数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 46-49

G_{17}, G_{18}, G_{19} 型複素鏡映群に関する BMR 予想について

(On the BMR conjecture for the complex reflection groups of type G_{17}, G_{18}, G_{19})

東京大学大学院数理科学研究科　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*
Graduate Schoold of Mathematical Sciences, University of Tokyo

2017 年 10 月の RIMS 研究集会「表現論と組合せ論」での発表について，簡単に報告させていただく．[Tsu] では，いわゆる「BMR freeness conjecture」で残っていた部分を解決した．[BMR] において，Broué-Malle-Rouquier は，複素鏡映群 G について Hecke 環 $H(G)$ や braid 群といったリー理論的対象を定義し，実鏡映群についてのそれらと類似の性質をもつだろうと予想した．このうち BMR freeness conjecture（以下，BMR 予想）は「$H(G)$ は基礎環上ランク $|G|$ の自由加群だろう」というものである．筆者が証明したことを正確に書くと，以下になる．

定理 0.1 ([Tsu, Theorem 1.1]). 複素鏡映群 G_{17}, G_{18}, G_{19} について *BMR* 予想が成り立つ．

1. $H(G_{17}) = \langle s,t \mid s^5 = a_1s^4+a_2s^3+a_3s^2+a_4s+1, t^2 = a_5t+1, tststs = ststst\rangle_{\mathbb{Z}[a_1,\cdots,a_5]\text{-}alg}$ はランク *1200* の $\mathbb{Z}[a_1,\cdots,a_5]$ 自由加群である．
2. $H(G_{18}) = \langle s,t \mid t^5 = a_1t^4+a_2t^3+a_3t^2+a_4t+1, s^3 = a_5s^2+a_6s+1, stst = tsts\rangle_{\mathbb{Z}[a_1,\cdots,a_6]\text{-}alg}$ はランク *1800* の $\mathbb{Z}[a_1,\cdots,a_6]$ 自由加群である．
3. $H(G_{19}) = \langle s,t,u \mid s^2 = a_1s+1, u^5 = a_2u^4+a_3u^3+a_4u^2+a_5u+1, t^3 = a_6t^2+a_7t+1, stu = tus = ust\rangle_{\mathbb{Z}[a_1,\cdots,a_7]\text{-}alg}$ はランク *3600* の $\mathbb{Z}[a_1,\cdots,a_7]$ 自由加群である．

ここで既約複素鏡映群のラベルは，Shephard-Todd による分類表のものである．また Hecke 環の定義は [Ma1, Definition 2.1] によるもので，もともとの [BMR, Definition 4.21] とは異なるが，[Ma1, Definition 2.1] の Hecke 環の定義で BMR 予想が成り立つことと，[BMR, Definition 4.21] の Hecke 環の定義で BMR 予想が成り立つことは同値 [Ma1, Proposition 2.3] である．

BMR 予想は，リー理論・量子代数の表現論ではそれなりに有名な予想である．少なくとも筆者は，大学院生のときからそのような予想があるとは何度か耳にしたり文献で見かける機会があったし，ごく最近でも 2016 年に京大で行われた「Geometric Representation Theory」において，I.Losev が標数 0 の体での BMR 予想の証明について報告していた [Los]（Hecke 環の定義の整合性を確認していないが，（定理 0.1 に対応する複素鏡映群では）定理 0.1 中の $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Q}$ にかえた version と思えばよいだろう）．また本稿執筆時には，日本語 wikipedia の BMR の転送項目の 1 つにもあげられている．したがって，BMR 予想の背景や意義，先行研究については割愛させていただこうと思う．E.Chavli の博士論文 [Cha] に詳しいサーベイがあり，[Los] については [Eti] にも詳しい．また YouTube で Marin のサーベイ講演を視聴することもできる [Ma2].

2017 年 2 月に [Ma1] において，BMR 予想の証明がついていなかった $G_{17}, G_{18}, G_{19}, G_{20}, G_{21}$ のうち，（計算機も用いて）G_{20}, G_{21} に証明があたえられた．この論文 [Ma1] で BMR 予想の正確な定式化を知り，$H(G_{17}), H(G_{18})$ のような，わずか 2 生成元と 3 関係式で定義された代数の基底につ

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by JSPS Kakenhi Grants 17K14154.

いて 20 年も決着がついていないことに興味をもった．また，ランク 2 以外の複素鏡映群についてはBMR 予想が確立していることも面白いと思った．例えば例外型複素鏡映群で一番ランクも位数も大きな群は G_{37} で，その位数は 696729600 なのだが，これについては証明されていたのである！

生成元と関係式で定義された（体上の）可換代数を計算する方法として，Gröbner 基底の理論 [CLO] がある．その「生成元と関係式で定義された（可換環上の非可換）代数」version として Bergman の diamond lemma [Ber, Theorem 1.2] がある．集合 X を変数団とし，可換環 $\mathbf{k}$ を係数とするような非可換多項式環 $\mathbf{k}[X^*] = \mathbf{k}\langle X\rangle$ を考える．X^* は X が生成する自由モノイドで，$\mathbf{k}[X^*]$ の単項式の集合と思える．さて「書き換え系」$R = ((s_1, f_1), \cdots, (s_n, f_n) \in X^* \times \mathbf{k}[X^*])$ を考え

(∗) $f = \sum_{C\in X^*} a_C \cdot C \in \mathbf{k}[X^*]$ の $a_C \neq 0$ なる C が $C = As_iB$ となっていたら（ここで $A, B \in X^*$．つまり「C が s_i を部分に含む」⇔「s_i が C を割り切る」ということである．これを $s_i|C$ と書く），C を 1 つ選んで Af_iB に置き換える

という操作を繰り返すことを考える（[Tsu, Algorithm 1] も参照されたい）．もちろん

- この過程は無限に続けられてしまう
- そうでない場合でも，途中の C や $C = As_iB$ となる A, B の選択に最終結果が依存する

可能性がある．Bergman の diamond lemma は，strong normalizing [BN] とよばれる性質：

操作 (∗) が適用の仕方によらず，有限回で止まって，かつ最終結果が f にのみよる

をみたすような R の条件を述べたものである．そしてこのとき $\mathsf{Irr}(R) := \{W \in X^* \mid 1 \leq \forall i \leq, s_i \nmid W\}$ が $\mathbf{k}[X^*]/I_R$ の自由 $\mathbf{k}$ 基底になるのである（ここで $I_R = \langle s_i - f_i \mid 1 \leq i \leq n\rangle$ は $\mathbf{k}[X^*]$ の両側イデアル）．正確なことは [Tsu, §2] の実質 2 ページ，あるいはオリジナルの [Ber] の最初の数ページに目をとおせば十分である．Gröbner 基底にせよ，Bergman の diamond lemma にせよ，どちらも書き換え系の理論における Newman's diamond lemma または critical pair lemma [BN, Lemma 2.7.2,Theorem 6.2.4] の類似物と思えば自然な理論である．

以下 $n = 17, 18, 19$ とし，$\mathbb{A} = \mathbb{Z}[a_1, \cdots, a_{n-12}]$，$H = H(G_n) = \mathbb{A}[X^*]/I$ とする．ここで $X = \{s, t\}$ または $X = \{s, t, u\}$ で，I は定理 0.1 中の Hecke 環の定義関係式が定める $\mathbf{k}[X^*]$ の両側イデアルである．[Tsu] における定理 0.1 の証明は，計算機を必要とするが，方針は明確である．

(a) X にうまい順序 X^* を指定する [Tsu, Definition 3.7]

(b) 定義関係式から書き換え系 $R = ((s_1, f_1), \cdots, (s_m, f_m))$ を $I = I_R$ となるように指定する [Tsu, §3.3]

(c) 書き換え系を $I_R = I_{R'}$ を保ったまま $R' = ((s_1, f_1), \cdots, (s_n, f_n))$ に延長する方法を指定する [Tsu, Definition 3.12] [Tsu, §3.3(P),(Q),(R)]

(d) $\mathsf{Irr}(R')$ が $\mathbb{A}$ 加群として H を生成することを確かめる [Tsu, Proposition 3.13]（このとき [Ma1, Proposition 2.3.(ii)] によって証明が完結する．[Tsu, Proposition 3.9] も参照されたい）

このうち (c) は，Bergman の diamond lemma にある「ambiguity の解消 [Tsu, §3.2(3)]」からきている．(d) は「任意の $w \in \mathsf{Irr}(R')$ と $x \in X$ について，$f = wx$ として，R' について (∗) の繰り返しが有限回で終結する」を確認すればよいので，(d) が成り立つように (c) を指定できたのが [Tsu] の非自明な部分である（そのヒューリスティックについて [Tsu, §3.2] の最後と [Tsu, Remark 3.11] に説明を書いた）．以上の指定を確認するだけなら，ありふれた計算機で可能である [Tsu, §4.8]

が，人間には大変すぎて確認できない，という証明になっている．実際，G_{19} では 49494726 回 $(*)$ を適用して「非可換多項式の割り算・余り」を求めることになる．なお [Tsu] の方針にはある程度の一般性があり，[Tsu] ではランク 2 の複素鏡映群 $G_4, \cdots, G_{22}$ について証明を与えている．

BMR 予想は，多くの先行研究と [Tsu] で肯定的に解決されたことに論理的にはなるが（本稿執筆時には [Tsu] は投稿中・審査中である），（計算機によらないような）別証明を求める研究はこれからもなされるだろう．Losev の KZ 関手や Riemann-Hilbert 対応を用いた（標数 0 の体上の）証明は，そのような証明が存在しても不思議でないと思わせる．また BMR 予想中の「ランク△△の自由加群である」を「有限生成加群である」に弱めた version を weak BMR 予想というらしいのだが，[ER] のような結果によるとうまい証明があるのかもしれない．

一方で [Tsu]（や [Ma1]）の（計算機を用いた）証明方法は，上にあげた先行研究とは異なり BMR 予想について理解をもたらすものではないが，他の生成元と関係式で定義された「小さな代数」に適用できる可能性があり，詳細を論文の形で記録し公開することに価値はあると考えた．もう一つの意義は，[Tsu] で $n = 4, \cdots, 22$ について構成した R' は，いわゆる strongly normalizing な書き換え系になっているのではないか，と予想されることである．リー理論における例外型では計算機でしか確認できなさそうな命題が存在しても不思議はないので，R' がよい性質をもっていれば，今後（ランク 2 の）複素鏡映群についての Hecke 環の研究に役に立つと期待される．

また近年，いわゆる categorical representation theory において 2 圏や monoidal 圏を「生成元と関係式」で記述することがさかんであるが（例えば [Kho, EK, EW, Rou, KL] は Heisenberg 代数，Iwahori-Hecke 環，量子群の半分の categorification の記述である．[Kho] は現状予想だが），それにも何かしら洞察をもたらすと面白いと思っている．

講演の機会を与えてくださった和地輝仁さんに感謝いたします．ありがとうございました．

参考文献

[Ber] G. Bergman, *The diamond lemma for ring theory*, Adv.Math. **29** (1978), 178–218.

[BMR] M. Broue, G. Malle and R. Rouquier, *Complex reflection groups, braid groups, Hecke algebras*, J.Reine Angew.Math. **500** (1998), 127–190.

[BN] F. Baader and T. Nipkow, *Term rewriting and all that*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.

[CLO] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra*, Third edition. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer, New York, 2007.

[Cha] E. Chavli, *The Broué-Malle-Rouquier conjecture for the exceptional groups of rank 2*, arXiv:1608.00834

[EK] B. Elias and M. Khovanov, *Diagrammatics for Soergel categories*, Int.J.Math.Math.Sci. **2010**, Art.ID 978635, 58pp

[Eti] P. Etingof, *Proof of the Broué-Malle-Rouquier Conjecture in Characteristic Zero (After I.Losev and I.Marin-G.Pfeiffer)*, Arnold Math.J. **3** (2017), 445–449.

[ER] P. Etingof and E. Rains, *Central extensions of preprojective algebras, the quantum Heisenberg algebra, and 2-dimensional complex reflection groups*, J.Algebra **299** (2006), 570–588.

[EW] B. Elias and G. Williamson, *Soergel calculus*, Represent.Theory **20** (2016), 295–374.

[Kho] M. Khovanov, *Heisenberg algebra and a graphical calculus*, Fund.Math. **225** (2014), 169–210.

[KL] M. Khovanov and A. Lauda, A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I., Represent. Theory **13** (2009), 309–347.

[Los] I. Losev, *Finite-dimensional quotients of Hecke algebras*, Algebra Number Theory **9** (2015), 493–502.

[Ma1] I. Marin, *Proof of the BMR conjecture for G20 and G21*, arXiv:1701.09017

[Ma2] I. Marin, *Report on the BMR freeness conjecture* `https://www.youtube.com/watch?v=OL2S1ACCFiO`

[Rou] R. Rouquier, 2-Kac-Moody algebras, arXiv:0812.5023.

[Tsu] S. Tsuchioka, *BMR freeness for icosahedral family*, arXiv:1710.03868