

ある剰余環のレッドモンドグラフと完全二部グラフ

—教育系教科専門科目の教材の素材—

愛知教育大学名誉教授 金光三男

Mitsuo Kanemitsu

Professor Emeritus, Aich University of Education

1. はじめに

教育系の大学生が、追体験も含めて創造的で意欲的に数学の課題解決をするのに適切な内容を、グラフ理論の内容から選んでみる. [8, Redmond(2003)] に定義されているイデアルを基礎とする零因子グラフで、特別の場合である整数環の剰余環 \mathbb{Z}_n を考察する. この剰余環のイデアルを基礎とする零因子グラフにおいて、このグラフが完全二部グラフになる n を考察する. そして、教科専門の授業に適用できる素材の作成を試みる. ここでは、 $n=33, 34, 35$ でこの問題を考える. $33, 34$ 及び 35 は3つとも二つの素数の積である. このグラフから規則性や課題を見つけ追体験でもよいから探索する.

2. レッドモンドのグラフの定義

完全二部グラフ $K_{m,n}$ とは m 個の頂点グループと n 個の頂点グループがあり、異なるグループのすべての2頂点間に辺がある二部グラフ (ここで二部グラフとは頂点が2つのグループに分けられ、同じグループの頂点同士は辺で結ばれていないグラフのこと) のことである (例えば, [7, 小林 (2013)]).

定義 ([8, S.P. Redmond (2003)]). R は単位元 1 を持つ可換環とする. R のイデアル I に対して下記のように定義したグラフ $\Gamma_I(R) = (V, E)$ を、イデアル I を基礎とするレッドモンドの零因子グラフ (以後、略してレッドモンド (の零因子) グラフ) という.

頂点集合 $V = \{ a \in R - I \mid ab \in I \text{ for some } b \in R - I \}$.

辺集合 $E = \{ [x, y] \mid xy \in I, x, y \in V, x \neq y \}$.

〈約束〉 整数環 \mathbb{Z} の剰余環 \mathbb{Z}_n の元 \bar{a} は (前後関係から判断できるので), \bar{a} を単に a と書く約束をする. 従って, $\mathbb{Z}_n = \{ 0, 1, 2, \dots, n-2, n-1 \}$ となる.

レッドモンドのグラフは, [5, 神田・金光 (2011)], [6, 神田・金光 (2012)] 及び [4, Kanemitsu(2013)] に $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ に対して $n = 30$ まで記載されている.

3. レッドモンドのグラフ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_{33})$

まず, 整数環 \mathbf{Z} のイデアル (33) による剰余環 \mathbf{Z}_{33} の単元は, オイラー数 $\varphi(33) = 33(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{11}) = 20$ 個存在する. 単元の集合 $U(\mathbf{Z}_{33})$ は,

$$\{ 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 13, 14, 16, 17, 19, 20, 23, 25, 26, 28, 29, 31, 32 \}.$$

次に, \mathbf{Z}_{33} のイデアルを求める. その単項イデアル (a) を, I_a または $I(a)$ と記す.

$$1) I_0 = I(0) = \{ 0 \} = (0).$$

$$2) I_1 = I_2 = I_4 = I_5 = I_7 = I_8 = I_{10} = I_{13} = I_{14} = I_{16} = I_{17} = I_{19} = I_{20} = I_{23} = I_{25} = I_{26} = I_{28} = I_{29} = I_{31} = I_{32} = \mathbf{Z}_{33} = (1).$$

$$3) I_3 = I_6 = I_9 = I_{12} = I_{15} = I_{18} = I_{21} = I_{24} = I_{27} = I_{30} = (3) = \{ 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30 \}.$$

$$4) I_{11} = I_{22} = \{ 0, 11, 22 \}.$$

の4個である. このことは $\mathbf{Z}_{33} = \mathbf{Z}_3 \oplus \mathbf{Z}_{11}$ で, 2つの体の直和だから, イデアルは4個である. これは上記の 1), 2), 3), 4) を見ると4個のイデアルを持つことで確認される.

定義から, 2), 3) 及び 4) のイデアルに関してはレッドモンドのグラフ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_{33})$ は存在しない. 存在するのは, $\Gamma_{I(0)}(\mathbf{Z}_{33})$ のみで, このグラフは, [2, I.Beck(1988)] の定義した零因子グラフから0を除去した [1, Anderson and Livingston(1999)] の零因子グラフと一致する.

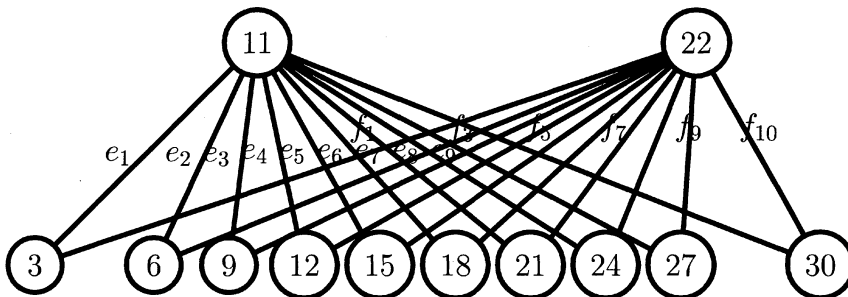


図1 レッドモンドのグラフ $\Gamma_{I(0)}(\mathbf{Z}_{33})$ [一部辺のラベル省略]

上記のグラフは、完全二部グラフである。 $\mathbf{Z}_{34}, \mathbf{Z}_{35}$ でも \mathbf{Z}_{33} と同様に完全二部グラフになる。 \mathbf{Z}_n に付随したレッドモンドのグラフは、 $n = pq$ (p, q は互いに異なる素数) のときレッドモンドのグラフは完全二部グラフになる。

4. グラフ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_{34})$.

まず、 \mathbf{Z}_{34} の単元全体の集合 $U(\mathbf{Z}_{34})$ は、群をなし単元群と呼ばれている。位数はオイラー数 $\varphi(34) = 34(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{17}) = 16$ 。すなわち、単元の個数は16個である。単元は17を除く34までの奇数全部である。

$$U(\mathbf{Z}_{34}) = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33\}.$$

次に \mathbf{Z}_{34} のイデアルは、4個である。詳しく述べると下記のようなのである。

$$I_0 = \{0\} = (0).$$

$$I_1 = I_3 = I_5 = I_7 = I_9 = I_{11} = I_{13} = I_{15} = I_{19} = I_{21} = I_{23} = I_{25} = I_{27} = I_{29} = I_{31} = I_{33} = I_{34} = \mathbf{Z}_{34} = (1).$$

$$I_2 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32\} = I_4 = I_6 = I_8 = I_{10} = I_{12} = I_{14} = I_{16} = I_{18} = I_{20} = I_{22} = I_{24} = I_{26} = I_{28} = I_{30} = I_{32} = (2).$$

$$I_{17} = \{0, 17\} = (17).$$

先と同様の理由で、レッドモンドのイデアルを基礎とするグラフ $\Gamma_{I_0}(\mathbf{Z}_{34})$ は、林であり $K_{1,16}$ の完全二部グラフである。

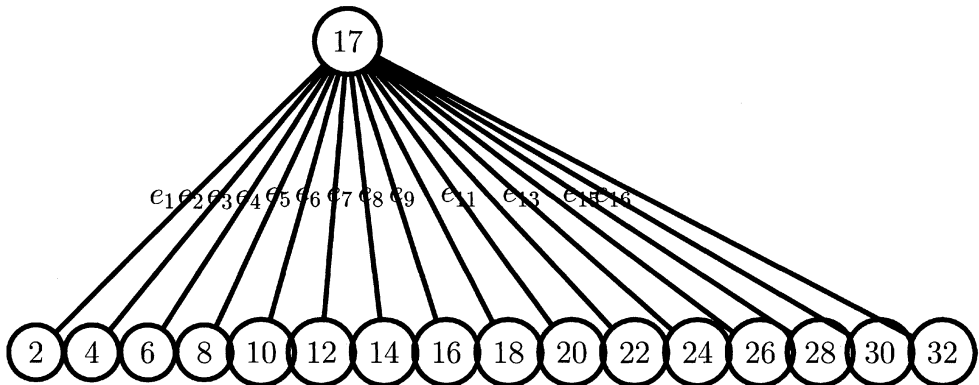


図2 グラフ $\Gamma_{I_0}(\mathbf{Z}_{34})$ [辺のラベル名の一部は省略]

5. グラフ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_{35})$

\mathbf{Z}_{35} の単元の個数は、 $\varphi(35) = 35(1 - \frac{1}{5})(1 - \frac{1}{7}) = 24$ である。それらの作る単元群 $U(\mathbf{Z}_{35})$ は、

$$\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 26, 27, 29, 31, 32, 33, 34\}$$

である。

これを考慮してイデアルを調べる。先と同様にイデアルは4個である。

$$I_0 = \{0\} = (0).$$

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4 = I_6 = I_8 = I_9 = I_{11} = I_{12} = I_{13} = I_{16} = I_{17} = I_{18} = I_{19} = I_{22} = I_{23} = I_{24} = I_{26} = I_{27} = I_{29} = I_{31} = I_{32} = I_{33} = I_{34} = \mathbf{Z}_{35} = (1).$$

$$I_5 = \{0, 5, 10, 15, 20, 25, 30\} = I_{10} = I_{15} = I_{20} = I_{25} = I_{30} = (5).$$

$$I_7 = \{0, 7, 14, 21, 28\} = I_{14} = I_{21} = I_{28} = (7).$$

この4個のイデアルでレッドモンドのグラフができるのは、 $\Gamma_{I_0}(\mathbf{Z}_{35})$ の場合のみである。

このグラフは完全二部グラフ $K_{4,6}$ である。

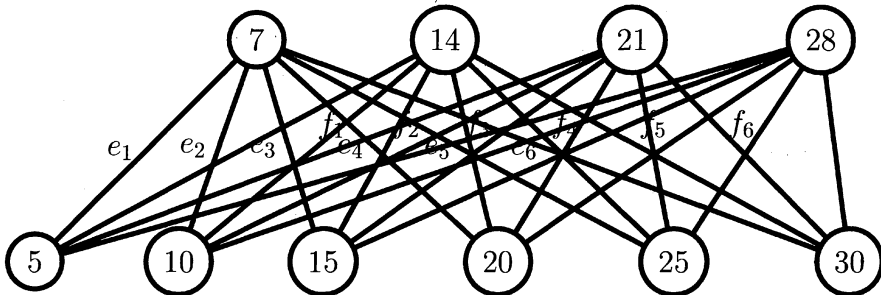


図3 グラフ $\Gamma_{I_0}(\mathbf{Z}_{35})$ [辺のラベル名の一部は省略]

このグラフの異なる4-サイクルの個数は、90個できる。また2-マッチングの個数は2倍の180個できることがグラフを整理して見るとわかる。

6. まとめ

レッドモンドの零因子グラフ $\Gamma_I(\mathbf{Z}_n)$ において、 $n = 33, 34, 35$ のときは、この n は異なる二つの素数の積である。このときは、 \mathbf{Z}_n のイデアルは4個であり、極大イデアルは2個ある。全体イデアルとこの2つの極大イデアルか

らはレッドモンドのグラフは定義できない. イデアル (0) のみがレッドモンドのグラフを作り, これは [1, Anderson and Livingston (1999)] などに定義されている零因子グラフである. 更に $n = 2p$ (p は素数で $p \neq 2$) のときは, レッドモンドのイデアルは星グラフ (星グラフとは二部グラフで $K_{1,m}$ の形をしたグラフ) になることが4節より予想される. また二部グラフの彩色数 (隣接する2頂点には異なる色を塗るというルールで, すべての頂点に色を塗り, 最低限の色の数のこと (例えば, [7, 小林 (2013)]) は2である. $K_{m,n}$ の辺彩色数 (隣接する辺には別の色を塗り, 必要な色の最少数のこと) は, $\max\{m, n\}$ である. これらのことを学生が見つけた課題・追体験をすると数学の学習意欲の喚起が期待される. ここでは零因子グラフに関して述べたが, 単元から定義される他のグラフについては, 例えば [3, Kanemitsu(2008)] を参照.

参考文献・引用文献

- [1] D.F. Anderson and P.S. Livingston, The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217** (1999), 434-447.
- [2] I.Beck, Coloring of commutative rings, *J. Algebra* **116** (1988), 208-226.
- [3] M.Kanemitsu, A note on graphs related to unit elements in Z_n , *The Global J. of Applied Mathematics and Mathematical Sciences* **1** (1)(2008), 51-52.
- [4] M.Kanemitsu, Note on some examples of the ideal-based zero-divisor graphs, *JP J. Algebra, Number Theory and Applications*, vol **30**, no.2, 2013, 115-129.
- [5] 神田隆至・金光三男, イデアルによる零因子グラフと数学教育, 広島工業大学紀要教育編, 第 **10** 巻 (2011), 27-30.
- [6] 神田隆至・金光三男, イデアルによる零因子グラフに関連する数学教育について, 広島工業大学紀要教育編, 第 **11** 巻 (2012), 17-21.
- [7] 小林みどり, あたらしいグラフ理論入門, 牧野書店, 2013.
- [8] S.P. Redmond, An ideal-based zero-divisor graph of a commutative ring, *Comm. Algebra* **31** (2003), 4425-4443.