数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 50-66

組合せ論的ゼータと非可換対称函数

Combinatorial zeta functions and noncommutative symmetric functions

三橋秀生（法政大学・理工） 森田英章（室蘭工業大学・工）* 佐藤巖（小山高専・一般）
Hideo Mitsuhashi Hosei University
Hideaki Morita Muroran Institute of Technology
Iwao Sato Oyama National College of Technology

1 概要

「組合せ論的ゼータ」がもつ三種類の表示の関係性が本稿の主題である．組合せ論的ゼータという呼称で何を指すのか．ことの詳細は後に譲るとして，ここではひとまず「グラフや離散力学系等に関連して定義されるゼータ函数」を指すものとしよう．その原型は

伊原[1]ゼータ

に求めることができる [12]. もとは整数論上の問題に対する要請から, ある種の離散群の共役類の数え挙げに付随して導入されたものであるが, 現在ではセール [27], 砂田 [28], 橋本 [10] を経て, 有限グラフに対して定義される対象として認識されている．グラフに対して定義されるゼータ, いわゆるグラフゼータは, 伊原ゼータ以外にもその発展型として, 水野[2]-佐藤[3]ゼータ [23]（第一種荷重ゼータ）, 佐藤[4]ゼータ [25]（第二種荷重ゼータ）, 辺ゼータ, 路ゼータ[5], バーソルディ[6]・ゼータ [3] などが構成されている．これらは伊原ゼータを礎に, 様々な荷重を与えたり, 変数を増やしたり, あるいは数える対象を変えたり増やしたりしながら, そのバリエーションを豊かにしてきた．バリエーションは増やせども, その表示の仕方に関しては一様に観察される様相を認めることができる．すなわち, いずれの場合も

指数表示, オイラー表示, 橋本表示

と本稿でよぶところの三種の表示を許す点である．一方, 離散力学系に付随するゼータ函数 (c.f.,[1]) も同様のあり様を見せる．簡明な例を挙げよう．有限集合 $X=\{1,2,\ldots,n\}$ に

---

[1] 伊原康隆
[2] 水野弘文
[3] 佐藤巖
[4] 佐藤巖
[5] 辺・路ゼータに関しては, 例えば [29] 参照.
[6] ローラン・バーソルディ

は, n 次対称群 S_n が作用している. そして元 $\sigma \in S_n$ が与えられると, 有限力学系 (X, σ) が定まる. 各正整数 m に対して σ^m の固定点の個数を N_m で表す. このとき置換 σ のゼータ函数 $\zeta_\sigma(t)$ を次の形式的冪級数

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{N_m}{m} t^m\right)$$

で定義する. この形式的冪級数を $Z_\sigma(t)$ で表し, $\zeta_\sigma(t)$ の「指数表示」とよぶ. 一方, よく知られているように置換 σ は互いに素な巡回置換の積 $p_1 p_2 \cdots p_r$ で表される. ここに現れる巡回置換全体の集合を $\mathrm{Cyc}(\sigma)(= \{p_1, p_2, \ldots, p_r\})$ で表す. このとき $\zeta_\sigma(t)$ は「素なるもの」 $p \in \mathrm{Cyc}(\sigma)$ に渡る積

$$\prod_{p \in \mathrm{Cyc}(\sigma)} \frac{1}{1 - t^{|p|}}$$

で表すこともできる. ここに $|p|$ は巡回置換 p の巡回域が含む元の個数を表す. この形式的冪級数を $E_\sigma(t)$ で表し, $\zeta_\sigma(t)$ の「オイラー[7]表示」とよぶ. オイラー表示は通常「オイラー積表示」とよぶのだろうが, ここでは簡便さと呼称のバランスを保つために「積」を省略してよぶことにする. 置換 σ には置換行列 $M_\sigma = (\delta_{\sigma(i)j})_{i,j \in X}$ が付随する. ここで記号 $\delta_{\sigma(i)j}$ はクロネッカー・デルタを表す. すると $\zeta_\sigma(t)$ には行列式を用いた表示

$$\frac{1}{\det(I - tM_\sigma)}$$

を与えることもできる. これを $\zeta_\sigma(t)$ の「橋本[8]表示」とよび, $D_\sigma(t)$ で表す. ここで I は M と型が等しい単位行列を表す. このように, 置換 σ のゼータ $\zeta_\sigma(t)$ に対しては, 指数表示・オイラー表示・橋本表示の三種の表示の鼎立

$$Z_\sigma(t) = E_\sigma(t) = D_\sigma(t)$$

を得る. また複素鏡映群 $G(r, n)$ の元を用いると, その荷重版である小山-中島[9]の L-函数 [14] が得られるが, ここでも同様に三種の表示が鼎立する [11]. グラフゼータにおいても事情は同様である. ただ, これは習慣の差であろうか, 力学系由来のゼータは指数表示で定義されることが多いことに対し, グラフゼータはオイラー表示で定義されることが多いが, いずれにせよ三種の表示の鼎立を看取できることに興味を覚える. また, グラフゼータの場合は「伊原[10]表示」とよばれる表式 $(1 - t^2)^{n-m}/\det(I - tA + t^2(D - I))$ (n : グラ

[7] レオンハルト・オイラー

[8] 橋本喜一郎

[9] 小山信也, 中島さち子

[10] 伊原康隆

フの頂点数, m : 辺数, A : グラフの隣接行列, D : 次数行列) が知られている. すなわち, グラフゼータにおいては「三種の表示」ではなく「四種の表示」が考察の対象となっているが, 本稿では橋本表示までしか扱わない. 伊原表示に関してはまた後続の論文もしくは原稿で扱う機会を持ちたい.

いま「橋本表示まで」と申し上げた. これは一見話の順序に起因する叙述のようにみえるが, 実は概念の強弱に起因する叙述である. 三種の表示においては, 橋本表示が最強であり指数表示が最弱である. 例えば, 橋本表示は無条件[11]にオイラー表示に書き換えることができる. これは後述 (命題 6) の「フォアタ[12]＝ザイルベルガー[13]の定理」による. また, よく知られているように, オイラー表示は常に指数表示に変形できる[14]. 蛇足を恐れずに付け加えると, 三種の表示のなかで指数表示が最弱なのは, 式の形からも容易に見て取ることができる. 指数表示の定式化に必要なものは, $\mathbb{Q}$-代数の元の列 $(N_m)_{m\geq 1}$ のみである. 従って, 定式化に際して「素なるもの」を捉えなければならないオイラー表示や, 同じく行列を用意せねばならない橋本表示と比べると, 弱い表式であることが理解されよう.

本稿の興味はこの逆向きの含意にある. すなわち, グラフ等の離散構造が与えられたとき, そこに付随する組合せ数 (列) の生成函数としてゼータを指数表示で定義し, それがオイラー表示を持つための条件, さらに橋本表示をもつための条件を明らかにすることを目的とする. ともすれば定義式の選択に統一感を欠く憾みを禁じ得ない現状にあるこの種のゼータに対して, 導入に際しては指数表示を用いることが自然であることを主張し, さらにオイラー表示, そして橋本表示の導出に向けた定礎の構築を意図するものである. 例えば, 伊原ゼータやその荷重型 (水野-佐藤, 佐藤, バーソルディ) の場合, N_m は有限グラフにおける長さ m の (被約) 閉路の個数 (あるいはそれらの荷重[15] の総和) で与えられる. これらの個数もしくは荷重がある組合せ的性質を満たすがゆえに, オイラー表示さらには橋本表示が従うことをみることができる. そして本稿の結論は, 荷重の

循環性

がこの組合せ的性質を担保することを主張する. 冒頭に用いられた

組合せ論的ゼータ

という呼称は, 離散構造においてある数え挙げ対象に循環的な荷重を与え, 指数表示で定義されるゼータを指す. 従って, ゼータが組合せ論的であれば三種の表示の鼎立が保証される[16]. さらにこの観点に立つことにより, 荷重の値が非可換な場合も, 同様に三種の表示

[11] 行列成分の可換性は仮定

[12] ドミニク・フォアタ

[13] ドロン・ザイルベルガー

[14] 例えば $\zeta_\sigma(t)$ の場合であれば, $N_m = \sum_{|p| | m} |p|$ とおけばよい. 後により一般のケースでもこの点に言及する.

[15] 伊原ゼータは荷重が自明 (すなわちすべて 1) の場合.

[16] 既出の諸々のゼータはすべて組合せ論的である.

が鼎立するゼータの存在を伺い知ることができる点に触れて本稿を終える. 構成には非可換対称函数 [9] が, 橋本表示には準行列式 [8] がそれぞれ用いられる.

2 伊原ゼータ

ここでは有限グラフに対する伊原ゼータの定義を概観し, 合わせて以降用いるグラフの基本用語を整理しておく. グラフゼータに関するおよそ最近までの状況は [26] に総括されている. 有限グラフ $\Gamma=(V,E)$ [17] が与えられたとき, 各辺 $u=\{u,v\}$ $(u,v\in V)$ に対し, 二本の有向辺 $(u,v),(v,u)$ を対応させる. ここで有向辺 $a=(u,v)$ に対して, $\mathfrak{o}(a)=u$, $\mathfrak{t}(a)=v$ とおき, それぞれ a の始点, 終点とよぶ. これら各辺に対して対応させた二本の有向辺全体を $D(E)$ とおく. このとき, 有向グラフ $\Delta=\Delta(\Gamma)=(V,D(E))$ を, Γ の対称有向グラフとよぶ. 有限グラフ Γ の閉路とは, $D(E)$ の元の列

$$x=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$$

で各 $i=1,2,\ldots,m$ に対して $\mathfrak{t}(a_i)=\mathfrak{o}(a_{i+1})$ を満たすのをいう. ただし, $a_{m+1}=a_1$ とおいている. また, m を閉路 x の長さとよび $l(x)$ で表す. 例えば, 有限グラフ $\Gamma_0=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,v_3\}$, $E=\{\{v_1,v_2\},\{v_2,v_3\},\{v_1,v_3\}\}$ の場合, $D(E)=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}=\{(v_1,v_2),(v_2,v_3),(v_3,v_1),(v_1,v_3),(v_3,v_2),(v_2,v_1)\}$ である. そして, Γ_0 の閉路は, 例えば長さ 3 のものであれば (a_1,a_2,a_3) が挙げられる. 注意していただきたいのは単に「閉路」というときには, それに巡回置換を施したものは異なるものとみる. すなわち, (a_1,a_2,a_3), (a_2,a_3,a_1), (a_3,a_1,a_2) は異なる閉路と理解する. よって, Γ_0 にはこれらの三つと, (a_4,a_5,a_6) の巡回置換を合わせて, 六個の閉路があることになる. ちなみに, 長さ 6 の閉路は $(a_1,a_2,a_3)^2=(a_1,a_2,a_3,a_1,a_2,a_3)$ 等で, こちらも全部で六個ある. これからおわかりのように, Γ_0 には各 3 の倍数を長さにもつ閉路は常に六個あり, それ以外の長さの閉路は存在しない.

有限グラフ Γ に二つ閉路 $x=(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ と $y=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ が与えられたとする. このとき x と y が同値

$$x\sim y$$

であるとは, 一方が他方の巡回置換である場合にいう [18]. 従って, 同値な閉路の長さは必然的に等しくなる. また, その同値類を**サイクル** [19] とよぶ. 閉路 x を代表元にもつサイクルを $\bar{x}$ で表す. 例えば, Γ_0 の場合であれば, (a_1,a_2,a_3), (a_2,a_3,a_1), (a_3,a_1,a_2) はすべて

[17] 単に有限グラフといえばループと多重辺も許す. また連結性も仮定する必要はない.

[18] これは明らかに同値関係である.

[19] 閉路とサイクルの混用が見受けられることも多いが, ここでは分けて用いる.

同値である. 従って, Γ_0 の長さ 3 のサイクルは $(a_1, a_2, a_3)^-$ ともう一つ $(a_4, a_5, a_6)^-$ の二つである. ここで, サイクル $\xi = \bar{x}$ の長さ $l(\xi)$ とは, その代表元の長さ $l(x)$ で定義する[20]. 同様に, 各 3 の倍数を長さにもつサイクルは, これらもそれぞれ各々二つである.

有限グラフ Γ の閉路 $x = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ が被約であるとは, 任意の i に対して $a_{i+1} \neq a_i$ $(a_{m+1} = a_1)$ であることをいう. また, x が素であるとは x がより短い閉路の冪で表せない場合をいう. 例えば Γ_0 において (a_1, a_2, a_3) は素であるが, $(a_1, a_2, a_3)^2$ は素ではない. サイクル $\xi = \bar{x}$ に対しては, その代表元 x が被約あるいは素であることをもって, その被約あるいは素であることをそれぞれ定義[21] する. 有限グラフ Γ に対して, 長さ m の閉路全体の集合を $C_m = C_m(\Gamma)$, 長さ m の素閉路全体の集合を $P_m = P_m(\Gamma)$ で表す. また, 長さ m の被約閉路全体の集合を $C_m^\flat = C_m^\flat(\Gamma)$, 長さ m の被約素閉路全体の集合を $P_m^\flat = P_m^\flat(\Gamma)$ で表す. 従って, (被約) 閉路全体の集合を $C^{(\flat)} = C^{(\flat)}(\Gamma)$, (被約) 素閉路全体の集合を $P^{(\flat)} = P^{(\flat)}(\Gamma)$ で表すとき $C^{(\flat)} = \sqcup_{m\geq 1} C_m^{(\flat)}$, $\quad P^{(\flat)} = \sqcup_{m\geq 1} P_m^{(\flat)}$ を得る.

また, (被約) サイクル全体の集合を $\mathcal{C}^{(\flat)} = \mathcal{C}^{(\flat)}(\Gamma)$, (被約) 素サイクル全体の集合を $\mathcal{P}^{(\flat)} = \mathcal{P}^{(\flat)}(\Gamma)$ で表す. すなわち $\mathcal{C}^{(\flat)} = C^{(\flat)}/\sim$, $\mathcal{P}^{(\flat)} = P^{(\flat)}/\sim$ である. 同値関係 $\sim$ は, それぞれ $C_m^{(\flat)}$, $P_m^{(\flat)}$ 上の同値関係でもあるので, $\mathcal{C}_m^{(\flat)} = C_m^{(\flat)}/\sim$ (resp. $\mathcal{P}_m^{(\flat)} = P_m^{(\flat)}/\sim$) は, それぞれ長さ m の (被約) サイクル (resp. (被約) 素サイクル) の集合となり, さらに $\mathcal{C}^{(\flat)} = \sqcup_{m\geq 1}\mathcal{C}_m^{(\flat)}$, $\mathcal{P}^{(\flat)} = \sqcup_{m\geq 1}\mathcal{P}_m^{(\flat)}$ を得る.

定義 1 有限グラフ Γ に対して, t を変数とする形式的冪級数

$$\prod_{\xi\in\mathcal{P}(\Gamma)} \frac{1}{1 - t^{l(\xi)}}$$

を Γ の**伊原ゼータ函数**とよび $E_\Gamma(t)$ で表す ([12; 27, 28, 10, 2]).

伊原によるオリジナルの定義においては, 積の範囲が被約素閉路 $\mathcal{P}^\flat(\Gamma)$ にとられている. 例えば, Γ_0 の場合は $\mathcal{P}^\flat(\Gamma_0) = \{(a_1, a_2, a_3)^-, (a_4, a_5, a_6)^-\}$ であるから, その伊原ゼータは $(1 - t^3)^{-2}$ となる. これは伊原による導入の経緯 [12] において必然的に課された条件であるが, こと有限グラフのゼータと捉えた場合には, 特に被約である必要はなく, 一般の素閉路全体で積をとっても, 本稿で今後扱われる題材に関する議論に支障は生じない. ゆえにここではオリジナルの定義に比してやや一般化された形で伊原ゼータを導入することにしたい. 有限グラフ Γ がもつ長さ m の閉路の総数[22] を N_m とおき, 次の形式的冪級数

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{N_m}{m} t^m\right)$$

[20] この定義に矛盾がないことはであることは明らかであろう.
[21] この定義にも矛盾がないことは明らかであろう.
[22] オリジナルの定義の場合には, ここを被約閉路の総数 $N_m^\flat$ にとる.

を $Z_\Gamma(t)$ で表す. 二つの有向辺 $a, a' \in D(\Gamma)$ に対して $\theta(a, a') = \delta_{t(a)o(a')}$ とおき[23], $\sharp D(E)$ 次の正方行列 $(\theta(a, a'))_{a,a' \in D(E)}$ を M_Γ で表す. このとき, 次の形式的冪級数

$$\frac{1}{\det(I - tM_\Gamma)}$$

を $D_\Gamma(t)$ で表す.

命題 2 (伊原ゼータの三種の表示 [12; 27, 28, 10]) $E_\Gamma(t) = Z_\Gamma(t) = D_\Gamma(t)$.

定義 1 はオリジナルの定義やその後の習慣を尊重し, オイラー表示 $E_\Gamma(t)$ によるものを採用した. しかし導入でも述べたとおり, 本稿の観点ではこの種のゼータ (組合せ論的ゼータ) は指数表示で定義されるべきものであり, そのあとでオイラー表示・橋本表示の導出が続くべきとの立場をとる ([22]).

3 三種の表示

伊原ゼータ以外にも三種の表示が鼎立するゼータが数多知られている. 水野-佐藤ゼータ (第一種荷重ゼータ), 佐藤ゼータ (第二種荷重ゼータ), 辺ゼータ, 路ゼータ, バルソルディ・ゼータ, 小山-中島の L-函数などがその例である. 組合せ論的ゼータはこれらのゼータに対して三種の表示が鼎立する原理を描く.

3.1 指数表示

$\mathfrak{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ を有限アルファベットとし, その上の語全体の集合を $\mathfrak{A}^*$ で表す. $\mathfrak{A}$ に全順序を定めておけば, 辞書式順序 $<$ によって $\mathfrak{A}^*$ も全順序集合となる. アルファベット $\mathfrak{A}$ の元を成分にもつ両側無限列 $(a_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ 全体の集合 $\mathfrak{A}^\mathbb{Z}$ と, その上の左シフト $\lambda : \mathfrak{A}^\mathbb{Z} \to \mathfrak{A}^\mathbb{Z} : (a_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}}$ を考える. Ξ は集合として λ で固定される $\mathfrak{A}^\mathbb{Z}$ の部分集合とすると (Ξ, λ) は力学系をなす[24]. 各正整数 m に対して (Ξ, λ) の m-周期点全体のなす集合を X_m で表す. すなわち

$$X_m = \{x \in \Xi \mid \lambda^m(x) = x\}$$

とおく. そして m を $x \in X_m$ の周期とよぶ. このとき $\sharp X_m \leq n^m < \infty$ であることに注意する. また周期点全体を $X = \cup_{m\geq 1} X_m$ とおく. 可換 $\mathbb{Q}$-代数 R と各正整数 m に対して写

[23] 被約の場合は $\theta^\flat(a, a') = \delta_{t(a)o(a')} - \delta_{a^{-1}a'}$ を用いる.
[24] ここでの λ は本来であれば $\lambda|_\Xi$ と記すべきものである.

像 $\chi_m : X_m \to R$ が与えられたとき, 写像列 $\chi = (\chi_m)_{m\geq 1} : X \to R$ を考える. これを X の荷重とよぶ. ここで χ をあたかも写像かのような記号で表したが, これは写像ではないことに注意されたい. たとえば, 仮に x が周期が m をもつとき $\chi(x) = \chi_m(x)$ と「定義」したとしても, x の周期は一意的ではない[25] ので定義として欠陥がある. ただ, 今後 χ という記号を用いる際には, 文脈上常に x の周期が明確に定められた上で使用されるので, $\chi(x)$ の意味を上のように理解したとしても混乱は起きないことに注意しておく. 例えば

$$N_m(\chi) = \sum_{x \in X_m} \mu(x)$$

は問題なく定義されている.

定義 3 (ルエル・ゼータの指数表示) 次の形式的冪級数

$$\exp\left(\sum_{m\geq 1} \frac{N_m(\chi)}{m} t^m\right)$$

を力学系 (X, λ) のルエル[26] ・ゼータ函数 [24; 22] とよび $Z_\Xi(t;\chi)$ で表す. これをルエル・ゼータ函数の指数表示とよぶ.

3.2 オイラー表示

一般に $x \in X$ の周期は一意的ではないが, その最小値 $\min\{m \mid x \in X_m\}$ は一意的である. これを x の**素周期**とよび

$$p(x)$$

で表す. 素周期は任意の周期を割り切ることは, よくやる議論を用いれば示すことができる. また当然 $x \in X_{p(x)}$ である. このように $X_{p(x)}$ の元とみた x を

$$\pi(x)$$

で表し, これを x の**素節**とよぶ. 一方で, $x \in X_m$ は任意の正整数 k に対して $x \in X_{km}$ である. このように X_{km} の元とみた x を x^k で表し, これを x の k 乗とよぶ. いま X の荷重 χ が与えられたとき, それが

乗法的

であることを, 任意の $x \in X$ と任意の正整数 k に対して, $\chi(x^k) = \chi(x)^k$ が成立することで定義する. X の二元 x, y が (X, λ) の同じ軌道に属しているとき, すなわち $k \in \mathbb{Z}$ が

[25] m が x の周期であれば, m の倍数はすべて x の周期である.

[26] デビッド・ルエル

存在して $y = \lambda^k(x)$ となるとき, x と y は同値[27] であるといい $x \sim y$ と表す. 従って, $\mathcal{X} = X/\sim$ は (X, λ) の軌道全体のなす集合となる. 以下 $x \in X$ を含む軌道を $\bar{x}$ で表す. 荷重 χ が

不変

であるとは, $x \sim y$ であれば $\chi(x) = \chi(y)$ が成立することをいう. 軌道 $\xi = \bar{x}$ の素周期 $p(\xi)$ は代表元 x のそれで定義する. 同様に ξ の素節 $\pi(\xi)$ は $\pi(x)^-$ で定義する. これらの定義も矛盾はない.

仮説 (E) 荷重 χ は不変かつ乗法的である.

定理-定義 4 (オイラー表示 [22]) 荷重 χ が仮設 (E) を満たすとする. このとき $Z_\Xi(t;\chi)$ は次の形式的冪級数

$$\prod_{\xi \in \mathcal{X}} \frac{1}{1 - \chi(\pi(\xi))t^{p(\xi)}}$$

に等しい. この形式的冪級数を $E_\Xi(t;\chi)$ で表し $Z_\Xi(t;\chi)$ のオイラー表示とよぶ.

仮説 (E) が満たされていれば, 等式 $N_m(\chi) = \sum_{\substack{\xi \in \mathcal{X} \\ p(\xi)|m}} p(\xi)\chi(\pi(\xi))t^{m/p(\xi)}$ が成立する. これを用いれば $\log E_\Xi(t;\chi)$ における t^m の係数が $N_m(\chi)/m$ であることを確認できる.

3.3 橋本表示

アルファベット $\mathfrak{A}$ 上のリンドン語 w とは, 語 $w \in \mathfrak{A}^*$ がその'巡回同値類'$\mathrm{Re}(w)$ の中で最小であることをいう. ここで, 語 $w = a_1a_2\cdots a_m$ の巡回同値類 $\mathrm{Re}(w)$ とは次の m 個の語からなる重複集合[28] のことである : $\mathrm{Re}(w) = \{a_1a_2\cdots a_m, a_2a_3\cdots a_1, \ldots, a_ma_1\cdots a_{m-1}\}$. 従って, 語がリンドン語であるためには素[29] であることが必要である. アルファベット $\mathfrak{A}$ 上のリンドン語全体の集合を

$$\mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})$$

で表す. リンドン語は半群 $\mathfrak{A}^*$ における「素なるもの」と認識できることが知られている [4] (また [17] も参照).

命題 5 (リンドンの分解定理) 任意の語 w に対して, リンドン語の非増加列 $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_r$ が一意的に存在し $w = l_1l_2\cdots l_r$ を満たす.

[27] 実際にこれは同値関係になる.

[28] 語が素でなければ重複集合になる. 例えば 1212 の巡回同値類は 1212, 2121, 1212, 2121 の四つの語からなる.

[29] 注釈が前後するが, 語が素であるとはより短い語の冪では表せない場合をいう. 1212 は素ではなく, 1213 は素である.

この定理は, いわば半群 $\mathfrak{A}^*$ における「素因数分解」を与える. すなわち, この観点のもとにリンドン語は半群における「素なるもの」と理解することができよう. 行列 $M = (m_{aa'})_{a,a' \in \mathfrak{A}}$ と語 $w = a_1 a_2 \cdots a_r \in \mathfrak{A}^*$ に対し, **循環積**

$$m_{a_1 a_2} m_{a_2 a_3} \cdots m_{a_r a_1}$$

を $\mathrm{circ}_M(w)$ で表す.

命題 6 (フォアタ=ザイルベルガー [7])

$$\frac{1}{\det(I - M)} = \prod_{l \in \mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})} \frac{1}{1 - \mathrm{circ}_M(l)}.$$

リンドン語は半群 $\mathfrak{A}^*$ における「素なるもの」を与えるので, この式の右辺はオイラー積と解釈することが可能である. すなわち, フォアタ=ザイルベルガーの定理は, 橋本表示式が常にオイラー表示をもつことを主張していると理解できる. 逆に読めば, オイラー表示式がある特定の形をしているとき, それは橋本表示をもつことを主張しているとも理解できる. この観点から, ルエル・ゼータ $Z_\Xi(t;\chi)$ の橋本表示について考察する.

まず軌道の集合 $\mathcal{X}$ から $\mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})$ への写像 ω を構成する. そして, 荷重 χ が不変かつ循環的で, さらにこの写像 ω が適切な条件を満たすとき $Z_\Xi(t;\chi)$ は橋本表示をもつことをみる. 任意に $\xi = \bar{x} \in \mathcal{X}$ をとる. このとき $x = (a_i)$ とおくと, x の有限部分列 $w = (a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+p(x)})$ で長さ $p(x)$ を持つものは語として素であり, かつ循環同値を除き一意的に定まる. 従って, ξ に対して循環同値類 $\mathrm{Re}(w)$ は集合として一意的に定まり, かつ w は語として素なので元に重複はない. よって $\mathrm{Re}(w)$ の最小元が定まるが, これは定義により $\mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})$ の元である. 以上により写像

$$\omega : \mathcal{X} \to \mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})$$

が定まる. この写像は単射である[30]. 語 $w = a_1 a_2 \cdots a_r$ の長さ r を $|w|$ で表す.

仮説 (D) 行列 $M = (m_{aa'})_{a,a' \in \mathfrak{A}}$ が存在し, $\mathcal{X}$ と χ に対して以下の条件を満たす：

- リンドン語 $l \in \mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})$ が $\mathrm{circ}_M(l) \neq 0$ を満たすなら $l \in \mathrm{Im}\,\omega$,
- 任意の $\xi \in \mathcal{X}$ に対して $\mathrm{circ}_M(\omega(\xi)) = \chi(\pi(\xi))$,
- 任意の $\xi \in \mathcal{X}$ に対して $|\omega(\xi)| = p(\xi)$.

[30] サイクルはその素節で完全に決定される.

定理-定義 7 (橋本表示 [22]) 荷重 χ が仮説 (E) を満たし, かつ $\mathcal{X}$ および χ に対して仮説 (D) を満たす行列 M が存在すれば $Z_\Xi(t;\chi)$ は次の形式的冪級数

$$\frac{1}{\det(I-tM)}$$

に等しい. この形式的冪級数を $D_\Xi(t;\chi)$ で表し $Z_\Xi(t;\chi)$ の橋本表示とよぶ.

仮定が満たされていれば, まず $Z_\Xi(t;\chi)$ はオイラー表示 $E_\Xi(t;\chi)$ で表される. そしてオイラー表示の各因子の分母にある $\chi(\pi(\xi))$ の値が循環積 circ_M を用いて表すことができるので, フォアタ=ザイルベルガーの定理から主張は従う. 以上により, 仮説 (E) と 仮説 (D) が満たされていれば, ルエル・ゼータに対しては三種の表示の鼎立

$$Z_\Xi(t;\chi)=E_\Xi(t;\chi)=D_\Xi(t;\chi)$$

をみることができる.

4 組合せ論的ゼータ

これまでと同様に $\mathfrak{A}=\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ は有限アルファベット, λ は $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ 上の左シフト, Ξ は λ で保存される $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の部分集合, X は (Ξ,λ) の周期点全体とする. 写像 $\theta:\mathfrak{A}\times\mathfrak{A}\to R$ が与えられたとする. このとき, 周期 m の元 $x=(a_i)\in X_m$ に対してその荷重 $\chi_m(x)$ を $\theta(a_1,a_2)\theta(a_2,a_3)\cdots\theta(a_m,a_1)$ で与える[31]. このとき, (X,λ) の荷重 $\chi=(\chi_m)$ を, 写像 θ により誘導される循環荷重とよび

$$\mathrm{circ}_\theta$$

で表す. 語 $w=w_1w_2\cdots w_m\in\mathfrak{A}^*$ に対して, $w^\sharp=(a_i)\in\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ を, $i\equiv j \bmod m$ であれば $a_i:=w_j$ により定義する. すなわち, $w^\sharp=(a_i)$ とは有限列 $(w_1,w_2,\ldots,w_m)$ を両側に無限に連結して得られる $\mathfrak{A}^{\mathbb{Z}}$ の元で $a_1=w_1$ とおいたものである. 循環荷重 $\chi=\mathrm{circ}_\theta$ に対して以下の条件を課す：

$$\text{リンドン語 } l\in\mathrm{Lyn}(\mathfrak{A}) \text{ に対し, } \mathrm{circ}_\theta(l)\neq 0 \text{ ならば } l^\sharp\in\Xi.$$

この条件を閉路条件[32] とよぶ. $l^\sharp\in\Xi$ であれば必然的に $l^\sharp\in X$ である.

[31] x の周期が m であり, R が可換であるから, $\chi_m(x)$ の定義においては x の長さ m の有限部分列 (a_k,a_{k+1},a_{k+m}) のとり方によらない.

[32] 閉路条件は一般論を運ぶ上で形式的に必要な条件であり, 今後あつかわれる個々の具体的なゼータに対しては, 常に自然な形で満たされている. 本稿においてはあまり気にする必要はない。

4.1 三種の表示

定義 8 (組合せ論的ゼータ [22]) 上記設定のもと, 閉路条件を満たす循環荷重 $\chi = \mathrm{circ}_\theta$ に対して定義されるルエル・ゼータ函数 $Z_\Xi(t;\chi)$ を**組合せ論的ゼータ函数**とよぶ. このとき $Z_\Xi(t;\chi) = Z_\Xi(t;\mathrm{circ}_\theta)$ を $Z_\Xi(t;\theta)$ で表す.

循環荷重はその定義より $\mathrm{circ}_\theta(\lambda(x)) = \mathrm{circ}_\theta(x)$ を任意の $x \in X$ に対して満たす. 従って不変である. また, 周期点 $x \in X$ に対して乗法性 $\mathrm{circ}_\theta(x^k) = \mathrm{circ}_\theta(x)^k$ もその循環性から容易にみることができる. 従って, 循環荷重は仮説 (E) を満たす. すなわち, 組合せ論的ゼータ $Z_\Xi(t;\theta)$ はオイラー表示 $E_\Xi(t;\theta)$ をもつ. ただし, $E_\Xi(t;\theta)$ は $E_\Xi(t;\mathrm{circ}_\theta)$ を表す.

定理 9 ([22]) $Z_\Xi(t;\theta) = E_\Xi(t;\theta)$.

行列 $M_{\Xi,\theta} = (\theta(a,a'))_{a,a'\in\mathfrak{A}}$ を考えると, リンドン語 l に対して $\mathrm{circ}_M(l) = \mathrm{circ}_\theta(l)$ に注意すれば, 閉路条件により $l^\sharp \in X$ を得る. これから仮説 (D) の条件 1) が従う. また条件 2), 3) は M と ω 等の定義から自然に従う. 従って, 循環荷重は仮説 (D) を満たす. すなわち, 組合せ論的ゼータ $Z_\Xi(t;\theta)$ は橋本表示 $D_\Xi(t;\theta)$ をもつ. ただし, $D_\Xi(t;\theta)$ は $D_\Xi(t;\mathrm{circ}_\theta) = 1/\det(I - tM_{\Xi,\theta})$ を表す.

定理 10 ([22]) $Z_\Xi(t;\theta) = D_\Xi(t;\theta)$.

以上より, 組合せ論的ゼータに対する三種の表示の鼎立が得られる.

系 11 $Z_\Xi(t;\theta) = E_\Xi(t;\theta) = D_\Xi(t;\theta)$.

4.2 一般佐藤ゼータ

佐藤 [25] は伊原ゼータや水野-佐藤ゼータ（第一種荷重ゼータ）の一般化となる, ある荷重ゼータ（第二種荷重ゼータ）を導入した. これをここでは**佐藤ゼータ**とよぶことにする. 近年になり佐藤ゼータに関する話題はグラフの同型問題との関連 [6] を起点として, 量子ウォークとの密接なつながりのなかで発展している [16]. ここでは, 佐藤ゼータを少し一般化した形で, その三種の表示の鼎立の様子を眺めることにより, 伊原ゼータ, 水野-佐藤ゼータ, 佐藤ゼータに対する三種の表示の鼎立が同一の機制の中で理解されることをみる.

有限有向グラフ $\Delta = (V, A)$ が与えられたとき, $\mathfrak{A} = A$ としてこれまでと同様の設定を行う. すなわち, λ は $A^{\mathbb{Z}}$ における左シフト, Ξ は λ の作用で集合として不変な $A^{\mathbb{Z}}$ の部分集合, X_m は m-周期点, $X = \cup_m X_m$ は周期点全体とおく. ここでは Ξ として両側無限路全体

$$\Pi_\Delta = \{(a_i) \in A^{\mathbb{Z}} \mid \mathfrak{t}(a_i) = \mathfrak{o}(a_{i+1}),\ \forall i\}$$

を考える．するとこの場合の m-周期点全体 X_m は, Δ における長さ m の閉路全体 C_m と一対一に対応していることは容易に理解されよう．以後, Π_Δ 上の組合せ論的ゼータ $Z_{\Pi_\Delta}(t;\theta)$ を

$$Z_\Delta(t;\theta)$$

で表す．写像 $\tau, \upsilon : \mathfrak{A} \to R$ が与えられたとき, 写像 $\theta^{GS} : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ を

$$\theta^{GS}(a,a') = \tau(a')\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')} - \upsilon(a')\delta_{a^{-1}a'}$$

で定義する．このとき, 有向辺 $a, a' \in A$ に対して, $\mathfrak{t}(a) \neq \mathfrak{o}(a')$ であれば必然的に $a' \neq a^{-1}$ であり $\theta^{GS}(a,a') = 0$ となる．このことから循環荷重 $\mathrm{circ}_{\theta^{GS}}$ の閉路条件が従うことに注意する．この循環荷重をもつ Π_Δ 上の組合せ論的ゼータ $Z_\Delta(t;\theta^{GS})$ を**一般佐藤ゼータ**とよぶ. 従って, 一般佐藤ゼータに対する三種の表示の鼎立

$$Z_\Delta(t;\theta^{GS}) = E_\Delta(t;\theta^{GS}) = D_\Delta(t;\theta^{GS})$$

を得る (系 11). 上に掲げたその他のゼータは Δ および θ^{GS} を特殊化していくことにより全て得られる．おおまかに述べると, Δ は有限グラフの対称有向グラフ の場合に, $\upsilon = 1$ としたものが佐藤ゼータ, $\tau = \upsilon$ とすれば水野-佐藤ゼータ, $\tau = \upsilon = 1$ とすれば伊原ゼータとなる. 詳しくは

$$\begin{aligned}
\theta^{I}(a,a') &= \delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')}, \\
\theta^{I,\flat}(a,a') &= \delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}, \\
\theta^{MS}(a,a') &= \tau(a')\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')} \\
\theta^{MS,\flat}(a,a') &= \tau(a')(\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}) \\
\theta^{S}(a,a') &= \tau(a')\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')} - \delta_{a^{-1}a'}
\end{aligned}$$

とおくと, Δ が有限グラフの対称有向グラフの場合に, $\theta = \theta^I, \theta^{I,\flat}, \theta^{MS,\flat}, \theta^S$ とすれば, $Z_\Delta(t;\theta)$ はそれぞれ順に本稿における伊原ゼータ, 伊原ゼータのオリジナル盤（被約の場合）, 水野-佐藤ゼータ, 佐藤ゼータとなる. また, $\theta = \theta^{MS}$ は水野-佐藤ゼータの非被約版を与える. また, パラメーター q に対して

$$\theta^{GB}(a,a') = \tau(a')\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')} - (1-q)\upsilon(a')\delta_{a^{-1}a'}$$

とおけば, **一般バーソルディ・ゼータ**[33] $Z_\Delta(q,t;\theta^{GB})$ が得られる [22]. Δ が有限グラフの対称有向グラフでかつ $\tau = \upsilon = 1$ の場合がバーソルディ [3] によるオリジナルの定義であ

[33] 一般バーソルディ・ゼータは水野-佐藤ゼータ ($q = 1$) と一般佐藤ゼータ ($q = 0$) を補間する.

る．佐藤他 [5] においては，バーソルディ・ゼータの荷重版が一般の有限有向グラフに対して定義されている．これは $\tau = \upsilon$ の場合に該当する．

ちなみに，$\theta^{I,\flat}$ および $\theta^{MS,\flat}$ においては，被約ではない閉路は自然に排除されていることに注意されたい．すなわち，$\Pi^\flat_\Delta = \{(a_i) \in \Pi_\Delta \mid a_{i+1} \neq a_i^{-1},\ \forall i\}$ とおくき，力学系 $(\Pi^\flat_\Delta, \lambda)$ を用いて同様の議論を行えば，写像 $\theta : \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to R$ に対して同様に組合せ論的ゼータ

$$Z^\flat_\Delta(t;\theta)$$

を $Z_{\Pi^\flat_\Delta}(t;\theta)$ により定義できる．そして伊原ゼータに対しては $Z^\flat_\Delta(t;\theta^I) = Z_\Delta(t;\theta^{I,\flat})$ を得る．また水野-佐藤ゼータの場合も $Z^\flat_\Delta(t;\theta^{MS}) = Z_\Delta(t;\theta^{MS,\flat})$ を得る．これから覗えるように，グラフゼータにおける閉路の被約性は写像 θ で制御することができる．

以上，組合せ論的ゼータの三種の表示について論じてきた．改めて組合せ論的ゼータを規定し直せば，それは離散構造上定義されるゼータで最も簡明な非自明行列式表示をもつものといえよう．組合せ論的ゼータの伊原表示に関しては [13] で論じられる予定である．

4.3 非可換グラフゼータ

組合せ論的ゼータに対して三種の表示が鼎立する要因を覗うと，その根本は荷重の循環性にあり可換性は過剰である．すなわち，斜体上の議論においても循環積と親和性をもった記号運用を許す言語体系上では，なんらかの形で定義した形式的冪級数が三種の表示を許容する構図の描像に向けた可能性が生じる．次元の一致 [20] の非可換化に向けた考察 [21] を通じて親しんでいた準行列式 [8] および非可換対称函数 [9] やリンドン語に関する議論，あるいはそこで多用される手法の数々からは，その可能性に向けた試論を展開するに十分な動機を与えられる (例えば [8, 命題 1.2.8])．ここではそれに向けた一つの試論を概観する．詳細は [19] で述べる予定である[34]．

$\mathfrak{X} = \{x_{ij} \mid i,j = 1,,2\ldots,n\}$ をアルファベットとし，$F(\mathfrak{X})$ を $\mathfrak{X}$ で生成される**自由斜体**[35] とする．このとき，行列 $M = (x_{ij})^n_{i,j=1}$ は $F(\mathfrak{X})$ 上で可逆であることが知られている (例えば [8])．

定義 12 (準行列式 [8, 定義 1.2.2]) M の逆行列 $M^{-1} = (y_{ij})^n_{i,j=1}$ の (j,i)-成分 y_{ji} の $F(\mathfrak{X})$ における逆元 y_{ji}^{-1} を M の (i,j)-準行列式とよび $|M|_{ij}$ で表す．

$n = 2$ の場合であれば

$$|M|_{11} = x_{11} - x_{12}x_{22}^{-1}x_{21}, \quad |M|_{12} = x_{12} - x_{11}x_{21}^{-1}x_{22},$$
$$|M|_{21} = x_{21} - x_{22}x_{12}^{-1}x_{11}, \quad |M|_{22} = x_{22} - x_{21}x_{11}^{-1}x_{12},$$

[34] 関連する話題としては [15, 18] を挙げておく．

[35] 詳細は [8] を参照．

となる. また, 準行列式は行列式自体の非可換類似ではないことを注意しておく[36]. 正整数 $k(1 \leq k \leq n)$ に対して, M の第 1 行から第 k 行および第 1 列から第 k 列全てを削除して得られる $(n-k)$ 次正方行列を

$$M^{[k]}$$

で表すことにすると, 実際には例えば $|M|_{11}|M^{[1]}|_{22}\cdots|M^{[n-1]}|_{nn}$ が行列式の非可換類似の一つである[37]. 他の定め方もあるが, 本稿ではこれを採用することにして, 以後

$$D(M)$$

で表すことにする[38].

R を $\mathbb{Q}$-代数とする. $\Delta=(V,A)$ を有限有向グラフとし, 有向辺に荷重を与える写像 $\tau : A \to R$ が与えられているとする. $\mathfrak{A}=A(=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\})$ とおく. 写像 $\theta : \mathfrak{A}\times\mathfrak{A} \to R$ を $\theta(a,a')=\tau(a)(\delta_{\mathfrak{t}(a)\mathfrak{o}(a')}-\delta_{a^{-1}a'})$ で定義する. 力学系は (Π_Δ,λ) を選択する. 単射 $\omega : \mathcal{X} \to \mathrm{Lyn}(\mathfrak{A})$ を通じて $\mathcal{X}$ に全順序 $<$ が入る[39]. 次の形式的冪級数

$$\overleftarrow{\prod_{\xi\in\mathcal{X}}}\frac{1}{1-\chi(\pi(\xi))t^{p(\xi)}}$$

を $E_\Delta^{\mathrm{NC}}(t;\theta)$ であらわす. ここで積は全順序 $<$ に関して小さいサイクル ξ が右にくるように並べた無限積である. 変数 t は R に対して中心的に振る舞うものとする. 行列 $M=(\theta(a,a'))_{a,a'\in\mathfrak{A}}$ に対して, 次の形式的冪級数

$$D(I-tM)^{-1}$$

を $D_\Delta^{\mathrm{NC}}(t;\theta)$ で表す. I は n 次の単位行列である. 行列 M に対して形式的冪級数 $-\frac{d}{dt}\log|I-tM|_{kk}$ における t^{k-1} の係数 $\Phi_k(M,i)$ を, **行列 M および k に付随する k 次第二種非可換冪和対称函数** [9] とよぶ[40]. 蛇足であるが, 通常の[41]非可換対称函数の定義における第二種非可換冪和対称函数の定義は以下のようになる [9]. 可算無限アルファベット $\{\Lambda_k\}_{k\geq 1}$ を考える. この Λ_k を k 次非可換基本対称函数という. その生成関数 $\lambda(t)=\sum_{k\geq 1}\Lambda_k t^k$ に対して $\sigma(t)=\lambda(-t)^{-1}$ とおく. これは非可換完全対称函数の生成函

---

[36] M の成分が可換であれば $|M|_{ij}=(-1)^{i+j}\det M/\det M^{ij}$ となる. ただし, M^{ij} は M から第 i 行と第 j 列を削除して得られる行列.

[37] 各 $|M^{[k-1]}|_{k,k}$ において行列の型が小さくなっているから混同の恐れがあるが, 準行列式をとる際の「ピボット」(k,k) の k は, 行列 M のもとの添字そのものを表していることに注意.

[38] ゲルファントらはこれを「前行列式」とよんでいる.

[39] $\xi,\eta\in\mathcal{X}$ に対して, $\xi<\eta$ を $\omega(\xi)<\omega(\eta)$ で定義する. 後者は語における辞書式順序である.

[40] これは n 個の頂点をもつ完全有向グラフの閉路により解釈することができる [9].

[41] 行列に付随しない基本的な定義のもの.

数となる[42]．このとき第二種非可換冪和対称函数 Φ_k は

$$\sigma(t) = \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{\Phi_k}{k} t^k\right)$$

で定義される[43]. 形式的冪級数

$$\overleftarrow{\prod_{r=0}^{n}} \exp\left(\sum_{k\geq 1} \frac{\Phi_k(M^{[a_k]}, a_{k+1})}{k} t^k\right)$$

を $Z_\Delta^{\mathrm{NC}}(t;\theta)$ とおく. 次が成立する.

定理 13 (三橋-も-佐藤) $Z_\Delta^{\mathrm{NC}}(t;\theta) = E_\Delta^{\mathrm{NC}}(t;\theta) = D_\Delta^{\mathrm{NC}}(t;\theta)$.

すなわち, 非可換の場合でも三種の表示が鼎立する「何か」を作ることができる. 節の題目では「非可換グラフゼータ」などと大上段に振りかぶってはみたものの, 果たしてそれが世上にいう「ゼータ」という名にふさわしいものか否か, この試論の段階ではまだ何もいうことはできないだろう. ただ, 三種の表示の鼎立をもって組合せ論的ゼータとよぶ立場からは, それを否定するのは後ろめたいし, 可換・非可換にかかわらず同様の道程が描けることをみれば, 興味を向けるに十分な環境が整えられていることにも確信に近いものを覚える. しかし, 非可換の場合はご覧の通りいまだ試論の域をでるものではなく, とりあえず三種の表示の鼎立を確認できる一例を構成できたに過ぎない. また記述の形態もより洗練させる必要がある. ともあれ, いずれ可換の場合も含む形で整合的な体系にまで発展させることができれば, 本稿の依拠する観点からは一段落であろう. そこまでたどり着けば, また新たな地平が拓けるかもしれないと思っている.

References

[1] M. Artin and B. Mazur, On periodic points, *Ann. Math.*, **81** (1965), 82-99.

[2] H. Bass, The Ihara-Selberg zeta function of a tree lattice, *Internat. J. Math.*, **3** (1992), 717-797.

[3] L. Bartholdi, Counting paths in graphs, *Eiseign. Math.* **45** (1999), 83-131.

[42] $\sigma(t) = \sum_{k\geq 0} S_k t^k$ とおき, S_k を k 次非可換完全対称函数とよぶ.
[43] ここにも組合せ論的ゼータとの縁が感じられる.

[4] K. Chen, R. Fox and R. Lyndon, Free differential calculus IV - The quotient groups of the lower central series, *Ann. Math.*, **68** (1958), 81-95.

[5] Y. Choe, J. H. Kwak, Y. S. Park and I. Sato, Bartholdi zeta and L-functions of weight digraphs, their coverings and products, *Adv. Math.* **213** (2007), 865-886.

[6] D. Emms, E. Hancock, S. Severini and R. Wilson, A matrix representation of graphs and its spectrum as a graph invariant, *Electr. J. Comb.*, **13** (2006).

[7] D. Foata and D. Zeilberger, A combinatorial proof of Bass's evaluations of the Ihara-Selberg zeta function for graphs, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **1** (1988), 425433.

[8] I. Gelfand, S. Gelfand, V. Retakh and R. Wilson, Quasideterminants, *Adv. Math.* **193** (2005), 56-141.

[9] I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh and J. -Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions, *Adv. Math.* **112** (1995), 218-348.

[10] K. Hashimoto, On the zeta- and L-functions of finite graphs, *Internat. J. Math.*, **1** (1990), 381-396.

[11] Y. Hattori and H. Morita, Ruelle zeta functions for finite dynamical systems and Koyama-Nakajima's L-functions, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **92** (2016), 107-111.

[12] Y. Ihara, On discrete subgroups of the two projective linear group over p-adic fields, *J. Math. Soc. Japan*, **18** (1966), 219-235.

[13] Y. Ide, H. Morita, I, Sato and E. Segawa, The Ihara expression for a combinatorial zeta function, in preparaion.

[14] S. Koyama and S. Nakajima, Zeta functions of generalized permutations with application to their factorization formulas, *Proc. Japan Acad.* **88** (2012), 115-120.

[15] N. Konno, H. Mitsuhashi and I. Sato, The quaternionic weighted zeta function of a graph, *J. Algebraic Combin.* **44** (2016), no. 3, 729 - 755.

[16] N. Konno and I. Sato, On the relation between quantum walks and zeta functions, *Quantum Inf. Process.* **11** (2012), no. 2, 341-349.

[17] M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Encyclopedia of Mathematics and its Application **17**, Addison-Wesley, 1983.

[18] H. Mitsuhashi, H. Morita and I. Sato, A matrix-weighted zeta function of a graph. Linear Multilinear Algebra 62 (2014), no. 1, 114 - 125.

[19] H. Mitsuhashi, H. Morita and I. Sato, A noncomutative analogue of a weighted zeta functions for a finite graph, in preparation.

[20] H. Morita, Green polynomials at roots of unity and Springer modules for the symmetric group, *Adv. Math.* **210** (2007), 277-292.

[21] H. Morita, Noncommutative Hall-Littlewood symmetric functions and the Springer modules for the symmetric group, preprint.

[22] H. Morita, Ruelle zeta functions for finite digraphs, in preparation.

[23] H. Mizuno and I. Sato, The weighted zeta functions for graphs, *J. Comb. Theory, Ser. B* **91** (2004), 169-183.

[24] D. Ruelle, *Dynamical zeta functions for piecewise monotone maps of the interval*, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[25] I. Sato, A new Bartholdi zeta function of a graph, *Int. J. Algebra* **1** (2007), no. 5-8, 269-281.

[26] 佐藤巖, グラフのゼータ関数とその行列式表示, 室蘭工業大学数理談話会報告集, 2011.

[27] J. -P. Serre, *Trees*, Springer-Verlag, New York, 1980.

[28] T. Sunada, *L*-functions in geometry and some applications, in Lecture Notes in Math., vol. 1201, pp. 266-284, Springer-Verlag, New York, 1986.

[29] A. Terras, *Zeta functions of graphs - A stroll through the garden*, Cambridge University Press, 2011.