数理解析研究所講究録
第2073巻 2018年 96-104

Tsallis relative operator entropy of negative order
一半正定値行列に関する負パラメータの Tsallis 相対作用素エントロピー

大阪教育大学・教育　　瀬尾　祐貴 (YUKI SEO)
(DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY)
大阪教育大学・教育　　藤井　淳一 (JUN ICHI FUJII)
(DEPARTMENT OF ARTS AND SCIENCES (INFORMATION SCIENCE), OSAKA KYOIKU UNIVERSITY)

ABSTRACT. In this paper, we discuss the Tsallis relative entropy with negative parameters for positive semidefinite matrices. Moreover, we give a simple proof that the Karcher mean for positive semidefinite matrices is the unique positive semidefinite solution of the extended Karcher equation.

1. 問題の所在と目的

本論文は、[7, 8] の結果に基づいています。

まず、本論文の問題意識について、明らかにします。作用素論の中で、ヒルベルト空間上の 2 個の正作用素に対する幾何平均は古くから定式化されていましたが（例えば、[2, 14]）、長い間、3 つ以上の正作用素に対する幾何平均の構成は未解決でした。それが、2004 年に、安藤-Li-Mathias [3] の 3 人によって、新しい提案がなされ、この方向の議論が一挙に進展しました。それから、10 年たった 2014 年に、Lawson-Lim-Pálfia [16, 15] によって、これまでの議論をまとめる形で、3 つ以上の可逆な正作用素に対する幾何平均の完全な定式化が行われ、幾何平均の持つべき性質も併せて証明されました。現在、この幾何平均がいろいろな意味で最良のものと考えられています（例えば、[17]）。$A_1, A_2, \ldots, A_n$ をヒルベルト空間上の可逆な正作用素、$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ を加重ベクトルとします。つまり、$\omega_j \geq 0$ かつ $\sum_{j=1}^{n} \omega_j = 1$ を満たすベクトルです。しかし、ここでは、さらに、各成分について、$0 < \omega_j < 1$ とします。そのとき、次の Karcher 方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j \log \left(X^{-\frac{1}{2}} A_j X^{-\frac{1}{2}} \right) = 0 \tag{1.1}$$

を満たす可逆正作用素 X がただ一つ存在します。それを $A_1, \ldots, A_n$ に対する (加重) Karcher 幾何平均 と呼び、$G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ とかきます。応用上、可逆性の仮定は制限が強すぎます。できれば、一般の正作用素に対して Karcher 幾何平均を定義したい。でも、Karcher 方程式 (1.1) の構成上、作用素の可逆性がどうしても必要になります。そこで、それを回避するために、次のような方法が一般的です。任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$A_j + \varepsilon I$ を考えると、これはいつでも可逆になります。従って、Karcher 幾何平均 $G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \ldots, A_n + \varepsilon I)$ は存在します。このとき、Lawson-Lim-Pálfia [16, 15] は、Karcher 幾何平均が各作用素に対して単調性を持っていることを証明しました。即ち、各 j に対して、$0 < A_j \leq B_j$ ならば、

$$G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n) \leq G_K(\omega; B_1, \ldots, B_n)$$

が成り立つ。これを用いると、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、Karcher 幾何平均 $G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \ldots, A_n + \varepsilon I)$ は、単調減少で、かつ、ゼロ作用素によって、下に有界です。従って、可逆でない正作用素に対しては、$G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \ldots, A_n + \varepsilon I)$ は、いつでも、$\varepsilon \to 0$ とし

て、強収束先が正作用素として存在することになります。それを改めて、Karcher 幾何平均 と呼び、同じ記号 $G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ とかくことにします。

$$G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\varepsilon \to 0} G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \ldots, A_n + \varepsilon I)$$

そして、この Karcher 幾何平均は、オリジナルの Karcher 幾何平均と同じ性質を満たすこともすぐにわかります。しかし、それは一般的には可逆性を持つとは限りませんから、Karcher 方程式 (1.1) の解にはなりえません。でも、Karcher 幾何平均の定式化の要はこの Karcher 方程式の解になっていることだと著者は考えます。一般の可逆でない正作用素に対して Karcher 幾何平均が定義できるわけですから、逆に Karcher 方程式 (1.1) の方がもう少し考えなければいけないのではないか。つまり、この拡張された Karcher 幾何平均が解になるように Karcher 方程式を再構成する必要があるのではないかと考えました。それには、相対作用素エントロピーの考えが有効であることがわかりました [7, 6, 4, 13, 9]。A と B を可逆な正作用素としたとき、A と B の相対作用素エントロピーは、藤井 - 亀井 [5] によって、

$$S(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \log \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}} \tag{1.2}$$

で、定義されました。しかも、$S(A|B)$ は、A や B に可逆性がない時も、存在する場合があります。例えば、A が B によって majorize されているとき、つまり、ある正の数 $\alpha > 0$ に対して、$A \leq \alpha B$ であれば、いつでも $S(A|B)$ は存在します。そこで、 Karcher 方程式 (1.1) を次のように拡張します [7]。$A_1, A_2, \ldots, A_n$ をヒルベルト空間上の (可逆とは限らない) 正作用素、$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ を加重ベクトルとします。このとき、

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j S(X|A_j) = 0 \qquad \text{with} \quad \ker X = \bigvee_{\omega_j > 0} \ker A_j \tag{1.3}$$

を考えます。後ろの核条件は必要です。なぜなら、この核条件がなければ、$X = 0$ がいつでも解になるからです。また、A_j が可逆の時は、(1.3) は、オリジナルの Karcher 方程式 (1.1) と完全に一致します。そこで、私たちは、(1.3) を拡張された Karcher 方程式と呼ぶことにします。A_j がすべて射影作用素のときでも、(1.3) はただ一つの射影解を持つこともわかります。しかしながら、A_j が可逆でないときに、$G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ が一般的に (1.3) を満たすかどうか、また、それがユニークかどうか、わかっていません。今は、$\sum_{j=1}^{n} \omega_j S(G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)|A_j) \geq 0$ までしか、わかっていません。これが、実際に解になっているのかどうか、一番肝心なところが、未解決です。しかしながら、正方行列の場合は、解決しています。A_j が半正定値行列の場合は、$G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ が、Karcher 方程式 (1.3) の解になっていますし、それが唯一解であることもわかっています。

今回は、行列の場合をいろいろな角度から眺めることにします。Lawson-Lim-Pálfia の基本の考えは、Tsallis 相対作用素エントロピーから得られる方程式の唯一解の極限が、Karcher 方程式 (1.1) を満たすということです。従って、ここでは、半正定値行列に対する Tsallis 相対作用素エントロピーから得られる方程式の負パラメーターの場合を考察することにします。合わせて、いろいろな性質についても紹介をします。そのためには、可逆でない半正定値行列に対して、擬 t-幾何平均の性質を明らかにしておくことが必要になります。

柳 - 古市 - 栗山 [10, 11, 18] は、阿部 [1] による Tsallis 相対エントロピーの作用素版として、Tsallis 相対作用素エントロピーを定義しました。A と B を可逆な正作用素、$t \in (0,1]$ とします。

$$T_t(A|B) = A^{\frac{1}{2}} \ln_t \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}} \right) A^{\frac{1}{2}} = \frac{A \natural_t B - A}{t} \tag{1.4}$$

ただし、一般化対数関数 $\ln_t(x) = \frac{x^t-1}{t}$ であり、t-加重な作用素幾何平均は、

$$A \,\sharp_t\, B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^t A^{\frac{1}{2}}$$

です。このとき、Lawson-Lim-Pálfia [16, 15] は、$A_1, A_2, \ldots, A_n$ を可逆な正作用素、$\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ を加重ベクトルとしたとき、各 $t \in (0,1]$ に対して、Tsallis 方程式

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j T_t(X|A_j) = 0$$

が可逆な正作用素を解に持ち、それが唯一解であることを示しました。それは、冪作用素平均と呼ばれ、$P_t(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ とかきます。$t \in [-1, 0)$ のときは、

$$P_t(\omega; A_1, \ldots, A_n) = P_{-t}(\omega; A_1^{-1}, \ldots, A_n^{-1})^{-1}$$

で定義します。このとき、

$$G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n) = \operatorname*{s\text{-}lim}_{t \to 0} P_t(\omega; A_1, \ldots, A_n)$$

が成立します。この結果によって、Karcher 幾何平均の多くの性質が導かれることになりました。しかし、t が負の時の冪作用素平均の構成の仕方はやや技巧的にもみえます。そこで、t-加重な作用素幾何平均の定義を負の場合まで拡げてみます。$t \in [-1, 0)$ に対して、

$$A \,\natural_t B = A^{\frac{1}{2}} \left(A^{-\frac{1}{2}} B A^{-\frac{1}{2}}\right)^t A^{\frac{1}{2}}$$

を考えます。これは、$\sharp_t$ と全く同じ式です。$t \notin [0,1]$ のとき、$A \,\natural_t B$ は、作用素平均にはなりませんが、ある程度の作用素平均的な性質は持っています。そこで、$A \,\natural_t B$ を擬 t-幾何平均と言うことにします。各 $t \in [-1, 0)$ に対して、Tsallis 相対作用素エントロピーと同じ記号を用いて

$$T_t(A|B) = \frac{A \,\natural_t\, B - 1}{t} \qquad \text{for } -1 \leq t < 0$$

とかくことにします。

本稿の目的は、可逆性を仮定しない一般的な半正定値行列に対する負パラメーターを持つ Tsallis 相対作用素エントロピーを定義し、その性質を調べることにあります。そのためには、可逆でない半正定値行列に対して、擬 t-幾何平均の性質を調べることが必要になります。次節で、そのことを詳しく見ていくことにしましょう。最後に、それらを踏まえて、半正定値行列に対する拡張された Karcher 方程式 (1.3) が唯一解をもつことの簡潔な証明を与えます。

2. $-1 \leq t < 0$ に対する擬 t-幾何平均 $\natural_t$

A と B を半正定値行列としたとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$A \,\natural_t\, (B + \varepsilon I)$ は、単調性を持つので、$\varepsilon \to 0$ に対して、$A \,\natural_t\, (B + \varepsilon I)$ は、単調に増加します。もし上に有界であれば、その収束先が半正定値行列として存在します。従って、半正定値行列に対する擬 t-幾何平均 $A \,\natural_t\, B$ は、

$$A \,\natural_t\, B = \lim_{t \to 0} A \,\natural_t\, (B + \varepsilon I)$$

で定義できます。ただし、いつでも、擬 t-幾何平均が存在するわけではありません。各 $t \in [-1, 0)$ に対して、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$I \,\natural_t\, \varepsilon I$ は上に有界ではありませんから、$I \,\natural_t\, 0$ は発散して、意味を持ちません。しかし、例えば、行列の場合は、核条件 $\ker A \supset \ker B$ があれば、いつでも、$A \,\natural_t\, B$ は存在します。実際、行列の場合、値域は閉集合ですから、核

条件より、$\operatorname{ran} A^{1/2} \subset \operatorname{ran} B^{1/2}$ がわかり、ダグラスの意味で、A は B によって、majorize されます。つまり、ある正の数 $c > 0$ があって、$A \leq cB$ が成り立ちます。このとき、任意の $\alpha > 0$ に対して、

$$L_{\alpha,t}(A,B) = (1-t)\alpha^{-t}A + t\alpha^{1-t}B \leq \left((1-t)\alpha^{-t}c + t\alpha^{1-t}\right)B \leq c^{1-t}B$$

が、成立します。ここで、$c_0 = c^{1-t}\|B\|$ とおけば、

$$L_{\alpha,t}(A, B+\varepsilon I) \leq c_0 I$$

が、成り立ち、それ故、

$$c_0(B+\varepsilon I)^{-1} \geq \sup_{\alpha>0} L_{\alpha,t}\left((B+\varepsilon I)^{-1/2}A(B+\varepsilon I)^{-1/2}, I\right) = \left((B+\varepsilon I)^{-1/2}A(B+\varepsilon I)^{-1/2}\right)^{1-t}$$

これは、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$c_0 \geq A \natural_t (B+\varepsilon I)$ を示しています。つまり、集合 $\{A \natural_t (B+\varepsilon I) : \varepsilon > 0\}$ は上に有界で、$\varepsilon \to 0$ のとき、単調に増加しますから、その極限が半正定値行列として存在することがわかります。

正方行列 A に対して、ムーア・ペンローズ逆行列 $A^\dagger$ は、次の 4 つの性質を満たすものとして一意に決まります。(1) $AA^\dagger A = A$ (2) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$ (3) $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$ (4) $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$ 勿論、A が可逆のときは、$A^\dagger = A^{-1}$ である。このとき、擬 t-幾何平均 $A \natural_t B$ は、核条件の下で、ムーア・ペンローズ逆行列を用いて、次のようにかくことができます。

Lemma 2.1. A と B が n 次半正定値行列で、核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たすとき、各 $t \in [-1,0)$ に対して、

$$A \natural_t B = B^{\frac{1}{2}}\left[(B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger\right]^{1-t} B^{\frac{1}{2}}$$

Proof. $\operatorname{rank}(B) = n$ のときは、B が可逆なので、補題は成り立つ。$\operatorname{rank}(B) = r < n$ とする。このとき、あるユニタリ行列 U があって、$U^*BU = B_r \oplus 0$ と分解できる。ただし、B_r は r 次の正定値行列である。核条件 $\ker A \supset \ker B$ から、同じユニタリ行列 U を用いて、$U^*AU = A_r \oplus 0$ ただし、A_r は r 次の半正定値行列と分解できる。さて、核条件から、$A \natural_t B$ が存在するから、

$$\begin{aligned}
A \natural_t B = B \natural_{1-t} A &= U(B_r \oplus 0)U^* \natural_{1-t} U(A_r \oplus 0)U^* \\
&= U\left[(B_r \oplus 0) \natural_{1-t} (A_r \oplus 0)\right]U^* \\
&= U\left[(B_r \natural_{1-t} A_r) \oplus 0\right]U^* \\
&= U\left[B_r^{\frac{1}{2}}(B_r^{-\frac{1}{2}}A_r B_r^{-\frac{1}{2}})^{1-t}B_r^{\frac{1}{2}} \oplus 0\right]U^* \\
&= B^{\frac{1}{2}}\left[(B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger\right]^{1-t} B^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

となり、補題は成り立ちます。 □

正方行列 A に対して、P_A を A の値域射影とします。核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たすとき、明らかに、$P_B A P_B = A$ が成り立ちます。補題 2.1 によって、擬 t-幾何平均 $A \natural_t B$ のいろいろな性質が容易に導かれます。例えば、算術・幾何平均の不等式 $A \natural_t B \geq (1-t)A + tB$

も核条件の下で簡単に証明できます。

$$\begin{aligned} A \natural_t B &= B^{\frac{1}{2}} \left[(B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}\right]^{1-t} B^{\frac{1}{2}} \\ &\geq B^{\frac{1}{2}} \left[(1-t)(B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} + tI\right] B^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-t) P_B A P_B + tB \\ &= (1-t)A + tB. \end{aligned}$$

3. 行列版の Tsallis 相対作用素エントロピー

補題 2.1 によって、次の行列版の Tsallis 相対作用素エントロピーの評価を得ます。

Theorem 3.1. A と B を半正定値行列で、核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たすとします。そのとき、各 $t \in [-1, 0)$ に対して、

$$T_t(A|B) = \frac{1}{t}\left[B^{\frac{1}{2}} \left[(B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}\right]^{1-t} B^{\frac{1}{2}} - A\right]$$

が成り立つ。

同様に、相対作用素エントロピーも評価できます。

Theorem 3.2. A と B を半正定値行列で、核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たすとします。そのとき、

$$S(A|B) = B^{\frac{1}{2}} \eta((B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}) B^{\frac{1}{2}}$$

が成り立つ。ただし、エントロピー関数 $\eta(x) = -x \log x$ である。

このとき、次の下からの連続性もわかります。

Theorem 3.3. A と B を半正定値行列で、核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たすとします。また、$t \in [-1, 0)$ とする。このとき、

$$T_t(A|B) \nearrow S(A|B) \qquad \text{as } t \nearrow 0.$$

Proof. 核条件より、$P_B A P_B = A$ が成り立つので、定理 3.1 と定理 3.2 により、

$$\begin{aligned} T_t(A|B) &= \frac{1}{t}\left[B^{\frac{1}{2}} \left[(B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}\right]^{1-t} B^{\frac{1}{2}} - A\right] \\ &= B^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\left((B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}\right)^{1-t} - (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}}{t}\right] B^{\frac{1}{2}} \\ &\nearrow B^{\frac{1}{2}} \eta((B^{\frac{1}{2}})^{\dagger} A (B^{\frac{1}{2}})^{\dagger}) B^{\frac{1}{2}} = S(A|B) \qquad \text{as } t \nearrow 0. \end{aligned}$$

□

与えられた行列の順序と Tsallis 相対作用素エントロピーの符号の関係が、半正定値の場合でも次のように成立する。

Theorem 3.4. A と B を半正定値行列で、核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たし、$t \in [-1, 0)$ とする。このとき、

$$T_t(A|B) \geq 0 \iff B \geq A$$

そして、

$$T_t(A|B) \leq 0 \iff B \leq A$$

それ故、

$$T_t(A|B) = 0 \iff B = A$$

Proof. $T_t(A|B) \le 0$ とする。このとき、

$$A \natural_t B = B^{\frac{1}{2}} \left[(B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger \right]^{1-t} B^{\frac{1}{2}} \ge A$$

なので、両辺に $(B^{\frac{1}{2}})^\dagger$ をかけると

$$\left[(B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger \right]^{1-t} = P_B \left[(B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger \right]^{1-t} P_B \ge (B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger$$

よって、$(B^{\frac{1}{2}})^\dagger A (B^{\frac{1}{2}})^\dagger \ge I$ となり、

$$A = P_B A P_B \ge B$$

が、わかる。

逆に、$B \le A$ とすると、擬 t-幾何平均の単調性により、

$$A \natural_t B \ge A \natural_t A = A$$

が、わかり、よって、$T_t(A|B) = \frac{A \natural_t B - A}{t} \le 0$ となる。これで、後者の同値がわかった。

前者の同値性も同様にわかる。 □

4. 半正定値行列に対する KARCHER 幾何平均

この節では、半正定値行列に対する Karcher 幾何平均の定式化を紹介する。目標は、$A_1, \ldots, A_n$ が半正定値行列、$\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$ を加重ベクトルのとき、拡張された Karcher 方程式 (1.3) を満たす唯一の解が存在することを示すことです。各 $\varepsilon > 0$ に対して、$A_j + \varepsilon I$ は、可逆な正定値行列ですから、Lim-Pálfia の結果から、Karcher 方程式 (1.1) を満たす唯一解である正定値行列 $X_\varepsilon = G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ が存在します。X_ε は単調減少で下に有界ですから、その極限である半正定値行列 X_0 に収束します。

$$X_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} X_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \ldots, A_n + \varepsilon I) \tag{4.1}$$

ここで、私たちは、$X_0 = G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ とかくことにします。このとき、この $X_0 = G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ が、拡張された Karcher 方程式 (1.3) の唯一解であることを示します。ただし、これ以降、加重ベクトルはすべて、$0 < \omega_j < 1$ を満たすものとします。

そのためには、いくつかの補題を必要とします。まず、幾何平均の核条件をみます。

Lemma 4.1. A と B を半正定値行列とする。このとき、各 $t \in (0,1)$ に対して、

$$\ker A \,\sharp_t\, B = \ker A \vee \ker B$$

Proof. $x \in \ker A$ に対して、transformer 不等式より

$$0 \le \langle A \sharp_t Bx, x \rangle \le \langle Ax, x \rangle \sharp_t \langle Bx, x \rangle = 0$$

だから、$x \in \ker A \sharp_t B$ がわかる。よって、$\ker A \vee \ker B \subset \ker A \sharp_t B$ がわかります。逆は、加重調和平均を $!_t$ とすると、$A \,!_t\, B \le A \sharp_t B$ であるから、

$$\ker A \vee \ker B \subset \ker A \sharp_t B \subset \ker A \,!_t\, B = \ker A \vee \ker B$$

から、わかります。 □

次に (4.1) で決めた $X_0 = G_K(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ の核条件を決定します。補題 4.1 と同様に示すことができます。

Lemma 4.2.

$$\ker G_K(\omega; A_1, \dots, A_n) = \bigvee_j \ker A_j.$$

Proof. $x \in \ker A_j$ に対して、transformer 不等式より

$$0 \le \langle G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)x, x\rangle \le G_K(\omega; \langle A_1 x, x\rangle, \dots, \langle A_n x, x\rangle) = 0$$

だから、$x \in \ker G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$ がわかる。よって、$\bigvee_j \ker A_j \subset \ker G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$。
逆は、n 変数の加重調和平均を $H(\omega; A_1, \dots, A_n)$ とすると、
$H(\omega; A_1, \dots, A_n) \le G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$ が成立していますから、

$$\ker G_K(\omega; A_1, \dots, A_n) \subset \ker H(\omega; A_1, \dots, A_n) = \bigvee_j \ker A_j$$

となり、補題が証明できました。 □

相対作用素エントロピーと加重幾何平均の間には次のような関係があります。

Lemma 4.3. A と B を半正定値行列で、核条件 $\ker A \supset \ker B$ を満たしているとする。このとき、各 $t \in [0,1]$ に対して、

$$S(A|A \natural_t B) = tS(A|B)$$

が成り立つ。

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して、$S(A+\varepsilon I|(A+\varepsilon I) \natural_t (B+\varepsilon I)) = t\, S(A+\varepsilon I|B+\varepsilon I)$ はいつでも成立しています。さて、核条件 $\ker A \supset \ker B$ と補題 4.1 より、$\ker A \natural_t B = \ker A$ なので、定理 3.2 により、$S(A|A \natural_t B)$ と $S(A|B)$ は存在します。このとき、相対作用素エントロピーの上半連続性より、$\varepsilon \to 0$ のとき、$S(A+\varepsilon I|(A+\varepsilon I) \natural_t (B+\varepsilon I)) \searrow S(A|A \natural_t B)$ そして、$S(A+\varepsilon I|B+\varepsilon I) \searrow S(A|B)$ なので、$S(A|A \natural_t B) = tS(A|B)$ がわかります。 □

(4.1) で決めた $X_0 = G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$ は、次のような上半連続性を持ちます。

Lemma 4.4. $A_1, \dots, A_n$ が半正定値行列、$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ を加重ベクトルとする。Y_ε を半正定値行列で、$\varepsilon \searrow 0$ のとき、$Y_\varepsilon \searrow 0$ を満たすとき、

$$G_K(\omega; A_1 + Y_\varepsilon, \dots, A_n + Y_\varepsilon) \searrow G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$$

である。

Proof. $G_K(\omega; A_1 + \delta I + Y_\varepsilon, \dots, A_n + \delta I + Y_\varepsilon)$ は、$\delta, \varepsilon \searrow 0$ に関して、単調減少である。だから、ベクトル状態 φ_x に対して、有界な二重数列 $a_{\delta,\varepsilon} = \varphi_x(G_K(\omega; A_1 + \delta I + Y_\varepsilon, \dots, A_n + \delta I + Y_\varepsilon))$ を考えると、

$$\lim_{\delta,\varepsilon \searrow 0} a_{\delta,\varepsilon} = \lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} a_{\delta,\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} a_{\delta,\varepsilon}$$

が成り立つから、補題 4.4 が成立する。 □

これで、すべての準備が整いました。次の結果がわかります。

Theorem 4.5. $A_1, \dots, A_n$ が半正定値行列、$\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ を加重ベクトルとする。このとき、(4.1) で決めた $X_0 = G_K(\omega; A_1, \dots, A_n)$ は、拡張された *Karcher* 方程式 (1.3) を満たす唯一解である。

Proof. 各 $\varepsilon > 0$ に対して、$X_\varepsilon = G_K(\omega; A_1 + \varepsilon I, \ldots, A_n + \varepsilon I)$ とおきますと、$X_\varepsilon \searrow X_0$ になっています。このとき、補題 4.3 により、

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{n} \omega_j S(X_\varepsilon | A_j + \varepsilon I) \\ &= \sum_{j=1}^{n} S(X_\varepsilon | X_\varepsilon \natural_{\omega_j} (A_j + \varepsilon I)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} S(X_\varepsilon | X_\varepsilon \natural_{\omega_j} (A_j + \varepsilon I)) \end{aligned}$$

が、わかります。よって、均等加重ベクトルを $\tilde{\omega} = (1/n, \ldots, 1/n)$ としたとき、各 j に対して

$$X_\varepsilon = G_K(\tilde{\omega}; X_\varepsilon \natural_{\omega_1}(A_1 + \varepsilon I), \ldots, X_\varepsilon \natural_{\omega_n} (A_n + \varepsilon I))$$

です。さて、$X_\varepsilon \searrow X_0$ および、$X_\varepsilon \natural_{\omega_j}(A_j + \varepsilon I) \searrow X_0 \natural_{\omega_j} A_j$ ですから、補題 4.4 より、

$$X_0 = G_K(\tilde{\omega}; X_0 \natural_{\omega_1} A_1, \ldots, X_0 \natural_{\omega_n} A_n)$$

が、わかります。従って、

$$\sum_{j=1}^{n} \omega_j S(X_0 | A_j) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} S(X_0 | X_0 \natural_{\omega_j} A_j) = 0$$

が、わかりますから、これは、補題 4.2 とあわせて、X_0 が、拡張された Karcher 方程式 (1.3) の解であることを示しています。

唯一性に関しては、補題 4.1 と補題 4.2 によって、各 j に対して

$$\ker X_0 = \ker X_0 \natural_{\omega_j} A_j = \bigvee_j \ker A_j$$

がわかりますので、同じユニタリ行列 U にとって、$U^* X_0 U = X_r \oplus 0$ そして、$U^*(X_0 \natural_{\omega_j} A_j)U = Y_{r,j} \oplus 0$ と、分解できます。ただし、X_r と $Y_{r,j}$ は、ともに、正定値行列です。このとき、

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \omega_j S(X_0 | A_j) &= n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} S(X_0 | X_0 \natural_{\omega_j} A_j) \\ &= n \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} S(U(X_r \oplus 0)U^* | U(Y_{r,j} \oplus 0)U^*) \\ &= nU \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} S(X_r | Y_{r,j}) \oplus 0 \right) U^* \\ &= 0 \end{aligned}$$

になり、X_r と $Y_{r,j}$ は、ともに可逆ですから、Lawson-Lim の結果より、それはただ一つの解しかありえません。従って、X_0 が、拡張された Karcher 方程式 (1.3) を満たす唯一解であることがわかります。 □

Acknowledgements.

本研究は、JSPS 科研費 JP 16K05253 の助成を受けたものです。

REFERENCES

[1] S. Abe, *Monotonic decrease of the quantum nonadditive divergence by projective measurements*, Phys Letters A, **312** (2003), 336–338.

[2] T. Ando, *Topics on operator inequalities*, Hokkaido Univ. Lecture Note, 1978.

[3] T. Ando, C.K. Li and R. Mathias, *Geometric means*, Linear Algebra Appl., **385** (2004), 305–334.

[4] J.I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo, *An extension of the Kubo -Ando theory : Solidarities*, Math. Japon., **35**(1990), 387–396.

[5] J.I. Fujii and E. Kamei, *Relative operator entropy in noncommutative information theory*, Math. Japon., **34** (1989), 341–348.

[6] J.I. Fujii and E. Kamei, *Uhlmann's interpolational method for operator means*, Math. Japonica **34** (1989), 541–547.

[7] J.I. Fujii and Y. Seo, *The relative operator entropy and the Karcher mean*, to appear in Linear Algebra Appl.

[8] J.I. Fujii and Y. Seo, *Tsallis relative operator entropy with negative parameters*, Adv. Oper. Theory **1** (2016), 219–236.

[9] M. Fujii, J. Mićić Hot, J. Pečarić and Y. Seo, *Recent Developments of Mond-Pečarić method in operator inequalities*, Monographs in Inequalities 4, Element, Zagreb, 2012.

[10] S. Furuichi, K. Yanagi and K. Kuriyama, *Fundamental properties for Tsallis relative entropy*, J. Math. Phys., **45** (2004), 4868–4877.

[11] S. Furuichi, K. Yanagi and K. Kuriyama, *A note on operator inequalities of Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **407** (2005), 19–31.

[12] T. Furuta, *Invitation to linear operators*, Taylor&Francis, London, 2001.

[13] T. Furuta, J. Mićić Hot, J.E. Pečarić and Y. Seo, *Mond-Pečarić Method in Operator Inequalities*, Monographs in Inequalities **1**, Element, Zagreb, 2005.

[14] F. Kubo and T. Ando, *Means of positive linear operators*, Math. Ann. **246**(1980), 205–224.

[15] J. Lawson and Y. Lim, *Karcher means and Karcher equations of positive definite operators*. Trans. Amer. Math. Soc., Ser. B **1** (2014), 1–22.

[16] Y. Lim and M. Pálfia, *Matrix power means and the Karcher mean*, J. Funct. Anal., **262** (2012), 1498–1514.

[17] T. Yamazaki, *Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order*, Oper. Matrices, **6** (2012), 577–588.

[18] K. Yanagi, K. Kuriyama and S. Furuichi, *Generalized Shannon inequalities based on Tsallis relative operator entropy*, Linear Algebra Appl., **394** (2005), 109–118.

YUKI SEO: DEPARTMENT OF MATHEMATICS EDUCATION, OSAKA KYOIKU UNIVERSITY, ASAHIGAOKA,KASHIWARA, OSAKA582-8582, JAPAN

E-mail address: yukis@cc.osaka-kyoiku.ac.jp

JUN ICHI FUJII: DEPARTMENT OF ARTS AND SCIENCES (INFORMATION SCIENCE), OSAKA KYOIKU UNIVERSITY, ASAHIGAOKA, KASHIWARA, OSAKA 582-8582, JAPAN

E-mail address: fujii@cc.osaka-kyoiku.ac.jp