述べたが、ここでは $n = 3$ の場合に話を限ることにする。

この研究では佐藤グラスマン (UGM、普遍グラスマン多様体) を積極的に使う。理由は、佐藤グラスマンを使うことにより解の代数曲線への依存性がよくわかるからである。

本稿に関するより詳しい内容は [7] をご覧ください。

2 佐藤グラスマン

佐藤グラスマン (UGM) の点と KP 階層の解との対応について簡単に説明する。

$V = \mathbb{C}((z))$ を形式的ローラン級数のなすベクトル空間とし、 $V_\phi = \mathbb{C}(z^{-1})$ と $V_0 = z\mathbb{C}[[z]]$ をその部分空間とする。このとき直和分解

$$V = V_\phi \oplus V_0$$

*e-mail: atsushi@tsuda.ac.jp

が成り立つ. π を V から $V/V_0 \simeq V_\phi$ への自然な射影とする. UGM は V の部分空間 U であって $\dim \text{Ker}(\pi|_U) = \dim \text{Coker}(\pi|_U) < \infty$ を満たすものの集合として定義される. ここで

$$f_a = z^{a+1}, \quad a \in \mathbb{Z},$$

とおき V の元 f を

$$f = \sum_{a \in \mathbb{Z}} X_a f_a. \quad (1)$$

と表す. このとき f に対してベクトル $(X_a)_{a \in \mathbb{Z}}$ を対応させる. これにより UGM の点 U の枠 (U の基底を並べたもの) は行列として記述することが出来るが、その中で特別なものを考える.

整数の減少列 $M = (m_1, m_2, \dots)$, $m_1 > m_2 > \dots$, で $m_j = -j + p$ が十分大きなすべての j に対して成り立つものをチャージ p のマヤ図形という. 以下ではチャージ 0 のマヤ図形を単にマヤ図形という. マヤ図形と分割とは

$$\mu = (m_1 + 1, m_2 + 2, \dots),$$

により 1 対 1 に対応する.

さて UGM の点 U に対してマヤ図形 $M = M(U) = (m_1, m_2, \dots)$ が定まり、次の条件を満たす U の枠 $\xi = (X_{a,b})_{a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}}$ が存在する:

$$X_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{if } a < m_b \\ 1 & \text{if } a = m_b. \end{cases} \quad (2)$$

U に対して ξ はただ一つには決まらないが、(2) を満たす枠 ξ を任意の一つとって考える.

λ を任意の分割とし $K = (k_1, k_2, k_3, \dots)$ を対応するマヤ図形とする. U の Plucker 座標 ξ_λ を

$$\xi_\lambda = \det(X_{k_a, b})_{a, b \in \mathbb{N}}, \quad (3)$$

で定義する. これは無限次の行列式であるが (2) により実際は有限次数の行列の行列式として枠の取り方によらずに定まる.

UGM の点 U に対して $\tau(x, U)$ を

$$\tau(x, U) = \sum_{\lambda} \xi_\lambda s_\lambda(x).$$

と定める. このとき次が成り立つ.

定理 1 [10] UGM の任意の点 U に対し $\tau(x, U)$ は KP 階層の解になる. 逆に KP 階層の任意の形式的べき級数解 $\tau(x)$ に対して $\tau(x) = C\tau(x, U)$ を満たす UGM の点 U と定数 C が存在する.

3 佐藤ソリトン

$n > k$ を満たす自然数 n, k を固定し, 相異なる複素数 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ と階数 k の $n \times k$ 行列 $A = (a_{ij})$ を与える.

$I = (i_1, \dots, i_k), 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, に対し

$$\Delta_I(\lambda) = \prod_{p < q} (\lambda_{i_q} - \lambda_{i_p}), \quad A_I = \det(a_{i_p, q})_{1 \leq p, q \leq k},$$

とおく. また

$$\xi(x, \lambda) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \lambda^j, \quad \xi_i = \xi(x, \lambda_i),$$

とする. このとき佐藤ソリトンは

$$\tau(x) = \sum_{I=(i_1 < \dots < i_k)} \Delta_I(\lambda) A_I e^{\xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_k}},$$

で与えられる. 以下この解を (n, k) ソリトンと呼ぶ.

佐藤は (n, k) ソリトンに対応する UGM の点を決定している [8]. それは次を並べてできる枠で指定される:

$$z^{-(k-1)} \sum_{i=1}^n \frac{a_{ij}}{1 - \lambda_i z} \quad (1 \leq j \leq k), \quad z^{-l} \quad (l \geq k).$$

ただし $1/(1 - \lambda_i z)$ は展開

$$\frac{1}{1 - \lambda_i z} = \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_i^r z^r$$

により z のべき級数とみなす.

(n, k) ソリトンはロンスキアンを用いて表示することが出来る [3, 4].

$$f_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e^{\xi_i}, \quad 1 \leq j \leq k,$$

とおくと

$$\tau(x) = \text{Wr}(f_1, \dots, f_k) = \det(f_j^{(i-1)})_{1 \leq i, j \leq k}, \quad f^{(i)} = \frac{d^i f}{dx^i}.$$

4 (n, k) ソリトンの一般化

n, k は前の章と同じとする. r_0, r_1, \dots を非負整数で

$$r_0 + r_1 + \dots = n$$

をみたまものとし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ を次の条件を満たす 0 でない複素数とする:

$$\lambda_{r_0+\dots+r_j+l} \neq \lambda_{r_0+\dots+r_j+m} \quad j \geq 1, 1 \leq l \neq m \leq r_{j+1}$$

また $i \geq 0$ に対し

$$\mathbf{v}^{(i)}(\lambda, z) = \frac{d^i}{d\lambda^i} \frac{1}{1-\lambda z} = \frac{i! z^i}{(1-\lambda z)^{i+1}},$$

と定義する.

$n \times k$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対し次のような有理関数の組を考える:

$$z^{-(k-1)} \left(\sum_{i=1}^{r_0} a_{ij} \mathbf{v}^{(0)}(\lambda_i, z) + \sum_{i=r_0+1}^{r_0+r_1} a_{ij} \mathbf{v}^{(1)}(\lambda_i, z) + \dots \right) \quad (1 \leq j \leq k),$$

$$z^{-l} \quad (l \geq k).$$

最初の k 個の関数が一次独立ならばこれらの有理関数の組は UGM の枠を定める. この枠を (n, k) GSF (generalized soliton frame) と呼ぶ. 1 以上のすべての i に対して $r_i = 0$ の場合は (n, k) ソリトンの枠になる.

5 (n, k) GSF に対応する解

(n, k) GSF に対応する解もロンスキアンを用いて書くことが出来る.

$f = e^{\xi(x, \lambda)}$ は

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = \frac{\partial^j f}{\partial x_1^j}$$

をみたま. x_j に関する微分と、 λ に関する微分は可換なので、KP 階層の解のロンスキアン構成で f の代わりに f の λ に関する微分を用いることが出来る (これは [3] でも指摘されている).

(n, k) GSF に対応する解は

$$f_j = \sum_{i=1}^{r_0} a_{ij} e^{\xi(x, \lambda_i)} + \sum_{i=r_0+1}^{r_0+r_1} a_{ij} \left(\frac{d}{d\lambda} e^{\xi(x, \lambda)} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_i} + \dots$$

とすると

$$\tau(x) = \text{Wr}(f_1, \dots, f_k)$$

で与えられる.

6 基底の変換

$\lambda \neq 0$ とする. GSF に対応する解を計算するのに $1/(1-\lambda z)^r$ を $\mathbf{v}^{(r)}(\lambda, z)$ たちの 1 次結合で表す必要がしばしば生じる. その公式は次で与えられる:

$$\frac{1}{(1-\lambda z)^{m+1}} = \sum_{i=0}^m \frac{1}{i!} \binom{m}{i} \lambda^i \mathbf{v}^{(i)}(\lambda, z).$$

$m = 0, 1$ の場合は

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\lambda z} &= \mathbf{v}^{(0)}(\lambda, z), \\ \frac{1}{(1-\lambda z)^2} &= \mathbf{v}^{(0)}(\lambda, z) + \lambda \mathbf{v}^{(1)}(\lambda, z). \end{aligned}$$

となる. これを使うと次の式が成り立つことが分かる:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{1-\lambda_i z} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{(1-\lambda_i z)^2} \\ &= \left[\mathbf{v}^{(0)}(\lambda_1, z), \dots, \mathbf{v}^{(0)}(\lambda_n, z), \mathbf{v}^{(1)}(\lambda_1, z), \dots, \mathbf{v}^{(1)}(\lambda_n, z) \right] \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \\ \lambda_1 b_1 \\ \vdots \\ \lambda_n b_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

7 (n, k) GSF と対応する解の例

$a_{ij}, b_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq k$ を複素数とする. 次の有理関数の組は, 最初の k 個の関数が 1 次独立ならば $(2n, k)$ GSF を与える.

$$\begin{aligned} &z^{-k+1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{ij}}{1-\lambda_i z} + \frac{b_{ij}}{(1-\lambda_i z)^2} \right) \quad (1 \leq j \leq k) \\ &z^{-i} \quad (i \geq k) \end{aligned} \tag{4}$$

GSF の定義に現れた行列 A は次で与えられる $2n \times k$ 行列である.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1k} + b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & \dots & a_{nk} + b_{nk} \\ \lambda_1 b_{11} & \dots & \lambda_1 b_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n b_{n1} & \dots & \lambda_n b_{nk} \end{pmatrix}$$

解を書き下すために k 成分のベクトル $\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k$ を次で定義する :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k(\lambda) &= (\lambda^{i-1})_{1 \leq i \leq k} \\ \mathbf{w}_k(\lambda) &= (i\lambda^{i-1} + \lambda^i \xi'(x, \lambda))_{1 \leq i \leq k}, \quad \xi'(x, \lambda) = \frac{d\xi(x, \lambda)}{d\lambda} = \sum_{j=1}^{\infty} j\lambda^{j-1} x_j. \end{aligned}$$

$k \times 2n$ 行列 D を

$$D = (\mathbf{v}_k(\lambda_1), \dots, \mathbf{v}_k(\lambda_n), \mathbf{w}_k(\lambda_1), \dots, \mathbf{w}_k(\lambda_n))$$

で定める. このとき解は

$$\tau(x) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} A_{i_1, \dots, i_k} D_{i_1, \dots, i_k} e^{\xi_{i_1} + \dots + \xi_{i_k}} \quad (5)$$

と表される. ただし A_I, D_I は A, D の小行列式である ($I = (i_1, \dots, i_k)$ は A の行、 D の列を指定する). D_I は一般には $x_j, j \geq 1$ の多項式である. 又 $\xi_{n+j} = \xi_n, 1 \leq j \leq n$ とする.

8 代数曲線と佐藤グラスマン

ここで代数曲線と佐藤グラスマンの点との対応について簡単に説明する.

X を種数 g のコンパクトリーマン面、 p_∞ をその上の点、 z を p_∞ のまわりの局所座標とする. U_a を p_∞ にのみ高々極をもつ X 上の有理型関数のなすベクトル空間とする. U_a は $X \setminus \{p_\infty\}$ のアフィン環と呼ばれる (環にもなっている). U_a の元 F を p_∞ のまわりで局所座標 z に関してローラン展開したものを $F(z)$ と書く. このとき

U_a の V への埋め込み写像 $\iota: U_a \rightarrow V$ を以下のように定義する.

$$\iota(F) = z^g F(z).$$

このとき $\iota(U_a)$ は UGM の点になることが知られている [6].

9 $(3, 3m+1)$ 曲線

m を正の整数とし $\lambda_1, \dots, \lambda_{3m+1}$ 複素数で $\lambda_1^3, \dots, \lambda_{3m+1}^3$ は互いに異なるものとする. このとき

$$y^3 = \prod_{j=1}^{3m+1} (x - \lambda_j^3).$$

で定義される代数曲線を考える. これは無限遠に 1 点 (∞ と書く) を付け加えることによりコンパクト化でき、種数 $g = 3m$ のコンパクトリーマン面になることが知られている. これを $(3, 3m+1)$ 曲線とよび X と書く.

$X \setminus \{\infty\}$ のアフィン環 U_a のベクトル空間としての基底は

$$x^i, x^i y, x^i y^2 \quad (i \geq 0) \quad (6)$$

で与えられる。

∞ における局所座標として $x = 1/z^3$ となるものをとると, U_a に対応する KP 階層の解は種数 g のシグマ関数を用いて次のように書くことが出来る [6]:

$$\tau(x) = e^{\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i + 1/2 \sum_{i,j=0}^{\infty} \hat{q}_{ij} x_i x_j} \sigma((k_{ij})x)$$

この公式に現れるすべての定数 $c_i, \hat{q}_{ij}, k_{ij}$ とシグマ関数のテイラー展開の係数はすべて定義方程式の多項式で、特に方程式を退化させるとき、極限を持つ。

10 (3, 3m + 1) 曲線の退化

(3, 3m + 1) 曲線で $\lambda_{j+m}, \lambda_{j+2m} \rightarrow \lambda_j, 1 \leq j \leq m, \lambda_{3j+1} \rightarrow 0$ という極限を考えると

$$y^3 = x \prod_{j=1}^m (x - \lambda_j^3)^3, \quad x = z^{-3} \quad (7)$$

となる。ここでさらに $\lambda_j^3, 1 \leq j \leq m$ はゼロでなく互いに異なると仮定する。この曲線は $Q_j = (\lambda_j^3, 0)$ 通常3重点とよばれる特異点を持つ。以下この特異有理曲線を Y と呼ぶ。これも $x = \infty$ に対応する1点 (∞ と書く) を付け加えることによりコンパクト化出来る。

$X \setminus \{\infty\}$ のアフィン環 U_a の基底 (6) の極限は $Y \setminus \{\infty\}$ のアフィン環 $U_{a, \text{sing}}$ の基底になる。その基底を取り直して GSF とつなげることが出来る。それを説明する。

今

$$f(z) = \prod_{j=1}^n (1 - \lambda_j^3 z^3), \quad \omega = \exp(2\pi i/3)$$

とおくと、次は $f(z)^{-2} \iota(U_{a, \text{sing}})$ の基底となることが証明できる ($1 \leq j \leq m, r = 1, 2$):

$$\begin{aligned} z^{-3m+1} \frac{z^{6m+2-3j}}{f(z)^2} &= z^{-3m+1} \left\{ \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{ij}^{(0)}}{1 - \lambda_i z} + \frac{b_{ij}^{(0)}}{(1 - \lambda_i z)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{i+m,j}^{(0)}}{1 - \omega \lambda_i z} + \frac{b_{i+m,j}^{(0)}}{(1 - \omega \lambda_i z)^2} \right) + \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{i+2m,j}^{(0)}}{1 - \omega^2 \lambda_i z} + \frac{b_{i+2m,j}^{(0)}}{(1 - \omega^2 \lambda_i z)^2} \right) \right\}, \\ z^{-3m+1} \frac{z^{3m+r-3j}}{f(z)} &= z^{-3m+1} \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{ij}^{(r)}}{1 - \lambda_i z} + \frac{a_{i+m,j}^{(r)}}{1 - \omega \lambda_i z} + \frac{a_{i+2m,j}^{(r)}}{1 - \omega^2 \lambda_i z} \right), \quad r = 1, 2. \\ &z^{-l} \quad (l \geq 3m). \end{aligned}$$

ここで $a_{ij}^{(0)}$ 等の定数は次で与えられる:

$$\begin{aligned} a_{ij}^{(0)} &= - \left(2m - j + 2 \sum_{l \neq i}^m \frac{\lambda_l^3}{\lambda_i^3 - \lambda_l^3} \right) \frac{\lambda_i^{3j-8}}{3 \prod_{l \neq i} (\lambda_i^3 - \lambda_l^3)^2}, \\ a_{i+m,j}^{(0)} &= \omega a_{ij}^{(0)}, \quad a_{i+2m,j}^{(0)} = \omega^2 a_{ij}^{(0)}, \end{aligned}$$

$$b_{ij}^{(0)} = \frac{\lambda_i^{3j-8}}{9 \prod_{l \neq i} (\lambda_i^3 - \lambda_l^3)^2}, \quad b_{i+m,j}^{(0)} = \omega b_{ij}^{(0)}, \quad b_{i+2m,j}^{(0)} = \omega^2 b_{ij}^{(0)},$$

$$a_{ij}^{(r)} = \frac{\lambda_i^{3j-3-r}}{3 \prod_{l \neq i} (\lambda_i^3 - \lambda_l^3)}, \quad a_{i+m,j}^{(r)} = \omega^r a_{ij}^{(r)}, \quad a_{i+2m,j}^{(r)} = \omega^{2r} a_{ij}^{(r)}.$$

(4) と比較すると $f(z)^{-2} \iota(U_{a, \text{sing}})$ は $(6m, 3m)$ GSF を定めることが分かる. $f(z)^{-2} \iota(U_{a, \text{sing}})$ は $\iota(U_{a, \text{sing}})$ のゲージ変換であり, $\iota(U_{a, \text{sing}})$ に対応する解は $f(z)^{-2} \iota(U_{a, \text{sing}})$ に対応する解に $\exp(\sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i)$, c_i は定数, のかたちの関数を掛けて得られる.

11 種数 3 の場合

種数 $3(m=1)$ の場合に $f(z)^{-2} \iota(U_{a, \text{sing}})$ に対応する解を具体的に与える.

この場合は

$$a_{1,1}^{(0)} = -\frac{\lambda_1^{-5}}{3}, \quad a_{1,1}^{(1)} = \frac{\lambda_1^{-1}}{3}, \quad a_{1,1}^{(2)} = \frac{\lambda_1^{-2}}{3}, \quad b_{1,1}^{(0)} = \frac{\lambda_1^{-5}}{9}.$$

となる. $r=0, 1, 2$ に対し

$$\eta_r = \sum_{j \geq 1, j \equiv r \pmod{3}} x_j \lambda_1^j, \quad \eta'_r = \frac{d\eta_r}{d\lambda_1} = \sum_{j \geq 1, j \equiv r \pmod{3}} j x_j \lambda_1^{j-1},$$

とおくと, (5) を計算することにより解は次で与えられる:

$$\tau(x) = \frac{\sqrt{3}}{27} \lambda_1^{-5} e^{3\eta_0} \left\{ 2e^{\frac{3}{2}(\eta_1 + \eta_2)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta_1 - \eta_2) + \frac{2\pi}{3} \right) \right. \\ \left. + 2e^{-\frac{3}{2}(\eta_1 + \eta_2)} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\eta_1 - \eta_2) - \frac{2\pi}{3} \right) - 2 \sin \left(\sqrt{3}(\eta_1 - \eta_2) \right) - 3\sqrt{3} \lambda_1 \eta'_2 \right\}.$$

この式から λ_1 とすべての x_j が実数であれば $\tau(x)$ は実であることが分かる. また $e^{3\eta_0}$ 以外の項は x_{3j} によらないので $\tau(x)$ は 3 簡約 KP 階層の解になっていることも分かる. 非特異な $(3, s)$ 曲線のアフィン環が 3 簡約 KP 階層の解を与えることは分かっているので [6], これは具体的に計算するまでもなくわかっていることである.

References

- [1] S. Abenda, On a family of KP multi-line solitons associated to rational degenerations of real hyperelliptic curves and to the finite non-periodic Toda hierarchy, arXiv:1605.00995.

- [2] S. Abenda and P. Grinevich, Rational degenerations of M-curves, totally positive Grassmannians and KP-solitons, arXiv: 1506.00563.
- [3] 広田 良吾, 直接法によるソリトンの数理, 岩波書店 (1992) .
- [4] Y. Kodama, Solitons in two-dimensional water waves and applications to Tsunami, Lecture note of the conference held at University of Texas at Pan American, May 20-24, 2013.
- [5] Y. Kodama and L. Williams, KP solitons and total positivity for the Grassmannian, *Invent. math.* **198** (2014), 637-699.
- [6] A. Nakayashiki, Sigma function as a tau function, *IMRN* **2010-3** (2010), 373-394.
- [7] A. Nakayashiki, Degeneration of (n,s) curves and Sato Grassmannian, in preparation.
- [8] 佐藤幹夫, 佐藤幹夫講義録 (梅田亨記) , 数理解析レクチャー・ノート 5, 数理解析レクチャー・ノート刊行会, 1989.
- [9] 田中俊一, 伊達悦郎, KdV 方程式, 紀伊国屋数学叢書 16, 紀伊国屋書店 (1982).
- [10] M. Sato and Y. Sato, Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional Grassmann manifold, *Nolinear Partial Differential Equations in Applied Sciences*, P.D. Lax, H. Fujita and G. Strang (eds.), North-Holland, Amsterdam, and Kinokuniya, Tokyo, 1982, 259-271.