数理解析研究所講究録
第2073巻 2018年 129-131

2つの部分空間の同配置問題
Configuration problem of two subspaces

榎本雅俊 Masatoshi Enomoto　　綿谷安男 Yasuo Watatani(九大数理)

2018年1月31日

本研究は科研費 (課題番号:23654053,25287019) の助成を受けたものである。

1 導入

この結果は参考文献 [1] のアナウスメントである。

1.1 2つの部分空間の組について

Hilbert space の中の2つの closed subspace の組の unitary 同値性については、Halmos による次の結果がよく知られている。

定理 (Halmos) M と N を、Hilbert space H の中の closed subspace の組で、generic position にあるものとする。つまり、($M, N, M^{\perp}, N^{\perp}$ について、どの2つの intersection も $\{0\}$ である) とする。このとき、ある Hilbert space K とある K 上の closed linear operator T で、$ker(T) = \{0\}$, $\overline{Range(T)} = K$ となるものがあって、pair$< M, N >$ は、pair $< K \oplus \{0\}, graph(T) >$ と unitary 同値である。(つまり、$H = K \oplus K$ 上の unitary U で、$U(M) = K \oplus \{0\}$, $U(N) = graph(T)$ となるものが存在する。) 更に、その operator T は、selfadjoint で positive であるものを選ぶことができる。もしそう選べば、それは次の意味で一意である。つまり、$< K \oplus \{0\}, graph(T_1) >$ と $< K \oplus \{0\}, graph(T_2) >$ が unitary 同値とすると、そのとき、T_1 は、T_2 に unitary 同値である。

この講演では、この2つの subspace の pair についての Halmos の結果を unitary 同値ではないもっと弱い同値で考察することを目的とする。そのために、我々が4つの subspace の組についての Gelfand-Ponomarev の結果を infinite-dimensional Hilbert space の場合に考察するに当たって導入した同配置同値の概念を思い出しておくことにする。

1.2 定義

H を、Hilbert space、$E_1, \dots, E_n$ を、H の n 個の (closed) subspace とする。そのとき、$\mathcal{S} = (H; E_1, \dots, E_n)$ を、H の中の n-subspace の system または、n-subspace system という。$\mathcal{T} = (K; F_1, \dots, F_n)$ を別の、Hilbert space K の中の n-subspace の system とする。このとき、$\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ が、isomorphism であることを、$\varphi : H \to K$ が、bounded invertible な linear operator で、$\varphi(E_i) = F_i$ for $i = 1, \dots, n$ を満たすものであると定義する。更に、system $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ が isomorphic であると

は、isomorphism $\varphi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ が存在することと定義する。

この可逆の意味の isomorphism を、quiver（有向グラフ）の Hilbert representation でも使う。特に、$\Gamma = (Q_0, Q_1, s, t)$ を A_2- Dynkin quiver とする。つまり、Γ の頂点集合 を $Q_0 = \{1, 2\}$, Γ の辺集合 を、$Q_1 = \{\alpha\}$ とし、$s, t : Q_1 \to Q_0$ で、$s(\alpha) = 1, t(\alpha) = 2$ としたものである。Γ の Hilbert representation (H, f) とは、H_1, H_2 を Hilbert space とし、$f_\alpha \in B(H_1, H_2)$ としたものである。

Γ の Hilbert representation (H, f) と (K, g) の isomorphism $T = (T_v)_{v \in Q_0}$ を次で定義する。$T_v (v \in Q_0)$ は、bounded invertible で、$g_\alpha T_1 = T_2 f_\alpha$ なるものとして定義する。

2 結果

二つの (closed) subspace の組について、可逆同値での考察をする。

2.1 2 subspace と 3-subspace の差

$(H; K \oplus 0, graphT)$ の形の 2-subspace は、自動的に $(H; K \oplus 0, 0 \oplus K, graph(T))$ を決める訳ではないことを注意する。

定理 1

T_1,T_2 を、稠密な定義域を持つ closed linear operator で、$(H; K \oplus 0, graphT_1)$ と $(H; K \oplus 0, graphT_2)$ は、二つの subspace の system として同型であるが、$(H; K \oplus 0, 0 \oplus K, graph(T_1))$ と $(H; K \oplus 0, 0 \oplus K, graph(T_2))$ は、非同型であるものが存在する。

2.2 有界作用素の場合

上において、T_1, T_2 を有界作用素とすると、異なることが起きることを、次に示す。

定理 2

K を Hilbert space とする。$H = K \oplus K$ とする。

$T_1, T_2 \in B(K)$ を取る。

このとき、次の (0),(1),(2),(3) は同値である。

(0) $(H; K \oplus 0, graph(T_1))$ と $(H; K \oplus 0, graph(T_2))$ は、2 subspace の system として、isomorphic である。

(1)$(H; K \oplus 0, 0 \oplus K, graph(T_1))$ と $(H; K \oplus 0, 0 \oplus K, graph(T_2))$ は、isomorphic である。

(2)$T_1 : K \to K$ と $T_2 : K \to K$ は、A_2-Dynkin Quiver の Hilbert representation として、isomorphic である。

(3) operator range $ran(T_1)$ と $ran(T_2)$ は、unitary 同値であり、$dim(kerT_1) = dim(kerT_2)$.

2.3 非同型の例

次に、二つの subspace の system としての非同型 の例を与える。

定理 3

$0 < \beta < \alpha$ とする。$a \in \ell^\alpha(\mathbb{N}), a \notin \ell^\beta(\mathbb{N})$ かつ $b \in \ell^\beta(\mathbb{N})$ とする。T_1 を $K = \ell^2(\mathbb{N})$ 上の対角成分 $\{a_n\}$ をもつ対角作用素とする。T_2 を $K = \ell^2(\mathbb{N})$ 上の対角成分 $\{b_n\}$ をもつ対角作用素とする。このとき、

$(H; K \oplus 0, graphT_1)$ と $(H; K \oplus 0, graphT_2)$ は、二つの subspace の system として非同型である。

参考文献

[1] M. Enomoto and Y. Watatani, *in preparation.*

[2] M. Enomoto and Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space,* Adv. Math. **201** (2006), 263-317.

[3] P. Fillmore and J. Williams, On operator ranges, Adv. Math. 7 (1971), 254-281.

[4] P. R. Halmos, *Two subspaces,* Trans. Amer. Math. Soc. 144(1969), 381-389.