数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 35-45

結晶基底の多面体表示と正値性を持つ完全基底

東京工業大学理学院数学系 藤田 直樹 (Naoki Fujita)* †
Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

概 要

本稿は RIMS 共同研究「表現論と組合せ論」における講演内容をまとめたものである. 大矢浩徳氏との共同研究 [5] に基づき, シューベルト多様体の列から定まる幾何学的に自然な付値と結晶基底の多面体表示の間の関係について解説する.

1 導入

Newton-Okounkov 凸体は Okounkov [28, 29, 30] によって導入された後 Kaveh-Khovanskii [13] および Lazarsfeld-Mustata [19] によって系統的な定義がなされた概念であり, トーリック多様体の理論の拡張として注目されている. 特筆すべきことはシューベルト多様体の Newton-Okounkov 凸体と表現論との間に密接な関係があることである. 筆者は内藤聡教授との共同研究 [4] において, シューベルト多様体のある付値 (highest term valuation) に関する Newton-Okounkov 凸体が 中島-Zelevinsky による結晶基底の多面体表示と一致していることを見出した; ここで結晶基底の多面体表示は有理凸多面体の格子点集合を用いた結晶基底の実現であり, 柏原作用素の明示的な記述を可能とするものである ([25, 26, 27] 参照). しかしながら highest term valuation は多項式の highest term を取り出すという代数的な形で定義されており, 自然な幾何学的解釈を持たない. 一方で Newton-Okounkov 凸体の理論においては部分多様体の列に沿って零点の位数を測っていくことで得られる幾何学的に自然な付値が存在する.

本稿ではあるシューベルト多様体の列から定まる幾何学的に自然な付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ と結晶基底の間の関係を考察する. 正確にはある種の正値性を持つ完全基底を考察し, 付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ のこの基底の上での値に対して結晶基底の言葉を用いた解釈を与える. このような正値性を持つ完全基底の存在は, Khovanov-Lauda [15, 16] および Rouquier [31] による箙ヘッケ代数を用いた量子包絡代数の下半三角部分の圏化から保証される. 応用として付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ に関するシューベルト多様体の Newton-Okounkov 凸体と結晶基底の多面体表示の一致が示される.

2 Newton-Okounkov 凸体

ここでは本稿で扱う Newton-Okounkov 凸体を定義する ([7, 13, 14] 参照). G を $\mathbb{C}$ 上の連結単連結半単純代数群とし, $B \subset G$ をボレル部分群, $T \subset B$ を極大トーラス, $W := N_G(T)/T$ をワイル群とする; ここで $N_G(T)$ は G における T の正規化群である. Bruhat 分解

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} B\tilde{w}B/B$$

を考える; ここで $\tilde{w} \in N_G(T)$ は $w \in W$ の代表元である. 各 B-軌道 $B\tilde{w}B/B$ のザリスキー閉包を $X(w)$ と書き, シューベルト多様体という. シューベルト多様体は定義から既約な射影多様体となっているが, さらに正規でもあることが知られている. 優整ウェイト全体のなす集合を P_+ とし, $\lambda \in P_+$ に対して G/B 上の直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ を

$$\mathcal{L}_\lambda := (G \times \mathbb{C})/B$$

*E-mail address: fujita.n.ac@m.titech.ac.jp
†日本学術振興会特別研究員 (DC1)

と定める; ここで B の $G\times\mathbb{C}$ への右作用は $g\in G$, $c\in\mathbb{C}$, および $b\in B$ に対して

$$(g,c)\cdot b := (gb, \lambda(b)c)$$

と定義する.

命題 2.1. 集合 $\{\mathcal{L}_\lambda \mid \lambda\in P_+\}$ は G/B 上の大域切断で生成される直線束全体のなす集合と一致する.

直線束 $\mathcal{L}_\lambda$ を制限して得られる $X(w)$ 上の直線束もまた $\mathcal{L}_\lambda$ と書くことにする. $\lambda\in P_+$ に対して最高ウェイト λ の既約最高ウェイト G-加群を $V(\lambda)$ とし, その最高ウェイトベクトルを v_λ とする. $w\in W$ に対応する Demazure 部分加群を $V_w(\lambda)\subset V(\lambda)$ と書くと, Borel-Weil 型の定理により大域切断のなす空間 $H^0(X(w),\mathcal{L}_\lambda)$ は双対加群 $V_w(\lambda)^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_w(\lambda),\mathbb{C})$ と同型な B-加群である ([17, Corollary 8.1.26] 参照). $U^-\subset G$ を opposite Borel 部分群 B^- の冪単根基とし, 共通部分 $U^-\cap X(w)$ を考える; ただし自然な埋め込み

$$U^-\hookrightarrow G/B,\ u\mapsto u \bmod B,$$

によって U^- を G/B の開部分多様体とみなしている. 共通部分 $U^-\cap X(w)$ は $X(w)$ の開部分多様体であり, 同時に U^- の閉部分多様体にもなっている. $\mathfrak{g}$ を G のリー代数とし, $e_i, f_i, h_i\in\mathfrak{g}$, $i\in I$, を Chevalley 生成元とする; ここで I はディンキン図形の頂点集合である.

定義 2.2. 語 $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_r)\in I^r$ が $w\in W$ の簡約語であるとは, 次の写像が $\mathbb{C}^r$ から $U^-\cap X(w)$ への双有理射を定めることである:

$$\mathbb{C}^r\to G/B,$$
$$(t_1,\ldots,t_r)\mapsto \exp(t_1 f_{i_1})\cdots\exp(t_r f_{i_r}) \bmod B.$$

$\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_r)\in I^r$ を $w\in W$ の簡約語とし, 対応する双有理射 $\mathbb{C}^r\to U^-\cap X(w)$ を用いて関数体 $\mathbb{C}(X(w))=\mathbb{C}(U^-\cap X(w))$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1,\ldots,t_r)$ と同一視する. $X_{\geq r+1} := B/B$ とし, 各 $1\leq k\leq r$ に対して G/B の閉部分多様体 $X_{\geq k}$ を部分集合

$$\exp(\mathbb{C}f_{i_k})\cdots\exp(\mathbb{C}f_{i_r})B/B\subset G/B$$

のザリスキー閉包として定義する. このとき $X_{\geq k}$ はシューベルト多様体であり, $X_{\geq k}=X(w_{\geq k})$ となる $w_{\geq k}\in W$ を取ると, 語 $(i_k,\ldots,i_r)\in I^{r-k+1}$ は $w_{\geq k}$ の簡約語になっている. シューベルト多様体の列

$$B/B = X_{\geq r+1}\subset X_{\geq r}\subset\cdots\subset X_{\geq 2}\subset X_{\geq 1}=X(w)$$

を考える. この列に沿って零点の位数を測っていくことにより関数体 $\mathbb{C}(X(w))$ 上の付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ が得られる. 以下で付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ の厳密な定義について説明する. $X_{\geq k+1}$ の生成点を $\eta_{\geq k+1}$ とすると, シューベルト多様体 $X_{\geq k}$ の正規性から茎 $(\mathcal{O}_{X_{\geq k}})_{\eta_{\geq k+1}}$ は離散付値環となっており, 有理関数 $t_k\in\mathbb{C}(X(w))$ はその極大イデアルの生成元を定めている. この離散付値環に対応する付値 $\mathrm{ord}_{X_{\geq k+1}}\colon \mathbb{C}(X_{\geq k})\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}$ を考える.

定義 2.3. $\mathbf{i}=(i_1,\ldots,i_r)\in I^r$ を $w\in W$ の簡約語としたとき, 付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}\colon \mathbb{C}(X(w))\setminus\{0\}\to\mathbb{Z}^r$, $f\mapsto(a_1,\ldots,a_r)$, が次のように定義される:

$$a_1 := \mathrm{ord}_{X_{\geq 2}}(f),\ a_2 := \mathrm{ord}_{X_{\geq 3}}((ft_1^{-a_1})|_{X_{\geq 2}}),\ a_3 := \mathrm{ord}_{X_{\geq 4}}((((ft_1^{-a_1})|_{X_{\geq 2}}\cdot t_2^{-a_2})|_{X_{\geq 3}}),\ldots$$

大域切断 $\tau_\lambda\in H^0(X(w),\mathcal{L}_\lambda)$ を G-加群 $H^0(G/B,\mathcal{L}_\lambda)$ における最低ウェイトベクトルの制限として定義する.

定義 2.4 ([7, Sect. 3.1.1] および [14, Definition 1.10] 参照). $\mathbf{i} \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし, $\lambda \in P_+$ とする. 半群 $S(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^r$ を

$$S(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} \{(k, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\sigma/\tau_\lambda^k)) \mid \sigma \in H^0(X(w), \mathcal{L}_\lambda^{\otimes k}) \setminus \{0\}\}$$

と定義する. さらにこの $S(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda)$ を含む最小の実閉錐を $C(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda) \subset \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^r$ とし, 集合 $\Delta(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda) \subset \mathbb{R}^r$ を

$$\Delta(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r \mid (1, \mathbf{a}) \in C(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda)\}$$

と定める. この集合 $\Delta(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}, \tau_\lambda)$ を **Newton-Okounkov 凸体**という.

$\mathbb{Z}^r$ 上の全順序 $<$ を次で定義する: $(a_1, \ldots, a_r), (a'_1, \ldots, a'_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して,

$$(a_1, \ldots, a_r) < (a'_1, \ldots, a'_r) \iff \text{ある } 1 \leq k \leq r \text{ について, } a_1 = a'_1, \ldots, a_{k-1} = a'_{k-1},\ a_k < a'_k.$$

この全順序 $<$ を用いて $t_1, \ldots, t_r$ を変数とする単項式たちの間の順序 $<$ を次で定義する:

$$t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} < t_1^{a'_1} \cdots t_r^{a'_r} \iff (a_1, \ldots, a_r) < (a'_1, \ldots, a'_r).$$

以上の準備のもとで付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}\colon \mathbb{C}(X(w)) \setminus \{0\}\ (= \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_r) \setminus \{0\}) \to \mathbb{Z}^r$ を次のように定める: $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_r] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}(f/g) := v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}(f) - v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}(g)$ とし, $f = ct_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} + (\text{higher terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_r] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}(f) := (a_1, \ldots, a_r)$ とする; ここで c は 0 でない複素数であり, "higher terms" は上で定めた順序 $<$ に関して $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ より大きい単項式たちの線形結合である. 次は定義より直ちに従う.

命題 2.5. $\mathbf{i} \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とする. このとき $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}} = v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}$ が成り立つ.

3 結晶基底の多面体表示

$\lambda \in P_+$ に対して既約最高ウェイト G-加群 $V(\lambda)$ の q-類似 $V_q(\lambda)$ の結晶基底を $\mathcal{B}(\lambda)$ とし, $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i\colon \mathcal{B}(\lambda) \to \mathcal{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$, $i \in I$, をその柏原作用素とする; ここで θ は $\mathcal{B}(\lambda)$ に含まれていない付加的な元である.

命題 3.1 ([12, Proposition 3.2.3] 参照). $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし, $\lambda \in P_+$ とする. このとき部分集合

$$\mathcal{B}_w(\lambda) := \{\tilde{f}_{i_1}^{a_1} \cdots \tilde{f}_{i_r}^{a_r} b_\lambda \mid a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\} \setminus \{\theta\}$$

は簡約語 $\mathbf{i}$ の取り方に依らない; ここで $b_\lambda \in \mathcal{B}(\lambda)$ は最高ウェイトベクトル $v_\lambda \in V(\lambda)$ に対応する元である.

部分集合 $\mathcal{B}_w(\lambda)$ を **Demazure 結晶**という. 次は Demazure 結晶の基本的な性質である.

命題 3.2 ([12, Proposition 3.2.3 (ii)]). すべての $i \in I$, $w \in W$, および $\lambda \in P_+$ に対して

$$\tilde{e}_i \mathcal{B}_w(\lambda) \subset \mathcal{B}_w(\lambda) \cup \{\theta\}$$

が成り立つ.

$\mathfrak{t} := \sum_{i \in I} \mathbb{C} h_i \subset \mathfrak{g}$ とし, $\mathfrak{t}^* := \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{t}, \mathbb{C})$ をその双対空間, $\{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{t}^*$ を単純ルート全体のなす集合とする. $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし, $1 \leq k \leq r$, $i \in I$, $\lambda \in P_+$, および

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して

$$\sigma_k(\mathbf{a}) := a_k + \sum_{1 \le j < k} \langle \alpha_{i_j}, h_{i_k} \rangle a_j \in \mathbb{Z},$$

$$\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) := \begin{cases} \max\{\sigma_k(\mathbf{a}) \mid 1 \le k \le r,\ i_k = i\} & (i_k = i \text{ となる } 1 \le k \le r \text{ が存在するとき}), \\ 0 & (\text{その他のとき}), \end{cases}$$

$$M^{(i)}(\mathbf{a}) := \{1 \le k \le r \mid i_k = i,\ \sigma_k(\mathbf{a}) = \sigma^{(i)}(\mathbf{a})\},$$

$$\sigma_\lambda^{(i)}(\mathbf{a}) := -\langle \lambda, h_i \rangle + \sum_{1 \le j \le r} \langle \alpha_{i_j}, h_i \rangle a_j \in \mathbb{Z}$$

とする．これらの記号を用いて $\mathbb{Z}^r$ 上の作用素 $\tilde{e}_i \colon \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r \cup \{\theta\}$, $i \in I$, を次のように定義する:

$$\tilde{e}_i \mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{a} - \mathbf{e}_{\min M^{(i)}(\mathbf{a})} & (\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > \max\{0, \sigma_\lambda^{(i)}(\mathbf{a}) - 1\} \text{ のとき}), \\ \theta & (\text{その他のとき}); \end{cases}$$

ここで θ は $\mathbb{Z}^r$ に含まれていない付加的な元であり，$\mathbf{e}_k \in \mathbb{Z}^r$ は $1 \le k \le r$ に対応する単位ベクトルである．このとき Demazure 結晶 $\mathcal{B}_w(\lambda)$ は次のようにして $\mathbb{Z}^r$ の中に埋め込まれる．

命題 3.3 ([25, Theorem 3.2] および [26, Proposition 3.1] 参照)**.** $w \in W$ の簡約語 $\mathbf{i} \in I^r$ および $\lambda \in P_+$ に対して，単射 $\Psi_\mathbf{i} \colon \mathcal{B}_w(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$ であって次の条件を満たすものが唯一つ存在する:

(i) $\Psi_\mathbf{i}(b_\lambda) = (0, \ldots, 0)$,

(ii) すべての $i \in I$ および $b \in \mathcal{B}_w(\lambda)$ に対して $\Psi_\mathbf{i}(\tilde{e}_i b) = \tilde{e}_i \Psi_\mathbf{i}(b)$ が成り立つ; ただし $\Psi_\mathbf{i}(\theta) := \theta$ とする．

単射 $\Psi_\mathbf{i} \colon \mathcal{B}_w(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$ を柏原埋め込みという．

注意 3.4. 最長元 w_0 に対応する Demazure 結晶 $\mathcal{B}_{w_0}(\lambda)$ は結晶基底 $\mathcal{B}(\lambda)$ と一致している．そのため $\mathbf{i} \in I^r$ が最長元 $w_0 \in W$ の簡約語のとき，柏原埋め込み $\Psi_\mathbf{i}$ は $\mathcal{B}(\lambda)$ の埋め込みを与えている．$i \in I$ に対して $\mathbb{Z}^r$ 上の作用素 $\tilde{f}_i \colon \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}^r \cup \{\theta\}$ を次のように定義する:

$$\tilde{f}_i \mathbf{a} := \begin{cases} \mathbf{a} + \mathbf{e}_{\max M^{(i)}(\mathbf{a})} & (\sigma^{(i)}(\mathbf{a}) > \sigma_\lambda^{(i)}(\mathbf{a}) \text{ のとき}), \\ \theta & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

このときすべての $i \in I$ および $b \in \mathcal{B}(\lambda)$ に対して $\Psi_\mathbf{i}(\tilde{f}_i b) = \tilde{f}_i \Psi_\mathbf{i}(b)$ が成り立つ．

定義 3.5 ([4, Definition 2.15] および [26, Sect. 3.1] 参照)**.** $\mathbf{i} \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし，$\lambda \in P_+$ とする．部分集合 $\mathcal{S}_\mathbf{i}(\lambda) \subset \mathbb{Z}_{>0} \times \mathbb{Z}^r$ を

$$\mathcal{S}_\mathbf{i}(\lambda) := \bigcup_{k \in \mathbb{Z}_{>0}} \{(k, \Psi_\mathbf{i}(b)) \mid b \in \mathcal{B}_w(k\lambda)\}$$

と定義し，$\mathcal{C}_\mathbf{i}(\lambda) \subset \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}^r$ を $\mathcal{S}_\mathbf{i}(\lambda)$ を含む最小の実閉錐とする．さらに集合 $\Delta_\mathbf{i}(\lambda) \subset \mathbb{R}^r$ を

$$\Delta_\mathbf{i}(\lambda) := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^r \mid (1, \mathbf{a}) \in \mathcal{C}_\mathbf{i}(\lambda)\}$$

と定める．この集合 $\Delta_\mathbf{i}(\lambda)$ を **中島-Zelevinsky 多面体**という．

例 3.6. $G = SL_3(\mathbb{C})$ とし，$V(\lambda) = \mathfrak{sl}_3(\mathbb{C})$ をその随伴表現とする．このとき [25, Theorem 4.1] により，最長元 $w_0 \in W$ の簡約語 $\mathbf{i} = (1, 2, 1)$ に対して 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_\mathbf{i}(\lambda)$ は次で与えられる (図 1 参照):

$$\Delta_\mathbf{i}(\lambda) = \{(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le a_1 \le 1,\ 0 \le a_3 \le 1,\ a_1 \le a_2 \le a_3 + 1\}.$$

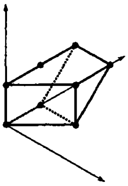

図 1: $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$

また各 $\mathbf{a} \in \Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \cap \mathbb{Z}^3$ に対して $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2$ の作用は次で与えられる:

$$\tilde{e}_1\mathbf{a} = \begin{cases} (a_1 - 1, a_2, a_3) & (a_1 \geq \max\{2a_1 - a_2 + a_3, 1\} \text{ のとき}), \\ (a_1, a_2, a_3 - 1) & (2a_1 - a_2 + a_3 > \max\{a_1, 0\} \text{ のとき}), \\ \theta & (\text{その他のとき}), \end{cases}$$

$$\tilde{e}_2\mathbf{a} = \begin{cases} (a_1, a_2 - 1, a_3) & (a_2 > a_1 \text{ のとき}), \\ \theta & (\text{その他のとき}). \end{cases}$$

簡約語 $\mathbf{i} = (1,2,1)$ を用いて関数体 $\mathbb{C}(G/B) = \mathbb{C}(X(w_0))$ を有理関数体 $\mathbb{C}(t_1, t_2, t_3)$ と同一視する. このとき次の集合は $\mathbb{C}$-部分空間 $\{\sigma/\tau_\lambda \mid \sigma \in H^0(G/B, \mathcal{L}_\lambda)\} \subset \mathbb{C}(G/B)$ の $\mathbb{C}$-基底を与える:

$$\{1, t_1 + t_3, t_2, t_1t_2, t_2t_3, t_1t_2(t_1 + t_3), t_2^2t_3, t_1t_2^2t_3\}.$$

命題 2.5 より, この基底の上での $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ の値は次の表のようになる.

f	1	$t_1 + t_3$	t_2	t_1t_2	t_2t_3	$t_1t_2(t_1 + t_3)$	$t_2^2t_3$	$t_1t_2^2t_3$
$v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(f)$	$(0,0,0)$	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(1,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,1,1)$	$(0,2,1)$	$(1,2,1)$

これらの値がなす集合は 中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ の格子点全体がなす集合と一致している.

中島-Zelevinsky 多面体 $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は次のように Demazure 結晶 $\mathcal{B}_w(\lambda)$ の実現を与えている; これを結晶基底の多面体表示という.

命題 3.7 ([4, Corollaries 2.20, 4.3 (3)] 参照). $\mathbf{i} \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし, $\lambda \in P_+$ とする. このとき $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ は有理凸多面体であり, $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) \cap \mathbb{Z}^r = \Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}_w(\lambda))$ が成り立つ.

注意 3.8. 組 $(\mathbf{i}, \lambda)$ についてのある条件の下では, [25, Theorem 4.1] および [26, Proposition 3.1] により $\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$ を与える明示的な線形不等式系を構成することができ, この場合の命題 3.7 はその系として従う.

命題 3.7 の証明では Newton-Okounkov 凸体の理論を用いる. ここでその証明について簡単に説明する. $\mathbb{Z}^r$ 上の全順序 $\prec$ を次で定義する: $(a_1, \ldots, a_r), (a'_1, \ldots, a'_r) \in \mathbb{Z}^r$ に対して,

$$(a_1, \ldots, a_r) \prec (a'_1, \ldots, a'_r) \iff \text{ある } 1 \leq k \leq r \text{ について, } a_r = a'_r, \ldots, a_{k+1} = a'_{k+1},\ a_k < a'_k.$$

この全順序 $\prec$ を用いて $t_1, \ldots, t_r$ を変数とする単項式たちの間の順序 $\prec$ を次で定義する:

$$t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} \prec t_1^{a'_1} \cdots t_r^{a'_r} \iff (a_1, \ldots, a_r) \prec (a'_1, \ldots, a'_r).$$

以上の準備のもとで付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}} \colon \mathbb{C}(X(w)) \setminus \{0\}\ (= \mathbb{C}(t_1, \ldots, t_r) \setminus \{0\}) \to \mathbb{Z}^r$ を次のように定める: $f, g \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_r] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(f/g) := v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(f) - v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(g)$ とし, $f = ct_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r} + (\text{lower terms}) \in \mathbb{C}[t_1, \ldots, t_r] \setminus \{0\}$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}(f) := -(a_1, \ldots, a_r)$ とする; ここで c は 0 でない複素数であり, "lower terms" は上で定めた順序 $\prec$ に関して $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ より小さい単項式たちの線形結合である.

定理 3.9 ([4, Corollary 4.2]). $\mathbf{i} \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし, $\lambda \in P_+$ とする. このとき

$$\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda) = -\Delta(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}, \tau_\lambda)$$

が成り立つ; ただし Newton-Okounkov 凸体 $\Delta(X(w), \mathcal{L}_\lambda, v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}, \tau_\lambda)$ は定義 2.4 と同様に定義する.

定理 3.9 および Newton-Okounkov 凸体の凸性を用いて命題 3.7 が証明される. 本稿の目的は定理 3.9 における highest term valuation $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{high}}$ をより幾何学的に自然な付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ に取り換えることである.

$\mathfrak{u}^-$ を U^- のリー代数とし, $\mathcal{B}(\infty)$ を普遍包絡代数 $U(\mathfrak{u}^-)$ の q-類似 $U_q(\mathfrak{u}^-)$ の結晶基底とする. このとき自然な全射 $\pi_\lambda \colon U(\mathfrak{u}^-) \twoheadrightarrow V(\lambda)$, $u \mapsto uv_\lambda$, に対応して, 全射 $\pi_\lambda \colon \mathcal{B}(\infty) \to \mathcal{B}(\lambda) \cup \{\theta\}$ が存在する.

命題 3.10 ([10, Theorem 5 (ii)]). $\lambda \in P_+$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda) := \{b \in \mathcal{B}(\infty) \mid \pi_\lambda(b) \neq \theta\}$$

とすると, π_λ は $\widetilde{\mathcal{B}}(\lambda)$ から $\mathcal{B}(\lambda)$ の上への全単射を誘導する.

命題 3.10 より, $w \in W$ および $\lambda \in P_+$ に対して

$$\widetilde{\mathcal{B}}_w(\lambda) := \{b \in \mathcal{B}(\infty) \mid \pi_\lambda(b) \in \mathcal{B}_w(\lambda)\}$$

とすると, 制限写像 $\pi_\lambda \colon \widetilde{\mathcal{B}}_w(\lambda) \to \mathcal{B}_w(\lambda)$ は全単射である. $w \in W$ に対して,

$$\mathcal{B}_w(\infty) := \bigcup_{\lambda \in P_+} \widetilde{\mathcal{B}}_w(\lambda)$$

とする. このとき全単射 $\pi_\lambda \colon \widetilde{\mathcal{B}}_w(\lambda) \to \mathcal{B}_w(\lambda)$ を通して, 柏原埋め込み $\Psi_{\mathbf{i}} \colon \mathcal{B}_w(\lambda) \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$ は単射 $\Psi_{\mathbf{i}} \colon \mathcal{B}_w(\infty) \hookrightarrow \mathbb{Z}^r$ を誘導する.

注意 3.11. $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_r) \in I^r$ を $w \in W$ の簡約語とし, $\mathcal{C}_{\mathbf{i}^{\mathrm{op}}}$ を w^{-1} の簡約語 $\mathbf{i}^{\mathrm{op}} := (i_r, \ldots, i_1)$ に関するストリング多面錐とする; $\mathcal{C}_{\mathbf{i}^{\mathrm{op}}}$ は有理凸多面錐であることが知られている ([3, Sect. 3.2, Theorem 3.10] 参照). $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_r) \in \mathbb{R}^r$ に対して $\mathbf{a}^{\mathrm{op}} := (a_r, \ldots, a_1)$ とし, $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^r$ に対して $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} := \{\mathbf{a}^{\mathrm{op}} \mid \mathbf{a} \in \mathcal{C}\}$ とする. このとき像 $\Psi_{\mathbf{i}}(\mathcal{B}_w(\infty))$ は有理凸多面錐 $\mathcal{C}_{\mathbf{i}^{\mathrm{op}}}^{\mathrm{op}}$ の格子点全体のなす集合と一致する ([27, Sect. 2.4] 参照).

4 正値性を持つ完全基底

結晶基底の多面体表示と付値 $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}$ に関する Newton-Okounkov 凸体を結び付けるため, ある種の正値性を持つ完全基底を考察する.

普遍包絡代数 $U(\mathfrak{u}^-)$ は次で定める余積 Δ, 余単位射 ε, および対蹠 S により Hopf 代数となる: $i \in I$ に対して,

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes 1 + 1 \otimes f_i,\ \varepsilon(f_i) = 0,\ S(f_i) = -f_i.$$

また $\mathbf{e}_i \in \mathbb{Z}^I$ を $i \in I$ に対応する単位ベクトルとすると, f_i の次数を $\mathbf{e}_i$ とすることで $U(\mathfrak{u}^-)$ は $\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$-次数付き $\mathbb{C}$-代数となる:

$$U(\mathfrak{u}^-) = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} U(\mathfrak{u}^-)_{\mathbf{d}}.$$

$\mathbb{Z}_{\geq 0}^I$-次数付き $\mathbb{C}$-ベクトル空間としての双対

$$U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr}} = \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},\mathbf{d}} := \bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U(\mathfrak{u}^-)_{\mathbf{d}}, \mathbb{C})$$

を考えよう. $U(\mathfrak{u}^-)$ が Hopf 代数であることから, その双対 $U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr}}$ にも自然な Hopf 代数の構造が入っている. 一方で座標環 $\mathbb{C}[U^-]$ も以下で定まる Hopf 代数の構造を持っている: $f \in \mathbb{C}[U^-]$ および $u, u_1, u_2 \in U^-$ に対して,

$$\Delta(f)(u_1, u_2) = f(u_1 u_2),\ \varepsilon(f) = f(1),\ S(f)(u) = f(u^{-1}).$$

このとき座標環 $\mathbb{C}[U^-]$ は Hopf 代数として $U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr}}$ と同型であることが知られている ([6, Proposition 5.1] 参照). $U(\mathfrak{u}^-)$ 上の anti-involution $*$ を $f_i^* = f_i$, $i \in I$, により定義し, $\mathbb{C}[U^-]$ 上の involution $*$ をその双対とする.

定義 4.1 ([2, Definition 5.30] および [8, Definition 4.5, Theorem 4.19] 参照). 座標環 $\mathbb{C}[U^-]$ の $\mathbb{C}$-基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} = \{\Xi^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ が完全基底であるとは, 次の条件を満たすことである:

(i) すべての $b \in \mathcal{B}(\infty)$ に対して $\Xi^{\mathrm{up}}(b) \in U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},\mathbf{d}(b)}$; ただし $\mathbf{d}(b) = (d_i)_{i \in I}$ は $\mathrm{wt}(b) = -\sum_{i \in I} d_i \alpha_i$ により定義する,

(i)′ $\Xi^{\mathrm{up}}(b_\infty)(e) = 1$; ここで $e \in U^-$ は単位元であり, $b_\infty \in \mathcal{B}(\infty)$ は $1 \in U_q(\mathfrak{u}^-)$ に対応する元である,

(ii) $(\mathbf{B}^{\mathrm{up}})^* = \mathbf{B}^{\mathrm{up}}$,

(iii) すべての $i \in I$, $b \in \mathcal{B}(\infty)$, および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$f_i^k \cdot \Xi^{\mathrm{up}}(b) \in \mathbb{C}^\times \Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{e}_i^k b) + \sum_{b' \in \mathcal{B}(\infty);\ \varepsilon_i(b') < \varepsilon_i(b) - k} \mathbb{C}\Xi^{\mathrm{up}}(b');$$

ただし $\Xi^{\mathrm{up}}(\theta) := 0$ とする.

例 4.2. Lusztig [20, 21, 22] および柏原 [9, 10] は $U(\mathfrak{u}^-)$ のある特別な $\mathbb{C}$-基底 $\{G^{\mathrm{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ を $\mathfrak{g}$ に付随する量子包絡代数 $U_q(\mathfrak{g})$ を用いて構成した. この基底を**標準基底**または**下側大域基底**といい, 双対基底 $\{G^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset \mathbb{C}[U^-]$ を**双対標準基底**または**上側大域基底**という. [11, Proposition 5.3.1] および [12, Theorem 2.1.1] により, 上側大域基底 $\{G^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ は完全基底となっている ([4, Proposition 2.8 (1)] 参照).

例 4.3. G が simply-laced のとき, Lusztig [23] は半標準基底と呼ばれる $U(\mathfrak{u}^-)$ の特別な $\mathbb{C}$-基底を構成した. [23, Sect. 2.9, Theorem 3.8] より半標準基底の双対基底は完全基底となっており, これを双対半標準基底という.

例 4.4. Khovanov-Lauda [15, 16] および Rouquier [31] は **Khovanov-Lauda-Rouquier 代数** または箙ヘッケ代数と呼ばれる $\mathbb{Z}$-次数付き代数の族 $\{R_{\mathbf{d}} \mid \mathbf{d} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}\}$ を導入した. この族を用いて量子包絡代数 $U_q(\mathfrak{g})$ の下半三角部分 $U_q(\mathfrak{u}^-)$ を圏化することができる. 正確には $G_0(R_{\mathbf{d}}\text{-gmod})$ を有限次元 $\mathbb{Z}$-次数付き $R_{\mathbf{d}}$-加群がなす圏の Grothendieck 群としたとき, 直和

$$\bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} G_0(R_{\mathbf{d}}\text{-gmod})$$

はある誘導関手から定まる $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-代数の構造を持っており ([15, Proposition 3.1] 参照), $U_q(\mathfrak{u}^-)$ のある $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-form $\widetilde{U}_{q,\mathbb{Z}}(\mathfrak{u}^-)$ と同型になっている ([8, Sect. 5.1] および [15, Proposition 3.4, Theorem 3.17] 参照); ここで直和 $\bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} G_0(R_{\mathbf{d}}\text{-gmod})$ への q の作用は次数シフトにより与えられる. また $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-form $\widetilde{U}_{q,\mathbb{Z}}(\mathfrak{u}^-)$ の $q = 1$ による特殊化は座標環 $\mathbb{C}[U^-]$ と一致する. ここで直和 $\bigoplus_{\mathbf{d} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} G_0(R_{\mathbf{d}}\text{-gmod})$ には自己双対な $\mathbb{Z}$-次数付き単純加群全体のなす集合により定まる $\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$-基底が存在する; これを **KLR-基底**と呼ぶことにする. KLR-基底の $q = 1$ による特殊化は完全基底となっていることが知られている ([8, Lemmas 3.13, 5.3] および [18, Sect. 2.5.1] 参照); ここで定義 4.1 の条件 (ii) は $R_{\mathbf{d}}$ のある自己同型 σ による $R_{\mathbf{d}}$-加群の twist が involution $*$ と対応することから従っている ([15, Sect. 2.1] および [24, Sect. 12] 参照).

定義 4.1 の条件 (i), (i)$'$, (ii) を満たす $\mathbb{C}$-基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} = \{\Xi^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset \mathbb{C}[U^-]$ を取り, その双対基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{low}} = \{\Xi^{\mathrm{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset U(\mathfrak{u}^-)$ を考える. このとき $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ が完全基底であることと, $\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ が次の条件 (iii)$^{\mathrm{low}}$ を満たすことは同値である:

(iii)$^{\mathrm{low}}$ すべての $i \in I$, $b \in \mathcal{B}(\infty)$, および $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$f_i^k \cdot \Xi^{\mathrm{low}}(b) \in \mathbb{C}^\times \Xi^{\mathrm{low}}(\tilde{f}_i^k b) + \sum_{b' \in \mathcal{B}(\infty);\ \varepsilon_i(b') > \varepsilon_i(b)+k} \mathbb{C}\Xi^{\mathrm{low}}(b');$$

ただし $\Xi^{\mathrm{low}}(\theta) := 0$ とする.

条件 (iii)$^{\mathrm{low}}$ を満たすとき, $\mathbf{B}^{\mathrm{low}}$ は**下側完全基底**であるという.

注意 4.5. Baumann [1] が導入した "bases of canonical type" の定義はここでの下側完全基底の定義より若干強いものになっている. "bases of canonical type" の定義では (iii)$^{\mathrm{low}}$ の式における $\Xi^{\mathrm{low}}(\tilde{f}_i^k b)$ の係数にある条件が課されている.

完全基底 $\{\Xi^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset \mathbb{C}[U^-]$ は既約最高ウェイト G-加群 $V(\lambda)$ の $\mathbb{C}$-基底を誘導することが知られている. 以下で詳しく説明する. $\mathbf{B}^{\mathrm{low}} = \{\Xi^{\mathrm{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset U(\mathfrak{u}^-)$ を完全基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} = \{\Xi^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\} \subset \mathbb{C}[U^-]$ の双対基底とする. 自然な全射 $\pi_\lambda \colon U(\mathfrak{u}^-) \twoheadrightarrow V(\lambda)$ を用いて, $b \in \widetilde{\mathcal{B}}(\lambda)$ に対して $\Xi_\lambda^{\mathrm{low}}(\pi_\lambda(b)) := \pi_\lambda(\Xi^{\mathrm{low}}(b)) \in V(\lambda)$ と定義する.

命題 4.6 ([5, Proposition 3.16 (1)] 参照). $\lambda \in P_+$ とする.

(1) $\{\Xi_\lambda^{\mathrm{low}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\lambda)\}$ は $V(\lambda)$ の $\mathbb{C}$-基底である.

(2) すべての $b \in \mathcal{B}(\infty) \setminus \widetilde{\mathcal{B}}(\lambda)$ に対して $\pi_\lambda(\Xi^{\mathrm{low}}(b)) = 0$ である.

本稿では次の正値性条件を満たす完全基底を考察する.

$(\mathrm{P})_1$ すべての $i \in I$ および $b \in \mathcal{B}(\infty)$ に対して $(-f_i) \cdot \Xi^{\mathrm{up}}(b) \in \sum_{b' \in \mathcal{B}(\infty)} \mathbb{R}_{\geq 0} \Xi^{\mathrm{up}}(b')$ が成り立つ;

$(\mathrm{P})_2$ すべての $i \in I$ および $b \in \mathcal{B}(\infty)$ に対して $\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i b_\infty) \cdot \Xi^{\mathrm{up}}(b) \in \sum_{b' \in \mathcal{B}(\infty)} \mathbb{R}_{\geq 0} \Xi^{\mathrm{up}}(b')$ が成り立つ.

例 4.7. G が simply-laced の場合には, [21, Theorem 11.5] により上側大域基底 $\{G^{\mathrm{up}}(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ は正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ および $(\mathrm{P})_2$ を満たしている.

例 4.8. 一般の G に対しては KLR-基底の $q = 1$ による特殊化が正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ および $(\mathrm{P})_2$ を満たす完全基底の存在を保証することが知られている ([15, 16] 参照). 以下で詳しく説明する. KLR-基底 $\{[S(b)] \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ は自己双対な $\mathbb{Z}$-次数付き単純加群全体のなす集合 $\{S(b) \mid b \in \mathcal{B}(\infty)\}$ により定まっている. 写像

$$(-f_i)\cdot \colon U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},\mathbf{d}} \to U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},\mathbf{d}-\mathbf{e}_i} \text{ および}$$
$$[S(\tilde{f}_i b_\infty)]_{q=1}\cdot \colon U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},\mathbf{d}} \to U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},\mathbf{d}+\mathbf{e}_i}$$

を考えると, これらはそれぞれある制限関手 Res: $R_{\mathbf{d}}$-gmod $\to R_{\mathbf{d}-\mathbf{e}_i}$-gmod およびある誘導関手 Ind: $R_{\mathbf{d}}$-gmod $\to R_{\mathbf{d}+\mathbf{e}_i}$-gmod と対応している ([8, Sect. 5.1] および [15, Sects. 2.6, 3.1] 参照). ここですべての $i \in I$ および $b \in \mathcal{B}(\infty)$ に対して, Grothendieck 群 $G_0(R_{\mathbf{d}\mp\mathbf{e}_i}\text{-gmod})$ において次が成り立つ:

$$[\mathrm{Res}(S(b))] = \sum_{b' \in \mathcal{B}(\infty), m \in \mathbb{Z}} c_{i,b}^{(m,b')}[S(b')[m]] \text{ および}$$
$$[\mathrm{Ind}(S(b))] = \sum_{b' \in \mathcal{B}(\infty), m \in \mathbb{Z}} d_{i,b}^{(m,b')}[S(b')[m]];$$

ただし $S(b')[m]$ は $S(b')$ の次数付けを m だけずらしたものである. 係数 $c_{i,b}^{(m,b')}$ および $d_{i,b}^{(m,b')}$ はそれぞれ $\mathrm{Res}(S(b))$ および $\mathrm{Ind}(S(b))$ の組成列における $S(b')[m]$ の重複度であり, 特に非負の整数となっている. $q=1$ による特殊化は次数付けを無視することに対応するので次が成り立つ:

$$(-f_i)\cdot[S(b)]_{q=1} = \sum_{b'\in\mathcal{B}(\infty)} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{i,b}^{(m,b')})[S(b')]_{q=1} \text{ および}$$
$$[S(\tilde{f}_i b_\infty)]_{q=1}\cdot[S(b)]_{q=1} = \sum_{b'\in\mathcal{B}(\infty)} (\sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{i,b}^{(m,b')})[S(b')]_{q=1}.$$

特に係数 $\sum_{m\in\mathbb{Z}} c_{i,b}^{(m,b')}$ および $\sum_{m\in\mathbb{Z}} d_{i,b}^{(m,b')}$ は非負の整数である.

各 $b\in\mathcal{B}(\infty)$ に対して $\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)\in\mathbb{C}[U^-\cap X(w)]$ を $\Xi^{\mathrm{up}}(b)\in\mathbb{C}[U^-]$ の制限とする. 正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ を満たす完全基底は次のようにシューベルト多様体および Demazure 加群と compatible になっている.

命題 4.9 ([5, Corollary 3.20, Proposition 4.4] および [12, Sects. 3.1, 3.2] 参照). $\{\Xi^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}(\infty)\}\subset\mathbb{C}[U^-]$ を正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ を満たす完全基底とする. このときすべての $w\in W$ に対して次が成り立つ.

(1) $\{\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}_w(\infty)\}$ は座標環 $\mathbb{C}[U^-\cap X(w)]$ の $\mathbb{C}$-基底である.

(2) すべての $b\in\mathcal{B}(\infty)\setminus\mathcal{B}_w(\infty)$ に対して $\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)=0$ である.

(3) すべての $\lambda\in P_+$ に対して, $\{\Xi_\lambda^{\mathrm{low}}(b)\mid b\in\mathcal{B}_w(\lambda)\}$ は Demazure 加群 $V_w(\lambda)$ の $\mathbb{C}$-基底である.

$\{\Xi^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}(\infty)\}\subset\mathbb{C}[U^-]$ を正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ を満たす完全基底とし, $w\in W$ および $\lambda\in P_+$ に対して $\{\Xi_{\lambda,w}^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}_w(\lambda)\}\subset H^0(X(w),\mathcal{L}_\lambda)=V_w(\lambda)^*$ を $\{\Xi_\lambda^{\mathrm{low}}(b)\mid b\in\mathcal{B}_w(\lambda)\}$ の双対基底とする. このときすべての $b\in\widetilde{\mathcal{B}}_w(\lambda)$ に対して

$$\Xi_{\lambda,w}^{\mathrm{up}}(\pi_\lambda(b))/\tau_\lambda\in\mathbb{C}^\times\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)$$

が成り立つ.

5 主結果

次が本稿の主結果である.

定理 5.1. $\{\Xi^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}(\infty)\}\subset\mathbb{C}[U^-]$ を正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ および $(\mathrm{P})_2$ を満たす完全基底とし, $\mathbf{i}\in I^r$ を $w\in W$ の簡約語, $\lambda\in P_+$ とする.

(1) すべての $b\in\mathcal{B}_w(\infty)$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\Xi_w^{\mathrm{up}}(b))=\Psi_{\mathbf{i}}(b)$ が成り立つ.

(2) すべての $b\in\mathcal{B}_w(\lambda)$ に対して $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\Xi_{\lambda,w}^{\mathrm{up}}(b)/\tau_\lambda)=\Psi_{\mathbf{i}}(b)$ が成り立つ.

(3) $\Delta(X(w),\mathcal{L}_\lambda,v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}},\tau_\lambda)=\Delta_{\mathbf{i}}(\lambda)$.

ここでは証明の要点のみ説明する. $\mathbf{i}\in I^r$ を $w\in W$ の簡約語とし, 対応する双有理射 $\mathbb{C}^r\to U^-\cap X(w)$ を用いて座標環 $\mathbb{C}[U^-\cap X(w)]$ を多項式環 $\mathbb{C}[t_1,\ldots,t_r]$ の部分 $\mathbb{C}$-代数と同一視する.

命題 5.2. $\{\Xi^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}(\infty)\}\subset\mathbb{C}[U^-]$ を正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ を満たす完全基底とする. このときすべての $b\in\mathcal{B}_w(\infty)$ に対して次が成り立つ:

$$\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)\in\sum_{a_1,\ldots,a_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}\mathbb{R}_{\geq 0}t_1^{a_1}\cdots t_r^{a_r}.$$

Proof. $\mathbb{C}$-代数の埋め込み $\mathbb{C}[U^-\cap X(w)] \hookrightarrow \mathbb{C}[t_1,\dots,t_r]$ は自然に埋め込み $\mathbb{C}[U^-\cap X(w_{\geq k})] \hookrightarrow \mathbb{C}[t_k,\dots,t_r]$ を誘導している．簡約語 $\mathbf{i}$ に対応する双有理射 $\mathbb{C}^r \to U^-\cap X(w)$ の定義より，すべての $f(t_k,\dots,t_r) \in \mathbb{C}[U^-\cap X(w_{\geq k})] \subset \mathbb{C}[t_k,\dots,t_r]$ に対して次が成り立つ:

$$f_{i_k}\cdot f(t_k,\dots,t_r) = -\frac{\partial}{\partial t_k} f(t_k,\dots,t_r). \tag{1}$$

従って $b\in\mathcal{B}_w(\infty)$ および $a_1,\dots,a_r\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $A_b^{(a_1,\dots,a_r)}\in\mathbb{C}$ を $\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)\in\mathbb{C}[t_1,\dots,t_r]$ における $t_1^{a_1}\cdots t_r^{a_r}$ の係数とすると，次が成り立つ:

$$A_b^{(a_1,\dots,a_r)} = \frac{(-1)^{a_1+\cdots+a_r}}{a_1!\cdots a_r!}\eta_{r,r+1}(f_{i_r}^{a_r}\cdot(\eta_{r-1,r}(\cdots(\eta_{2,3}(f_{i_2}^{a_2}\cdot(\eta_{1,2}(f_{i_1}^{a_1}\cdot\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)))))\cdots)));$$

ここで $\eta_{k,k+1}\colon \mathbb{C}[U^-\cap X(w_{\geq k})] \twoheadrightarrow \mathbb{C}[U^-\cap X(w_{\geq k+1})]$ は制限写像である．この等式と正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ および命題 4.9 (2) により，$A_b^{(a_1,\dots,a_r)}\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ が成り立つ． □

補題 5.3. $\{\Xi^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}(\infty)\}\subset\mathbb{C}[U^-]$ を正値性条件 $(\mathrm{P})_2$ を満たす完全基底とする．このときすべての $i\in I$, $b\in\mathcal{B}(\infty)$, および $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して次が成り立つ:

$$\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i^k b_\infty)\cdot\Xi^{\mathrm{up}}(b)\in\sum_{b'\in\mathcal{B}(\infty)}\mathbb{R}_{\geq 0}\Xi^{\mathrm{up}}(b').$$

Proof. すべての $i\in I$ および $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $U(\mathfrak{u}^-)^*_{\mathrm{gr},k\mathbf{e}_i}=\mathbb{C}\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i^k b_\infty)$ である．そのため $\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i b_\infty)^k\in\mathbb{C}^\times\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i^k b_\infty)$ が成り立つ．ここで正値性条件 $(\mathrm{P})_2$ より $\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i b_\infty)^k\in\mathbb{R}_{>0}\Xi^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_i^k b_\infty)$ となるため，再び $(\mathrm{P})_2$ を用いることにより主張が示される． □

命題 2.5, 5.2, 補題 5.3 および $v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{low}}$ の定義から次が成り立つ．

命題 5.4. $\{\Xi^{\mathrm{up}}(b)\mid b\in\mathcal{B}(\infty)\}\subset\mathbb{C}[U^-]$ を正値性条件 $(\mathrm{P})_1$ および $(\mathrm{P})_2$ を満たす完全基底とし，$b,b'\in\mathcal{B}(\infty)$ に対して

$$\Xi^{\mathrm{up}}(b)\cdot\Xi^{\mathrm{up}}(b')\in\sum_{b''\in\mathcal{B}(\infty)}C_{b,b'}^{(b'')}\Xi^{\mathrm{up}}(b'')$$

と書く．このとき $w\in W$ の簡約語 $\mathbf{i}=(i_1,\dots,i_r)\in I^r$, $b\in\mathcal{B}_w(\infty)$, および $k\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$\begin{aligned} v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\Xi_w^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_{i_1}^k b_\infty))+v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)) &= v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\Xi_w^{\mathrm{up}}(\tilde{f}_{i_1}^k b_\infty)\cdot\Xi_w^{\mathrm{up}}(b)) \\ &= \min\{v_{\mathbf{i}}^{\mathrm{geom}}(\Xi_w^{\mathrm{up}}(b'))\mid b'\in\mathcal{B}_w(\infty),\ C_{\tilde{f}_{i_1}^k b_\infty,b}^{(b')}\neq 0\} \end{aligned}$$

が成り立つ; ここで "min" は $\mathbb{Z}^r$ 上の全順序 $<$ に関する最小元を表す．

帰納法を用いた主結果の証明において，命題 5.4 が induction step の議論の鍵となる．

謝辞. RIMS 共同研究「表現論と組合せ論」において講演の機会を与えてくださった和地輝仁先生にこの場を借りて御礼申し上げます．

参考文献

[1] P. Baumann, The canonical basis and the quantum Frobenius morphism, preprint 2012, arXiv:1201.0303v2.

[2] A. Berenstein and D. Kazhdan, Geometric and unipotent crystals II: From unipotent bicrystals to crystal bases, in Quantum Groups, Contemp. Math. Vol. 433, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 13–88.

[3] A. Berenstein and A. Zelevinsky, Tensor product multiplicities, canonical bases and totally positive varieties, Invent. Math. **143** (2001), 77–128.

[4] N. Fujita and S. Naito, Newton-Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases, Math. Z. **285** (2017), 325–352.
[5] N. Fujita and H. Oya, A comparison of Newton-Okounkov polytopes of Schubert varieties, J. Lond. Math. Soc. (2) **96** (2017), 201–227.
[6] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, Preprojective algebras and cluster algebras, in Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich (2008), 253–283.
[7] M. Harada and K. Kaveh, Integrable systems, toric degenerations, and Okounkov bodies, Invent. Math. **202** (2015), 927–985.
[8] S. J. Kang, S. J. Oh, and E. Park, Categorification of quantum generalized Kac-Moody algebras and crystal bases, Internat. J. Math. **23** (2012), 1250116.
[9] M. Kashiwara, Crystallizing the q-analogue of universal enveloping algebras, Comm. Math. Phys. **133** (1990), 249–260.
[10] M. Kashiwara, On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algebras, Duke Math. J. **63** (1991), 465–516.
[11] M. Kashiwara, Global crystal bases of quantum groups, Duke Math. J. **69** (1993), 455–485.
[12] M. Kashiwara, The crystal bases and Littelmann's refined Demazure character formula, Duke Math. J. **71** (1993), 839–858.
[13] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Convex bodies and algebraic equations on affine varieties, preprint 2008, arXiv:0804.4095v1; a short version with title *Algebraic equations and convex bodies* appeared in Perspectives in Analysis, Geometry, and Topology, Progr. Math. Vol. 296, Birkhäuser, 2012, 263–282.
[14] K. Kaveh and A. G. Khovanskii, Newton-Okounkov bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory, Ann. of Math. **176** (2012), 925–978.
[15] M. Khovanov and A. D. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups I, Represent. Theory **13** (2009), 309–347.
[16] M. Khovanov and A. D. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II, Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 2685–2700.
[17] S. Kumar, Kac-Moody Groups, their Flag Varieties and Representation Theory, Progr. Math. Vol. 204, Birkhäuser, 2002.
[18] A. D. Lauda and M. Vazirani, Crystals from categorified quantum groups, Adv. Math. **228** (2011), 803–861.
[19] R. Lazarsfeld and M. Mustata, Convex bodies associated to linear series, Ann. Sci. de I'ENS **42** (2009), 783–835.
[20] G. Lusztig, Canonical bases arising from quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.
[21] G. Lusztig, Quivers, perverse sheaves, and quantized enveloping algebras, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), 365–421.
[22] G. Lusztig, Introduction to Quantum Groups, Progr. Math. Vol. 110, Birkhäuser, 1993.
[23] G. Lusztig, Semicanonical bases arising from enveloping algebras, Adv. Math. **151** (2000), 129–139.
[24] P. J. McNamara, Folding KLR algebras, preprint 2016, arXiv:1603.05768v1.
[25] T. Nakashima, Polyhedral realizations of crystal bases for integrable highest weight modules, J. Algebra **219** (1999), 571–597.
[26] T. Nakashima, Polytopes for crystallized Demazure modules and extremal vectors, Comm. Algebra **30** (2002), 1349–1367.
[27] T. Nakashima and A. Zelevinsky, Polyhedral realizations of crystal bases for quantized Kac-Moody algebras, Adv. Math. **131** (1997), 253–278.
[28] A. Okounkov, Brunn-Minkowski inequality for multiplicities, Invent. Math. **125** (1996), 405–411.
[29] A. Okounkov, Multiplicities and Newton polytopes, in Kirillov's Seminar on Representation Theory, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 Vol. 181, Adv. Math. Sci. Vol. 35, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998, 231–244.
[30] A. Okounkov, Why would multiplicities be log-concave?, in The Orbit Method in Geometry and Physics, Progr. Math. Vol. 213, Birkhäuser, 2003, 329–347.
[31] R. Rouquier, 2-Kac-Moody algebras, preprint 2008, arXiv:0812.5023v1.