数理解析研究所講究録
第2073巻 2018年 87-95

MATRIX WIELANDT INEQUALITY VIA THE MATRIX GEOMETRIC MEAN

大阪教育大学大学院教育学研究科　藤本　将行　(Masayuki Fujimoto)
(Department of Mathematics Education, Osaka Kyoiku University)
大阪教育大学・教育　瀬尾　祐貴　(Yuki Seo)
(Department of Mathematics Education, Osaka Kyoiku University)

ABSTRACT. 本稿では、行列幾何平均や極分解の考えを用いた新しいタイプの Wielandt inequality を紹介する。そのために、藤井の結果による行列版の Cauchy-Schwarz inequality を用い、さらに等号条件について調べた。応用として、ブロック行列を用いた Wielandt inequality も紹介する。

1. INTRODUCTION

本稿は [6] に基づいている。

$\mathbb{M}_{m\times n}=\mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$ は $m\times n$ サイズの行列全体の集合を表し、$\mathbb{M}_n$ は $\mathbb{M}_{n\times n}$ を意味する。$A\in\mathbb{M}_{m\times n}$ に対して、その絶対値を $|A|=(A^*A)^{\frac{1}{2}}$ で定義する。また、$A\in\mathbb{M}_n$ と任意の非零ベクトル $x\in\mathbb{C}^n$ に対して、$x^*Ax\geq 0$ となるとき、A は半正定値行列であるといい $A\geq 0$ と表す。同様に、$x^*Ax>0$ となるとき、A は正定値行列であるといい $A>0$ と表す。エルミート行列 $A,B\in\mathbb{M}_n$ に対して、$A-B\geq 0$ となるとき $A\geq B$ と書き、$A-B>0$ となるとき $A>B$ と書く。

$A\in\mathbb{M}_n$ は正定値行列であり、$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n>0$ はその固有値であるとする。直交している任意のベクトル $x,y\in\mathbb{C}^n$ に対して、

$$|y^*Ax|^2\leq\left(\frac{\lambda_1-\lambda_n}{\lambda_1+\lambda_n}\right)^2(x^*Ax)(y^*Ay) \tag{1.1}$$

が成立する。これを Wielandt inequality という。([7, p471] 参照) Wielandt inequality (1.1) は以下の Cauchy-Schwarz inequality よりも良い評価をしている。

$$|y^*Ax|^2\leq(x^*Ax)(y^*Ay) \tag{1.2}$$

特に、統計学の分野においては Cauchy-Schwarz inequality のみならず、Wielandt inequality もたいへん有用である。1999 年に、Wang と Ip [11] により行列版の (1.1) が与えられた。$A\in\mathbb{M}_k$ は正定値行列であり、$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k>0$ はその固有値であるとする。$X\in\mathbb{M}_{k\times m},Y\in\mathbb{M}_{k\times n}$ は $Y^*X=0$ を満たすとするとき、次の不等式が成立する。

$$X^*AY(Y^*AY)^-Y^*AX\leq\left(\frac{\lambda_1-\lambda_k}{\lambda_1+\lambda_k}\right)^2X^*AX \tag{1.3}$$

ただし、任意の行列 Z に対して、Z^- は Z の generalized inverse である。さらに、Lu [9] は (1.3) を任意の半正定値行列 A に対して成立させるように拡張した。$A\in\mathbb{M}_k$ は半正定値行列であり、$\operatorname{rank}(A)=r$ で、$\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_r>0$ はその固有値であるとする。P_A は A の値域への射影であるとし、$X\in\mathbb{M}_{k\times m},Y\in\mathbb{M}_{k\times n}$ は $Y^*P_AX=0$ を満たすとするとき、次の不等式が成立する。

$$X^*AY(Y^*AY)^-Y^*AX\leq\nu_r^2\ X^*AX$$

ただし、$r \geq 2$に対しては、$\nu_r = \frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}$であり、$\nu_1 = 0$である。Drury ら [2] は以下のような、行列のランクと正定値性に関する興味深い結果を示している。$A \in \mathbb{M}_n$ は $\mathrm{rank}(A) = r$ となるような半正定値行列であり、次のようなブロック行列であるとする。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ただし、$A_{11} \in \mathbb{M}_p, A_{22} \in \mathbb{M}_q$ である。もし、$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(A_{11}) + \mathrm{rank}(A_{22})$ ならば、

$$A_{12}A_{22}^{-}A_{21} \leq \nu_r^2 A_{11} \tag{1.4}$$

が成立する。ただし、$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ は A の固有値である。

本稿においては、行列幾何平均や極分解の考えを用いることによって、行列版の Wielandt inequality (1.1) を紹介する。そのために、藤井 [4] に基づいた、Marshall と Olkin [10] とは異なるタイプの行列版の Cauchy-Schwarz inequality を紹介する。その応用として、ランク条件を仮定したブロック行列における新しいタイプの Wielandt inequality (1.4) を紹介する。

2. Matrix Cauchy-Schwarz inequality

$A, B \in \mathbb{M}_n$ は正定値行列であるとする。このとき、行列幾何平均 $A \sharp B$ は次で定義される。[1, 8]

$$A \sharp B = A^{1/2}\left(A^{-1/2}BA^{-1/2}\right)^{1/2}A^{1/2} \tag{2.1}$$

行列幾何平均の単調性により、次のように $A \sharp B$ を定義することによって、半正定値行列 A, B に対しても、行列幾何平均を考えることができる。

$$A \sharp B = \lim_{\varepsilon \downarrow 0}(A + \varepsilon I) \sharp (B + \varepsilon I)$$

行列幾何平均に関する便利な性質を以下に紹介する。

Lemma 2.1. *Let A, B, C and D be positive semidefinite matrices.*

(i) *Consistency with scalars: If A and B commute, then $A \sharp B = A^{1/2}B^{1/2}$;*
(ii) *Monotonicity: $A \leq C$ and $B \leq D \implies A \sharp B \leq C \sharp D$;*
(iii) *Transformer inequality: $T^*(A \sharp B)T \leq T^*AT \sharp T^*BT$ for every matrix T and the equality holds for nonsingular T;*
(iv) *Symmetry: $A \sharp B = B \sharp A$;*
(v) *Arithmetic-geometric mean inequality: $A \sharp B \leq \frac{1}{2}(A + B)$.*

行列幾何平均の観点から、$X, Y \in \mathbb{M}_{k \times n}$ に対して、以下のような行列版の Cauchy-Schwarz inequality が成立すると予測できる。

$$|Y^*X| \leq X^*X \sharp Y^*Y$$

しかし、これは一般には不成立である。

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とすると、$|Y^*X| = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ であり、$X^*X \sharp Y^*Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であることから、$|Y^*X| \not\leq X^*X \sharp Y^*Y$ となってしまう。

次に、Moore-Penrose generalized inverse について紹介する。$A \in \mathbb{M}_{k \times n}$ に対して、$AA^{-}A = A$ を満たすような A^{-} を A の generalized inverse と呼んだ。さらに条件を加

え、$A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$, $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$,$(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$ を満たすような $A^\dagger \in \mathbb{M}_{n\times k}$ が唯一存在し、それを Moore-Penrose generalized inverse という。また、$P_A = A(A^*A)^\dagger A^*$ となることも注意しておく。そして、任意の実数 p に対して $(A^\dagger)^p = (A^p)^\dagger$ も成立する。一般に、Moore-Penrose generalized inverse を用いた次の不等式が成立する。([5] 参照)

$$A \sharp B \leq A^{1/2}((A^{1/2})^\dagger B(A^{1/2})^\dagger)^{1/2}A^{1/2}$$

しかし、核に関する条件を加えることにより、次のような、行列幾何平均 (2.1) の別な表現方法を考えることができる。

Lemma 2.2. *Let A and B be positive semidefinite matrices in $\mathbb{M}_n$. If* $\ker A \subseteq \ker B$, *then*

$$A \sharp B = A^{1/2}\left((A^{1/2})^\dagger B(A^{1/2})^\dagger\right)^{1/2} A^{1/2}.$$

Proof. If rank(A)=n, then A is nonsingular and $A^\dagger = A^{-1}$. If rank$(A) = r < n$, then there exists a unitary matrix U in $\mathbb{M}_n$ such that $A = U(A_r \oplus 0)U^*$ where A_r in $\mathbb{M}_r$ is positive definite. Since the kernel condition $\ker A \subseteq \ker B$ holds, there exists a positive semidefinite B_r in $\mathbb{M}_r$ such that $B = U(B_r \oplus 0)U^*$. By the definition of the Moore-Penrose generalized inverse, we have $A^\dagger = U(A_r^{-1} \oplus 0)U^*$. Then it follows that

$$\begin{aligned}
A \sharp B &= U(A_r \oplus 0)U^* \sharp U(B_r \oplus 0)U^* \\
&= U((A_r \oplus 0) \sharp (B_r \oplus 0))U^* \quad \text{by transeformer equality (iii) in Lemma 2.1} \\
&= U((A_r \sharp B_r) \oplus 0)U^* \\
&= U((A_r^{1/2}(A_r^{-1/2}B_rA_r^{1/2})^{1/2}A_r^{-1/2}) \oplus 0)U^* \\
&= U(A_r^{1/2} \oplus 0)((A_r^{-1/2} \oplus 0)(B_r \oplus 0)(A_r^{-1/2} \oplus 0))^{1/2}(A_r^{1/2} \oplus 0)U^* \\
&= A^{1/2}((A^{1/2})^\dagger B(A^{1/2})^\dagger)^{1/2}A^{1/2}.
\end{aligned}$$

□

次の補題は核の包含関係を仮定したときに、行列幾何平均を容易に求めることができる場合があることを主張している。これは目的の不等式を導くために重要な結果である。

Lemma 2.3. *Let A and B be positive semidefinite matrices in $\mathbb{M}_n$. If* $\ker A \subseteq \ker BA^\dagger B$, *then $A \sharp BA^\dagger B = P_ABP_A$ where P_A is the orthogonal projection on the column space of A. In addition, if* $\ker A \subseteq \ker B$, *then $A \sharp BA^\dagger B = B$.*

Remark 2.4. *If positive semidefinite A and B satisfy the condition* $\ker A \subseteq \ker B$, *then it follows that $A \sharp BA^\dagger B = B$ because* $\ker A \subseteq \ker B$ *implies* $\ker A \subseteq \ker BA^\dagger B$.

次の補題では核の包含関係を仮定したときの行列幾何平均の特殊な性質について述べている。

Lemma 2.5. *Let A, B and C be positive semidefinite matrices in $\mathbb{M}_n$ with a kernel condition* $\ker A \subseteq \ker B \cap \ker C$. *If $A \sharp B = A \sharp C$, then $B = C$.*

藤井 [4] に基づき、行列幾何平均と極分解の考えを用いて、行列版の Cauchy-Schwarz inequality を以下で紹介している。この不等式における等号条件はベクトルの場合のそれを踏襲し、核の包含関係を仮定した上で２つの行列が一次従属の場合にのみ等号が成立すると解釈することができる。

Lemma 2.6. *Let X and Y be two matrices in $\mathbb{M}_{k\times n}$ and $U \in \mathbb{M}_n$ a unitary matrix in a polar decomposition of $Y^*X = U|Y^*X|$. Then*

$$|Y^*X| \leq X^*X \sharp U^*Y^*YU \tag{2.2}$$

and

$$|X^*Y| \leq UX^*XU^* \sharp Y^*Y. \tag{2.3}$$

Under the assumption $\ker X \subseteq \ker YU$ *(resp.* $\ker Y \subseteq \ker XU^*$*), the equality in* (2.2) *(resp. the equality in* (2.3)*) holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_n$ *such that* $YU = XW$ *(resp.* $XU^* = YW$*).*

次の結果は、補題2.6の一般化である。X, Yのサイズが異なっていた場合であっても、長方形型の行列に対する極分解 ([7, p.471]) の考えを用いることにより、補題2.6と同様の手法で、不等式を導くことができる。X, Yの内、サイズの小さい方に適宜0を加えることによってサイズを揃え、補題2.6に帰着させることがポイントである。

Corollary 2.7. *Let* X *be a matrix in* $\mathbb{M}_{k\times m}$ *and* Y *in* $\mathbb{M}_{k\times n}$*.*

(i) *If* $m < n$*, then*

$$|Y^*X| \leq X^*X \sharp U^*Y^*YU, \tag{2.4}$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times m}$ *has orthonormal columns such that* $Y^*X = U|Y^*X|$*.*

(ii) *If* $m > n$*, then*

$$|X^*Y| \leq U^*X^*XU \sharp Y^*Y, \tag{2.5}$$

in which $U \in \mathbb{M}_{m\times n}$ *has orthonormal columns such that* $X^*Y = U|X^*Y|$*.*

Under the assumption $\ker X \subseteq \ker YU$ *(resp.* $\ker Y \subseteq \ker XU$*), the equality in* (2.4) *(resp. the equality in* (2.5)*) holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_m$ *(resp.* $W \in \mathbb{M}_n$*) such that* $YU = XW$ *(resp.* $XU = YW$*).*

Proof. We only show (2.4). Let $X' = (X\ 0) \in \mathbb{M}_{k\times n}$ and $U' = (U\ V) \in \mathbb{M}_n$, where $V \in \mathbb{M}_{n\times(n-m)}$ has orthonormal columns such that U' is a unitary matrix. It follows from Lemma 2.6 that $|Y^*X'| \leq X'^*X' \sharp U'^*Y^*YU'$. Let P be $\begin{pmatrix} I_m \\ 0 \end{pmatrix}$ and by the transformer inequality (iii) of Lemma 2.1, we can get

$$|Y^*X| = P^*|Y^*X'|P \leq P^*(X'^*X' \sharp U'^*Y^*YU')P \leq X^*X \sharp U^*Y^*YU.$$

To see the equality condition in (2.4), note that $\ker X \subseteq \ker YU$ is equivalent to $\ker X'P \subseteq \ker YU'P$. Then it follows that

$$\begin{aligned} |Y^*X| = X^*X \sharp U^*Y^*YU &\Leftrightarrow |Y^*X'P| = P^*X'^*X'P \sharp P^*U'^*Y^*YU'P \\ &\Leftrightarrow YU'P = X'PW \text{ for some } W \in \mathbb{M}_m \\ &\Leftrightarrow YU = XW \text{ for some } W \in \mathbb{M}_m. \end{aligned}$$

□

系2.7により、行列版の (1.2) を得る。

Theorem 2.8. *Let* A *be a positive semidefinite matrix in* $\mathbb{M}_k$*,* X, Y *in* $\mathbb{M}_{k\times n}$*. Then*

$$|Y^*AX| \leq X^*AX \sharp U^*Y^*AYU \tag{2.6}$$

and

$$|X^*AY| \leq UX^*AXU^* \sharp Y^*AY, \tag{2.7}$$

in which $U \in \mathbb{M}_n$ *is a unitary matrix such that* $Y^*AX = U|Y^*AX|$*.*

Under the assumption $\ker AX \subseteq \ker AYU$ *(resp.* $\ker AY \subseteq \ker AXU^*$*), the equality in* (2.6) *(resp. the equality in* (2.7)*) holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_m$ *(resp.* $W \in \mathbb{M}_n$*) such that* $AYU = AXW$ *(resp.* $AXU^* = AYW$*).*

Remark 2.9. *Even if* X *and* Y *are of different size in Theorem 2.8, then we can get similar inequalities and their equality conditions by Corollary 2.7. As a matter of fact, suppose that* $X \in \mathbb{M}_{k\times m}$ *and* $Y \in \mathbb{M}_{k\times n}$.

(i) *If* $m < n$*, then*

$$|Y^*AX| \leq X^*AX \sharp U^*Y^*AYU,$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times m}$ *has orthonormal columns such that* $Y^*AX = U|Y^*AX|$.

Under the assumption $\ker AX \subseteq \ker AYU$*, the equality holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_m$ *such that* $AYU = AXW$.

(ii) *If* $m > n$*, then*

$$|X^*AY| \leq U^*X^*AXU \sharp Y^*AY,$$

in which $U \in \mathbb{M}_{m\times n}$ *has orthonormal columns such that* $X^*AY = U|X^*AY|$.

Under the assumption $\ker AY \subseteq \ker AXU$*, the equality holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_n$ *such that* $AXU = AYW$.

最後に、X, Y のサイズが異なり、さらに A の正定値性を除いた場合においても行列版 Cauchy-Schwarz inequality を考えることができることを述べる。

Corollary 2.10. *Let* A *be a matrix in* $\mathbb{M}_{s\times m}$, $X \in \mathbb{M}_{m\times n}$, $Y \in \mathbb{M}_{s\times t}$. *If* $s \geq m$*, then* $A = V|A|$ *in which* $V \in \mathbb{M}_{s\times m}$ *has orthonormal columns. If* $s < m$*, then* $A^* = V|A^*|$ *in which* $V \in \mathbb{M}_{m\times s}$ *has orthonormal columns.*

(i) *If* $s \geq m$ *and* $t \geq n$*, then*

$$|Y^*AX| \leq X^*|A|X \sharp U^*Y^*|A^*|YU,$$

in which $U \in \mathbb{M}_{t\times n}$ *has orthonormal columns such that* $Y^*AX = U|Y^*AX|$.

Under the assumption $\ker |A|X \subseteq \ker |A|V^*YU$*, the equality holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_n$ *such that* $|A|V^*YU = |A|XW$.

(ii) *If* $s \geq m$ *and* $t < n$*, then*

$$|X^*A^*Y| \leq U^*X^*|A|XU \sharp Y^*|A^*|Y,$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times t}$ *has orthonormal columns such that* $X^*A^*Y = U|X^*A^*Y|$.

Under the assumption $\ker |A|V^*Y \subseteq \ker |A|XU$*, the equality holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_t$ *such that* $|A|XU = |A|V^*YW$.

(iii) *If* $s < m$ *and* $t \geq n$*, then*

$$|Y^*AX| \leq X^*|A|X \sharp U^*Y^*|A^*|YU,$$

in which $U \in \mathbb{M}_{t\times n}$ *has orthonormal columns such that* $Y^*AX = U|Y^*AX|$.

Under the assumption $\ker |A^*|V^*X \subseteq \ker |A^*|YU$*, the equality holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_n$ *such that* $|A^*|YU = |A^*|V^*XW$.

(iv) *If* $s < m$ *and* $t < n$*, then*

$$|X^*A^*Y| \leq U^*X^*|A|XU \sharp Y^*|A^*|Y,$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times t}$ *has orthonormal columns such that* $X^*A^*Y = U|X^*A^*Y|$.

Under the assumption $\ker |A^*|Y \subseteq \ker |A^*|V^*XU$*, the equality holds if and only if there exists* $W \in \mathbb{M}_t$ *such that* $|A^*|V^*XU = |A^*|YW$.

3. Wielandt inequality for matrices

$A \in \mathbb{M}_k$ は $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_k$ を固有値に持つような半正定値行列であるとする。$x, y \in \mathbb{C}^k$ は直交しているベクトルであるとすると、以下の Wielandt inequality が成立する。

$$|y^*Ax| \leq \frac{\lambda_1 - \lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_k}\sqrt{(x^*Ax)(y^*Ay)}$$

この不等式の一般化に関しては多くの研究がある。([11, 2] 参照) ここでは、前節の結果を踏まえ、X, Y の直交性を仮定した下で (2.6) や (2.7) よりも良い評価をすることができるような行列版 Wielandt inequality を紹介する。

Theorem 3.1 (Matrix Wielandt inequality). *Let A be a positive semidefinite matrix in $\mathbb{M}_k$, with rank$(A)=r$, $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ eigenvalues of A, and X, Y in $\mathbb{M}_{k\times n}$ such that $Y^*P_AX = 0$ where P_A is the orthogonal projection on the column space of A. Then*

$$|Y^*AX| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(X^*AX \sharp U^*Y^*AYU) \tag{3.1}$$

and

$$|X^*AY| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(UX^*AXU^* \sharp Y^*AY),$$

in which $U \in \mathbb{M}_n$ is a unitary matrix such that $Y^*AX = U|Y^*AX|$.

2節の結果のように、X, Y のサイズが異なっていた場合においても、同様な不等式を導くことができる。

Proof. We only show (3.1). Let $c = \frac{2\lambda_1\lambda_r}{\lambda_1+\lambda_r}$. Since $\lambda_1 P_A - A$ and $A - \lambda_r P_A$ are positive semidefinite and they commute, it follows that $(\lambda_1 P_A - A)(A - \lambda_r P_A) \geq 0$ and hence

$$-\lambda_1\lambda_r P_A + (\lambda_1 + \lambda_r)A - A^2 \geq 0.$$

Since $A^{1/2}(A^\dagger)^{1/2} = P_A$ and $A^{1/2}P_A = A^{1/2}$, by pre- and post- multiplication of $(A^\dagger)^{1/2}$, we have

$$-\lambda_1\lambda_r A^\dagger + (\lambda_1 + \lambda_r)P_A - P_AAP_A \geq 0$$

or equivalently

$$\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)^2 A \geq A - 2cP_A + c^2A^\dagger. \tag{3.2}$$

Since $Y^*P_AX = 0$ and $Y^*AX = U|Y^*AX| = U|((P_A - cA^\dagger)A^{1/2}Y)^*(A^{1/2}X)|$, we have

$$\begin{aligned}
|Y^*AX| &= |Y^*AX - cY^*P_AX| = |Y^*A^{\frac{1}{2}}(P_A - cA^\dagger)A^{\frac{1}{2}}X| \\
&= |((P_A - cA^\dagger)A^{1/2}Y)^*(A^{1/2}X)| \\
&\leq X^*AX \sharp U^*Y^*A^{\frac{1}{2}}(P_A - cA^\dagger)^2A^{\frac{1}{2}}YU \quad \text{by Lemma 2.6} \\
&= X^*AX \sharp U^*Y^*(A - 2cP_A + c^2A^\dagger)YU \\
&\leq X^*AX \sharp U^*Y^*\left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)^2 AYU \quad \text{by (3.2)} \\
&= \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(X^*AX \sharp U^*Y^*AYU).
\end{aligned}$$

Hence the proof is complete. □

Remark 3.2. *If X and Y are of the different size, then we can get the following similar inequalities by Corollary 2.7. In fact, suppose that $X \in \mathbb{M}_{k\times m}$ and $Y \in \mathbb{M}_{k\times n}$.*

(i) *If $m < n$, then*

$$|Y^*AX| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(X^*AX \sharp U^*Y^*AYU),$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times m}$ has orthonormal columns such that $Y^*AX = U|Y^*AX|$.

(ii) *If $m > n$, then*

$$|X^*AY| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(U^*X^*AXU \sharp Y^*AY),$$

in which $U \in \mathbb{M}_{m\times n}$ has orthonormal columns such that $X^*AY = U|X^*AY|$.

さらに A の正定値性を除いた場合においても、行列版 Wielandt inequality を考えることができる。

Theorem 3.3. *Let A be a matrix in $\mathbb{M}_{s\times m}$, with rank(A)=r, $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ singular-values of A, $X \in \mathbb{M}_{m\times n}$ and $Y \in \mathbb{M}_{s\times t}$. If $s \geq m$, then $A = V|A|$ in which $V \in \mathbb{M}_{s\times m}$ has orthonormal columns. If $s < m$, then $A^* = V|A^*|$ in which $V \in \mathbb{M}_{m\times s}$ has orthonormal columns. Put $c = \frac{2\sigma_1\sigma_r}{\sigma_1+\sigma_r}$.*

(i) *If $s \geq m$ and $t \geq n$, then*

$$|Y^*AX - cY^*VP_{|A|}X| \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\sigma_1 + \sigma_r}\right)(X^*|A|X \sharp U^*Y^*|A^*|YU), \tag{3.3}$$

in which $U \in \mathbb{M}_{t\times n}$ has orthonormal columns such that $Y^*AX - cY^*VP_{|A|}X = U|Y^*AX - cY^*VP_{|A|}X|$.

(ii) *If $s \geq m$ and $t < n$, then*

$$|X^*A^*Y - cX^*P_{|A|}V^*Y| \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\sigma_1 + \sigma_r}\right)(U^*X^*|A|XU \sharp Y^*|A^*|Y), \tag{3.4}$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times t}$ has orthonormal columns such that $X^*A^*Y - cX^*P_{|A|}V^*Y = U|X^*A^*Y - cX^*P_{|A|}V^*Y|$.

(iii) *If $s < m$ and $t \geq n$, then*

$$|Y^*AX - cY^*P_{|A^*|}V^*X| \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\sigma_1 + \sigma_r}\right)(X^*|A|X \sharp U^*Y^*|A^*|YU), \tag{3.5}$$

in which $U \in \mathbb{M}_{t\times n}$ has orthonormal columns such that $Y^*AX - cY^*P_{|A^*|}V^*X = U|Y^*AX - cY^*P_{|A^*|}V^*X|$.

(iv) *If $s \geq m$ and $t < n$, then*

$$|X^*A^*Y - cX^*VP_{|A^*|}Y| \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\sigma_1 + \sigma_r}\right)(U^*X^*|A|XU \sharp Y^*|A^*|Y), \tag{3.6}$$

in which $U \in \mathbb{M}_{n\times t}$ has orthonormal columns such that $X^*A^*Y - cX^*VP_{|A^*|}Y = U|X^*A^*Y - cX^*VP_{|A^*|}Y|$.

Remark 3.4. *In particular, if $Y^*VP_{|A|}X = 0$ in (3.3) of Theorem 3.3, then*

$$|Y^*AX| \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_r}{\sigma_1 + \sigma_r}\right)(X^*|A|X \sharp U^*Y^*|A^*|YU).$$

Similary we have Wielandt type inequalities of (3.4), (3.5) *and* (3.6) *under similar orthogonal conditions.*

4. Applications

最終節では、ブロック行列に対する Wielandt inequality を考える。$A \in \mathbb{M}_{2n}$ は以下のようなブロック行列であるとする。

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

ただし、$A_{11}, A_{22} \in \mathbb{M}_n$ である。 $A_{22} \geq A_{21}{A_{11}}^{\dagger}A_{12}$ はブロック行列における Cauchy-Schwarz inequality として知られている。S.W. Drury ら [2] はブロック行列における Wielandt inequality として、以下を紹介している。

$$A_{21}A_{11}^{-}A_{12} \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)^2 A_{22}$$

一方、我々は以前までの議論を踏まえたブロック行列における Wielandt inequality を紹介する。そのためにいくつかの補題を準備する。次の補題はブロック行列の考えを用いて、A が半正定値行列であるための必要十分条件を示している。([1] 参照)

Lemma 4.1. *$A \geq 0$ if and only if $A_{11} \geq 0, A_{22} \geq 0$ and $A_{21} = A_{22}^{1/2}CA_{11}^{1/2}$ for some contraction $C \in \mathbb{M}_n$.*

generalized Schur complement $\widetilde{A}_{11}$ を次のように定める。

$$\widetilde{A}_{11} = A_{22} - A_{21}{A_{11}}^{\dagger}A_{12}$$

補題 4.1 により、$A \geq 0$ ならば $P_{A_{11}}A_{12} = A_{12}, P_{A_{22}}A_{21} = A_{21}$ であることがわかるので、次の補題を得る。

Lemma 4.2. *If* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{11}) + \operatorname{rank}(A_{22})$, *then* $P_A = \begin{pmatrix} P_{A_{11}} & 0 \\ 0 & P_{A_{22}} \end{pmatrix}$.

以上の補題を用いて、ブロック行列における Wielandt inequality を紹介する。

Theorem 4.3. *Under the condition mentioned above, if* $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A_{11}) + \operatorname{rank}(A_{22})$, *then the following hold;*

$$|A_{21}| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(A_{11} \sharp U^*A_{22}U)$$

and

$$|A_{12}| \leq \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(UA_{11}U^* \sharp A_{22}),$$

in which $U \in \mathbb{M}_n$ is the unitary matrix such that $A_{21} = U|A_{21}|$.

Proof. We only show the former. Let $X = \begin{pmatrix} P_{A_{11}} \\ 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 \\ P_{A_{22}} \end{pmatrix}$. Then $Y^*P_AX = 0$ and we have

$$\begin{aligned} |A_{12}| &= |Y^*AX| \\ &\le \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(X^*AX \sharp U^*Y^*AYU) \quad \text{by Theorem 3.1} \\ &= \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(A_{11} \sharp U^*A_{22}U). \end{aligned}$$

□

Remark 4.4. *If A_{11} and A_{22} are of different size, we can get the following similar inequalities by Remark 3.2. In fact, suppose that $A_{11} \in \mathbb{M}_p$ and $A_{22} \in \mathbb{M}_q$.*

(i) *If $p < q$, then*

$$|A_{21}| \le \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(A_{11} \sharp U^*A_{22}U),$$

in which $U \in \mathbb{M}_{q\times p}$ has orthonormal columns such that $A_{21} = U|A_{21}|$.

(ii) *If $p > q$, then*

$$|A_{12}| \le \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_r}{\lambda_1 + \lambda_r}\right)(U^*A_{11}U \sharp A_{22}),$$

in which $U \in \mathbb{M}_{p\times q}$ has orthonormal columns such that $A_{12} = U|A_{12}|$.

Acknowledgements.
本研究は、JSPS 科研費 JP 16K05253 の助成を受けたものです。

References

[1] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture notes (mineographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.
[2] S.W. Drury, S.Z. Liu, C.Y. Lu, S. Puntanen and G. Styan, *Some comments on several matrix inequalities with applications to canonical correlations: Historical background and recent developments*, Indian J. Stat., **64** (2002), 453–507.
[3] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić method in operator inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012.
[4] J.I. Fujii, *Operator-valued inner product and operator inequalities*, Banach J. Math. Anal., **2** (2008), 59–67.
[5] J.I. Fujii, *Moore-Penrose inverse and operator mean*, SCMJ(30), e-2017-15.
[6] M. Fujimoto and Y. Seo, *Matrix Wielandt inequality via the matrix geometric mean*, to appear in Linear Multilinear Algebra.
[7] R. A. Horn and C.R. Johnson, *Matrix Analysis*, second edition, Cambridge University Press, 2013.
[8] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann., **246**(1980), 205–224.
[9] C.Y. Lu, *Generalized matrix versions of the Wielandt inequality with some statistical applications*, Unpublished reserach report, Dept. of Mathematics, Northeast Normal University, Changchun (Jilin), China, 8pp.
[10] A.W. Marshall and I. Olkin, *Matrix version of the Cauchy and Kantorovich inequalities*, Aequationes Math., **40** (1990), 89–93.
[11] S.G. Wang and W.C. Ip, *A matrix version of the Wielandt inequality and its application to statistics*, Linear Algbera Appl., **296**(1999), 171–181.