数理解析研究所講究録
第2075巻 2018年 73-87

Pieri Rules for Symplectic and Factorial Q-Functions

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)
Soichi Okada
Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

古典的な Pieri 規則は，任意の Young 図形に対応する Schur 関数と完全対称関数（つまり，1 行の Young 図形に対応する Schur 関数）との積の分解を記述している．つまり，

定理 1.1. (Pieri [17]) 長さ n 以下の分割 λ に対して，対応する Schur 関数を $s_\lambda(\boldsymbol{x}) = s_\lambda(x_1,\dots,x_n)$ と表す．長さ n 以下の分割 μ と正整数 r に対して，

$$s_\mu(\boldsymbol{x})s_{(r)}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda s_\lambda(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

ここで，λ は $\lambda \succ \mu$, $|\lambda| - |\mu| = r$ をみたす長さ n 以下の分割全体をわたる．ただし，$\lambda \succ \mu$ は

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots$$

が成り立つことを意味し，$|\lambda| = \sum_{i=1}^n \lambda_i$, $|\mu| = \sum_{i=1}^n \mu_i$ である．

Pieri 規則は，2 つの任意の Schur 関数の積の分解を記述する Littlewood–Richardson 規則の特別な場合である．しかし，[1] のように，Pieri 型規則から Littlewood–Richardson 型規則を導くこともできる．また，Pieri 型規則自体が，表現論，組合せ論などさまざまな分野で利用されている．例えば [13], [15] では平面分割，半標準盤の組合せ論に応用されている．

定理 1.1 と類似の Pieri 型規則は，Hall–Littlewood 関数，Macdonald 関数（例えば [8] を見よ）や，古典群の既約指標（例えば [15] を見よ）などの Schur 関数の類似物に対しても知られている．ここでは，Schur の P 関数，斜交 Schur 関数（定義は § 2 を見よ）に対する Pieri 型規則を与えておく．

定理 1.2. (1) (Morris [11]) 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，対応する Schur の P 関数を $P_\lambda(\boldsymbol{x})$ と表す．長さ n 以下のストリクトな分割 μ と正整数 r に対して，

$$P_\mu(\boldsymbol{x})P_{(r)}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda 2^{a(\lambda,\mu)-1} P_\lambda(\boldsymbol{x}). \tag{2}$$

ここで，λ は $\lambda \succ \mu$, $|\lambda| - |\mu| = r$ をみたす長さ n 以下のストリクトな分割全体をわたり，

$$a(\lambda,\mu) = \#\{i : \lambda_i > \mu_i > \lambda_{i+1}\}$$

である．

(2) (Sundaram [18]) 長さ n 以下の分割 λ に対して，対応する斜交 Schur 関数を $s^C_\lambda(\boldsymbol{x})$ と表す．長さ n 以下の分割 λ と正整数 r に対して，

$$s^C_\mu(\boldsymbol{x})s^C_{(r)}(\boldsymbol{x}) = \sum_\lambda \tilde{c}^\lambda_{\mu,(r)} s^C_\lambda(\boldsymbol{x})$$

(ただし，λ は長さ n 以下の分割全体をわたる) と展開するとき，係数 $\tilde{c}^\lambda_{\mu,(r)}$ は，

$$\mu \succ \kappa, \quad \lambda \succ \kappa, \quad (|\mu| - |\kappa|) + (|\lambda| - |\kappa|) = r$$

をみたす長さ n 以下の分割 κ の個数に等しい．

本稿では，斜交 P 関数 (C 型ルート系に付随した Hall–Littlewood 関数で $t = -1$ としたもの) に対する Pieri 型公式 (定理 3.1) を与える．これによって，一方の分割の長さが 1 である場合に，斜交 P 関数に関する構造定数の正値性予想 (予想 2.6) が正しいことがわかる．また，Ivanov [6], [7] によって導入された factorial P 関数に対して，factorial パラメータが異なる場合の Pieri 係数が factorial パラメータの非負整数係数の多項式となることを示す (定理 4.3)．

本稿の構成は以下の通りである．§ 2 で斜交 P 関数の定義，性質を復習した後，§ 3 で斜交 P 関数に対する Pieri 型公式を与え，その証明の概要を説明する．§ 4 では factorial P 関数に対する Pieri 型公式を扱う．

2 斜交 P 関数

この節では，斜交 P 関数の定義，諸性質を与え，構造定数に関する予想を提示する．詳細については [14], [16] を参照されたい．

分割とは，非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots)$ で $\sum_{i\geq 1}\lambda_i < \infty$ となるもののことである．分割 λ に対して，$|\lambda| = \sum_{i\geq 1}\lambda_i$ を λ の大きさ，$l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i > 0\}$ を λ の長さと呼ぶ．また，分割 λ は $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_{l(\lambda)} > 0$ をみたすとき，ストリクトであるという．

まず，古典的な Hall–Littelwood 関数について思い出しておく (詳細については [8, Chapter II] を参照されたい)．n 個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x};t) = \frac{1}{v^{(n)}_\lambda(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{x_i - tx_j}{x_i - x_j}\right) \tag{3}$$

によって与えられる対称式を **Hall–Litllewood** 関数と呼ぶ．ここで，$\mathfrak{S}_n$ は n 次対称群であり，$m_j = \#\{i : 1 \leq i \leq n,\ \lambda_i = j\}$ とおくとき

$$v^{(n)}_\lambda(t) = \prod_{j\geq 0}\prod_{k=1}^{m_j} \frac{1-t^k}{1-t}$$

である．このとき，$P_\lambda(\boldsymbol{x};t) \in \mathbb{Z}[t][x_1,\cdots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ であり，**Schur** 関数 $s_\lambda(\boldsymbol{x})$，**Schur** の $\boldsymbol{P}$ 関数 $P_\lambda(\boldsymbol{x})$，**Schur** の $\boldsymbol{Q}$ 関数 $Q_\lambda(\boldsymbol{x})$ は，パラメータ t を $t=0, t=-1$ と特殊化することによって，

$$\begin{aligned} s_\lambda(\boldsymbol{x}) &= P_\lambda(\boldsymbol{x};0) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}),\\ P_\lambda(\boldsymbol{x}) &= P_\lambda(\boldsymbol{x};-1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}),\\ Q_\lambda(\boldsymbol{x}) &= 2^{l(\lambda)}P_\lambda(\boldsymbol{x};-1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}) \end{aligned}$$

として得られる．

この Hall–Littlewood 対称関数を A 型ルート系に付随するものとして，一般のルート系に付随した Hall–Littlewood 関数が定義される（[9, § 10] を見よ）．ここでは，C_n 型ルート系に付随した場合を考える．

定義 2.1. 長さ n 以下の分割 λ に対して，

$$P_\lambda^C(\boldsymbol{x};t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w\in W} w\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \prod_{i=1}^n \frac{1-tx_i^{-2}}{1-x_i^{-2}} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{1-tx_i^{-1}x_j}{1-x_i^{-1}x_j}\frac{1-tx_i^{-1}x_j^{-1}}{1-x_i^{-1}x_j^{-1}}\right) \tag{4}$$

とおき，**斜交 Hall–Littlewood 関数** (symplectic Hall–Littlewood function) と呼ぶ．ここで，$W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ は C_n 型 Weyl 群であり，$m_k = \#\{i : 1\le i\le n,\ m_i = k\}$ とおくとき

$$W_\lambda(t) = \prod_{j=1}^{m_0} \frac{1-t^{2j}}{1-t} \cdot \prod_{k\ge 1}\prod_{j=1}^{m_k} \frac{1-t^j}{1-t}$$

である．このとき，**斜交 Schur 関数** (symplectic Schur function) $s_\lambda^C(\boldsymbol{x})$，**斜交 $\boldsymbol{P}$ 関数** (symplectic P-function) $P_\lambda^C(\boldsymbol{x})$，**斜交 $\boldsymbol{Q}$ 関数** (symplectic Q-function) $Q_\lambda^C(\boldsymbol{x})$ は，斜交 Hall–Littlewood 関数において $t=0, t=-1$ と特殊化することによって，

$$\begin{aligned} s_\lambda^C(\boldsymbol{x}) &= P_\lambda(\boldsymbol{x};0) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下の分割}),\\ P_\lambda^C(\boldsymbol{x}) &= P_\lambda^C(\boldsymbol{x};-1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}),\\ Q_\lambda^C(\boldsymbol{x}) &= 2^{l(\lambda)}P_\lambda^C(\boldsymbol{x};-1) \quad (\lambda \text{ は長さ } n \text{ 以下のストリクトな分割}) \end{aligned}$$

として定義される．

一般に，$P_\lambda^C(\boldsymbol{x};t)$ は $x_1,\cdots,x_n$ に関する W 不変な Laurent 多項式であり，係数は t に関する多項式となる．また，斜交 Schur 関数 $s_\lambda^C(\boldsymbol{x})$ は，斜交群 $\mathbf{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の最高ウェイト λ をもつ既約表現の指標を与える．

1 変数多項式の列 $\{g_d^C(u)\}_{d\ge 0}$ を

$$g_d^C(x+x^{-1}) = \begin{cases} (x^d - x^{-d})(x+x^{-1})/(x-x^{-1}) & (d\ge 1 \text{ のとき})\\ 1 & (d=0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

によって定義すると，

$$P_\lambda^C(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w\in\mathfrak{S}_n} w\left(\prod_{i=1}^n g_{\lambda_i}^C(x_i+x_i^{-1}) \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(x_i+x_i^{-1}) - t(x_j+x_j^{-1})}{(x_i+x_i^{-1}) + (x_j+x_j^{-1})}\right)\right]_{t=-1} \tag{5}$$

と表すこともできる．この表示を用いると，斜交 P 関数に対しても [8, II.8] にあるような Schur の P 関数と同様の公式が成り立つことが示される（[14] を見よ）．

命題 2.2. （Nimmo 型公式）長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda^C(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D^C(\boldsymbol{x})} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A^C(\boldsymbol{x}) & V_\lambda^C(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V_\lambda^C(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n+l(\lambda)\text{ が偶数のとき}), \\ \dfrac{1}{D^C(\boldsymbol{x})} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A^C(\boldsymbol{x}) & V_{\lambda^0}^C(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V_{\lambda^0}^C(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n+l(\lambda)\text{ が奇数のとき}). \end{cases} \tag{6}$$

ここで，

$$D^C(\boldsymbol{x}) = \prod_{1\le i<j\le n} \frac{(x_j + x_j^{-1}) - (x_i + x_i^{-1})}{(x_j + x_j^{-1}) + (x_i + x_i^{-1})},$$
$$A^C(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{(x_j + x_j^{-1}) - (x_i + x_i^{-1})}{(x_j + x_j^{-1}) + (x_i + x_i^{-1})} \right)_{1\le i,j\le n},$$
$$V_\alpha^C(\boldsymbol{x}) = \left(g_{\alpha_j}^C (x_i + x_i^{-1}) \right)_{1\le i\le n, 1\le j\le l}$$

であり，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)})$, $\lambda^0 = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)}, 0)$ である．

ここで，n が偶数であるとき，$\mathrm{Pf}\, A^C(\boldsymbol{x}) = D^C(\boldsymbol{x})$ であることに注意する．

命題 2.3. 非負整数の狭義単調減少列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_l)$ に対して，交代行列 $S_\alpha^C(\boldsymbol{x})$ を

$$S_\alpha^C(\boldsymbol{x}) = \left(P_{(\alpha_i,\alpha_j)}^C(\boldsymbol{x}) \right)_{1\le i,j\le l}$$

（ただし $P_{(r,0)}^C(\boldsymbol{x}) = P_{(r)}^C(\boldsymbol{x})$ とする）とおいて定める．このとき，長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda^C(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} \mathrm{Pf}\, S_\lambda^C(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda)\text{ が偶数であるとき}), \\ \mathrm{Pf}\, S_{\lambda^0}^C(\boldsymbol{x}) & (l(\lambda)\text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \tag{7}$$

また，長さ $1, 2$ のストリクトな分割に対応する斜交 P 関数に対しては，次が成り立つ．

命題 2.4. (1) 長さ 1 の分割に対応する斜交 P 関数の母関数は，

$$1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} P_{(r)}^C(\boldsymbol{x}) z^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{(1+x_i z)(1+x_i^{-1} z)}{(1-x_i z)(1-x_i^{-1} z)} \tag{8}$$

で与えられる．

(2) 長さ 2 のストリクトな分割 (r,s) $(r>s>0)$ に対応する斜交 P 関数は，長さ 1 の分割に対応する斜交 P 関数を用いて

$$\begin{aligned} P_{(r,s)}^C(\boldsymbol{x}) &= P_{(r)}^C(\boldsymbol{x}) P_{(s)}^C(\boldsymbol{x}) \\ &\quad + 2\sum_{k=1}^{s-1} (-1)^k \left(P_{(r+k)}^C(\boldsymbol{x}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} P_{(r+k-2i)}^C(\boldsymbol{x}) + P_{(r-k)}^C(\boldsymbol{x}) \right) P_{(s-k)}^C(\boldsymbol{x}) \\ &\quad + P_{(r+s)}^C(\boldsymbol{x}) + 2\sum_{i=1}^{k-1} P_{(r+s-2i)}^C(\boldsymbol{x}) + P_{(r-s)}^C(\boldsymbol{x}) \end{aligned} \tag{9}$$

と表される．

さらに，斜交 P 関数は，次のようにある種の半標準盤の母関数として表すこともできる．

命題 2.5. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P^C_\lambda(x)=\sum_T x^T. \tag{10}$$

ここで，T は，λ の変形 Young 図形 $S(\lambda)$（§ 4 を見よ）の各正方形に全順序集合

$$\Gamma_n=\{1'<1<\overline{1'}<\overline{1}<2'<2<\overline{2'}<\overline{2}<\cdots<n'<n<\overline{n'}<\overline{n}\}$$

の元を 1 つずつ書き込んで次の 6 つの条件をみたすようにしたもの全体をわたる．

(i) 各行の成分は左から右に広義単調増加である．
(ii) 各列の成分は上から下に広義単調増加である．
(iii) プライムのついた同じ文字は 1 つの行に 2 回以上現れない．
(iv) プライムのつかない同じ文字は 1 つの列に 2 回以上現れない．
(v) 各 k に対して，$k', k, \overline{k'}, \overline{k}$ のうち主対角線に現れる文字は高々 1 つである．[1]
(vi) プライムのついた文字は主対角線に現れない．

また，このような盤 T に対して，文字 $\gamma\in\Gamma_n$ の T における出現回数を $m(\gamma)$ とするとき，

$$x^T=\prod_{k=1}^n x_i^{m(k')+m(k)-m(\overline{k'})-m(\overline{k})}$$

である．

この節の最後に，斜交 P 関数に関する構造定数の正値性予想を与える．C_n 型 Weyl 群 W の作用で不変な Laurent 多項式全体のなす環を $\Lambda^C_n=\mathbb{C}[x_1^{\pm1},\cdots,x_n^{\pm1}]^W$ とし，その部分環 Γ^C_n を

$$\Gamma^C_n=\{f\in\Lambda^C_n : f(t,-t,x_3,\cdots,x_n)\text{ は } t \text{ によらない}\}$$

とおいて定める．このとき，斜交 P 関数 $\{P_{\langle\lambda\rangle}(x):\lambda$ は長さ n 以下のストリクトな分割$\}$ は Γ^C_n の基底をなす．

予想 2.6. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ,ν に対して，

$$P^C_\mu(x)P^C_\nu(x)=\sum_\lambda \widetilde{f}^\lambda_{\mu,\nu}P^C_\lambda(x) \tag{11}$$

と展開するとき，係数 $\widetilde{f}^\lambda_{\mu,\nu}$ は非負整数である．

次の節で与える Pieri 型公式（定理 3.1）から，この予想は $l(\nu)=1$ の場合に正しいことがわかる．

[1] [14, 定義 4.5], [16, 定義 3.6] に書いた条件は正しくなく，こちらが正しい．

3 斜交 P 関数に対する Pieri 型公式

この節では，斜交 P 関数に対する Pieri 型公式を与え，証明の概略を説明する．

2 つの分割 λ, μ が

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \cdots$$

をみたすとき，$\lambda \succ \mu$ と書いた．この節の主定理は，次である．

定理 3.1. λ, μ をストリクトな分割とし，r を正整数とする．このとき，展開 (11) に現れる Pieri 係数 $\widetilde{f}^{\lambda}_{\mu,(r)}$ について，次が成り立つ．

(1) $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu)+1$ の場合を除いて，$\widetilde{f}^{\lambda}_{\mu,(r)} = 0$ である．

(2) $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu)+1$ の場合，

$$\widetilde{f}^{\lambda}_{\mu,(r)} = \sum_{\kappa} 2^{a(\mu,\kappa)+a(\lambda,\kappa)-\chi[l(\mu)>l(\kappa)]-1}. \tag{12}$$

ここで，κ は $\mu \succ \kappa,\ \lambda \succ \kappa,\ (|\mu|-|\kappa|)+(|\lambda|-|\kappa|) = r$ をみたす長さ n 以下のストリクトな分割全体を動き，

$$a(\mu,\kappa) = \#\{i : \mu_i > \kappa_i > \mu_{i+1}\}, \quad a(\lambda,\kappa) = \#\{i : \lambda_i > \kappa_i > \lambda_{i+1}\},$$

$$\chi[l(\mu) > l(\kappa)] = \begin{cases} 1 & (l(\mu) > l(\kappa)\text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

である．

この定理の証明では，Pieri 係数 $\widetilde{f}^{\lambda}_{\mu,(r)}$ の母関数

$$F^{\lambda}_{\mu}(z) = 1 + 2\sum_{r=1}^{\infty} \widetilde{f}^{\lambda}_{\mu,(r)} z^r$$

を考える．$P^C_{(r)}(\boldsymbol{x})$ の母関数 (8) と比較すると，

$$G_z(\boldsymbol{x}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(1+x_i z)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_i z)(1-x_i^{-1}z)}$$

とおくとき，

$$P_{\mu}(\boldsymbol{x}) G_z(\boldsymbol{x}) = \sum_{\lambda} F^{\lambda}_{\mu}(z) P_{\lambda}(\boldsymbol{x})$$

となる．証明の第 1 段階は，$F^{\lambda}_{\mu}(z)$ の行列式表示である．べき級数 $a^s_r(z)$ $(r,\ s \geq 0)$ を

$$g^C_r(x+x^{-1}) \cdot \frac{(1+xz)(1+x^{-1}z)}{(1-xz)(1-x^{-1}z)} = \sum_{s\geq 0} a^s_r(z) g^C_s(x+x^{-1}) \tag{13}$$

によって定める．

命題 3.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ, μ に対して,

$$F_\mu^\lambda(z)=\begin{cases}\det A_\mu^\lambda & (l(\lambda)=l(\mu)\text{ のとき})\ ,\\ \det A_{\mu^0}^\lambda & (l(\lambda)=l(\mu)+1\text{ のとき})\ ,\\ 0 & (\text{その他})\ .\end{cases}\tag{14}$$

ここで, 同じ長さの非負整数列 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_l)$ に対して, $A_\beta^\alpha=\left(a_{\beta_j}^{\alpha_i}(z)\right)_{1\le i,j\le l}$ である.

証明の概略. 斜交 P 関数の表示式 (5) より

$$P_\lambda^C(\boldsymbol{x})G_z(\boldsymbol{x})=\left[\frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)}\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}w\left(\prod_{i=1}^n g_{\lambda_i}^C(x_i+x_i^{-1})\frac{(1+x_iz)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_iz)(1-x_i^{-1}z)}\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(x_i+x_i^{-1})-t(x_j+x_j^{-1})}{(x_i+x_i^{-1})+(x_j+x_j^{-1})}\right)\right]_{t=-1}$$

と表される. よって, Schur の P 関数 $P_\lambda(x)$ に対して Hall–Littlewood 型表示 (3) から Nimmo の公式を導くときの議論 ([12], [14] を見よ) と同様にして,

$$P_\mu(\boldsymbol{x})G_z(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\dfrac{1}{D^C(\boldsymbol{x})}\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}A^C(\boldsymbol{x}) & \widetilde{V}_\mu^C(\boldsymbol{x}) & \widetilde{V}_{(0)}^C & \mathbf{1}\\ -{}^t\widetilde{V}_\mu^C(\boldsymbol{x}) & O & O & 0\\ -{}^t\widetilde{V}_{(0)}^C(\boldsymbol{x}) & 0 & 0 & 1\\ -{}^t\mathbf{1} & 0 & -1 & 0\end{pmatrix} & (n+l(\mu)\text{ が偶数のとき})\ ,\\ \dfrac{1}{D^C(\boldsymbol{x})}\mathrm{Pf}\begin{pmatrix}A^C(\boldsymbol{x}) & \widetilde{V}_{\mu^0}^C(\boldsymbol{x})\\ -{}^t\widetilde{V}_{\mu^0}^C(\boldsymbol{x}) & O\end{pmatrix} & (n+l(\mu)\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

となることがわかる. ここで, $\mathbf{1}$ は成分がすべて 1 の列ベクトルであり, $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ に対して

$$\widetilde{V}_\alpha^C(\boldsymbol{x})=\left(g_{\alpha_j}^C(x_i+x_i^{-1})\cdot\frac{(1+x_iz)(1+x_i^{-1}z)}{(1-x_iz)(1-x_i^{-1}z)}\right)_{1\le i\le n,1\le j\le l}$$

である. $\widetilde{V}_\alpha^C(\boldsymbol{x})$ の成分を (13) の右辺の形に表し, パフィアンの多重線型性, 交代性を用いて Nimmo 型公式 (6) が使える形に変形すると,

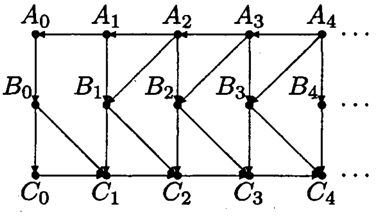
$$F_\mu^\lambda(z)=\begin{cases}\det A_\mu^\lambda & (n+l(\mu)\text{ が偶数であり, }l(\lambda)=l(\mu)\text{ であるとき})\ ,\\ \det A_\mu^{\lambda^0} & (n+l(\mu)\text{ が偶数であり, }l(\lambda)=l(\mu)-1\text{ であるとき})\ ,\\ \det A_{\mu^0}^\lambda & (n+l(\mu)\text{ が偶数であり; }l(\lambda)=l(\mu)+1\text{ であるとき})\ ,\\ \det A_{\mu^0}^{\lambda^0} & (n+l(\mu)\text{ が奇数であり, }l(\lambda)=l(\mu)\text{ であるとき})\ ,\\ \det A_{\mu^0}^\lambda & (n+l(\mu)\text{ が奇数であり, }l(\lambda)=l(\mu)+1\text{ であるとき})\ ,\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となることがわかる. さらに, この行列式表示において $a_0^0(z)=1$, $a_s^0=0$ $(s\ge 1)$ であることを用いると, 求める表示式 (14) が得られる. □

定理の証明の第 2 段階として，Lindström–Gessel–Vienot の補題を用いて命題 3.2 の行列式表示を組合せ論の言葉に書き直す．有向グラフ Γ を，次で与えられる頂点集合 V と（有向）辺集合 E をもつものとして定義する（下図を見よ）．

$$V = \{A_i = (i,1) : i \geq 0\} \sqcup \{B_i = (i,0) : i \geq 0\} \sqcup \{C_i = (i,-1) : i \geq 0\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z},$$
$$E = \{(A_{i+1}, A_i) : i \geq 0\} \sqcup \{(A_i, B_i) : i \geq 0\} \sqcup \{(A_{i+1}, B_i) : i \geq 1\}$$
$$\sqcup \{(B_i, C_i) : i \geq 0\} \sqcup \{(B_i, C_{i+1}) : i \geq 0\} \sqcup \{(C_i, C_{i+1}) : i \geq 0\}.$$

A_1 から B_0 への有向辺がないことに注意しておく．



グラフ Γ の頂点の列 $P = (v_0, v_1, \cdots, v_k)$ で $(v_i, v_{i+1}) \in E$ $(i = 0, 1, \cdots, k-1)$ となるものを，Γ 上の経路という．v_0 を P の始点，v_k を P の終点と呼ぶ．非負整数 r, s に対して，A_r を始点とし C_s を終点とする Γ 上の経路全体のなす集合を $\mathcal{P}_r^s$ と表す．また，Γ 上の経路の組 $(P_1, \cdots, P_l)$ は，どの i, j $(i \neq j)$ に対しても P_i と P_j が共有点をもたないとき，非交差であるという．分割 λ, μ で $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ をみたすものが与えられたとき，Γ 上の非交差経路の集合 $\mathcal{L}_\mu^\lambda$ を

$$\mathcal{L}_\mu^\lambda = \left\{(P_1, \cdots, P_l) : \ P_i \in \mathcal{P}_{\mu_i}^{\lambda_i} \ (i = 1, \cdots, l), \ (P_1, \cdots, P_l) \text{ は非交差}\right\}$$

（ただし，$l = l(\lambda)$ であり，$l(\mu) = l - 1$ のとき $\mu_l = 0$ とする）とおいて定義する．

非交差経路の集合 $\mathcal{L}_\mu^\lambda$ の母関数を考えるために，辺の重み $\mathrm{wt}(e) \in \mathbb{Z}[z]$ $(e \in E)$ を，

$$\mathrm{wt}(A_{i+1}, A_i) = z, \quad \mathrm{wt}(A_i, B_i) = 1, \quad \mathrm{wt}(A_{i+1}, B_i) = z,$$
$$\mathrm{wt}(B_i, C_i) = 1, \quad \mathrm{wt}(B_i, C_{i+1}) = z, \quad \mathrm{wt}(C_i, C_{i+1}) = z$$

によって定める．そして，Γ 上の経路 $P = (v_0, v_1, \cdots, v_k)$ に対して，その重み $\mathrm{wt}(P)$ を

$$\mathrm{wt}(P) = \prod_{i=0}^{k-1} \mathrm{wt}(v_i, v_{i+1})$$

とおいて定義する．このとき，

命題 3.3. 分割 λ, μ が $l(\lambda) = l(\mu)$ あるいは $l(\lambda) = l(\mu) + 1$ をみたすとき，

$$\det A_\mu^\lambda = \sum_{(P_1, \cdots, P_l) \in \mathcal{L}_\mu^\lambda} \prod_{i=1}^{l} \mathrm{wt}(P_i). \tag{15}$$

証明の概略. 非負整数 r, s に対して,

$$b_r^s(z)=\sum_{P\in\mathcal{P}_r^s}\mathrm{wt}(P)$$

とおくと，Lindström–Gessel–Viennot の補題（例えば [19, 第 2 章] を見よ）により,

$$\sum_{(P_1,\cdots,P_l)\in\mathcal{L}_\mu^\lambda}\prod_{i=1}^{l}\mathrm{wt}(P_i)=\det\left(b_{\mu_i}^{\lambda_j}(z)\right)_{1\le i,j\le l}$$

となることがわかる．一方，(13) の展開と経路の母関数を具体的に計算することによって,

$$a_r^s(z)=b_r^s(z)=\begin{cases}1 & (r=0,\ s=0\ \text{のとき}),\\ 2z^s & (r=0,\ s\ge 1\ \text{のとき}),\\ 0 & (r\ge 1,\ s=0\ \text{のとき}),\\ 2z^{r-s}(1+z^2)\dfrac{1-z^{2s}}{1-z^2} & (r\ge 1,\ 1\le s\le r-1\ \text{のとき}),\\ 2(1+z^2)\dfrac{1-z^{2r}}{1-z^2}-1 & (r\ge 1,\ s=r\ \text{のとき}),\\ 2z^{s-r}(1+z^2)\dfrac{1-z^{2r}}{1-z^2} & (r\ge 1,\ s\ge r+1\ \text{のとき})\end{cases}$$

となることが確かめられる． □

以上の準備のもとで，定理 3.1 の証明を完成させることができる．

定理 3.1 の証明の概略. 命題 3.2 より，$l(\lambda)=l(\mu)$ あるいは $l(\lambda)=l(\mu)+1$ が成り立たないときは，$F_\mu^\lambda(z)=0$ となる．$l(\lambda)=l(\mu)$ あるいは $l(\lambda)=l(\mu)+1$ であるときは，命題 3.2, 3.3 より

$$F_\mu^\lambda(z)=\sum_{(P_1,\cdots,P_l)\in\mathcal{L}_\mu^\lambda}\prod_{i=1}^{l}\mathrm{wt}(P_i).$$

ここで，ストリクトな分割 κ（ただし $l(\kappa)=l(\mu)$ あるいは $l(\mu)-1$）に対して，非交差経路 $(P_1,\cdots,P_l)\in\mathcal{L}_\mu^\lambda$ で，各 i に対して P_i が B_{κ_i} を通るもの全体のなす集合を $\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)$ とおく．このとき,

$$\mathcal{L}_\mu^\lambda=\bigsqcup_\kappa\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)$$

であり，$\mu\succ\kappa$, $\lambda\succ\kappa$ でなければ $\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)=\emptyset$ となることがわかる．また，$\mu\succ\kappa$, $\lambda\succ\kappa$ であるときは，$(P_1,\cdots P_l)\in\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)$ に対して

$$\mathrm{wt}\,P_i=z^{(\mu_i-\kappa_i)+(\lambda_i-\kappa_i)}$$

であり,

$$\#\mathcal{L}_\mu^\lambda(\kappa)=2^{a(\mu,\kappa)+a(\lambda,\kappa)-\chi[l(\mu)>l(\kappa)]}$$

となることを証明できる．以上の議論から，定理 3.1 の証明が完成する． □

4 Factorial P 関数とその Pieri 型公式

この節では，Ivanov によって導入された factorial P 関数に対して，factorial パラメータが異なる場合の Pieri 型公式を母関数形で与える．

以下，$\boldsymbol{a} = (a_0, a_1, \cdots)$ をパラメータ（factorial パラメータと呼ぶ）とする．非負整数 r に対して，factorial 単項式 $(x|\boldsymbol{a})^r$ を

$$(x|\boldsymbol{a})^r = \begin{cases} \prod_{i=0}^{r-1}(x - a_i) & (r \geq 1 \text{ のとき}), \\ 1 & (r = 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおいて定義する．Factorial P 関数は，Hall–Littlewood 関数の定義 (3) で，単項式を factorial 単項式で置き換えることによって定義される．factorial P 関数，factorial Q 関数の諸性質については [6], [7] を参照されたい．

定義 4.1. n 個の変数 $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ と長さ n 以下の分割 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}; t) = \frac{1}{v_\lambda^{(n)}(t)} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} w \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i|\boldsymbol{a})^{\lambda_i} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_i - t x_j}{x_i - x_j} \right) \tag{16}$$

によって与えられる対称式を **factorial Hall–Litllewood** 関数と呼ぶ．長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) = P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}; -1), \quad Q_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) = 2^{l(\lambda)} P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}; -1)$$

とおき，それぞれ **factorial P** 関数，**factorial Q** 関数と呼ぶ．

Factorial パラメータがすべて 0 であるときは，$P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{0})$ は Schur の P 関数 $P_\lambda(\boldsymbol{x})$ に一致する．また，factorial P 関数，Q 関数は，極大型直交 Grassmann 多様体，Lagrangian Grassmann 多様体のトーラス同変コホモロジーにおける Schubert 類を記述することも知られている（[4], [5] を見よ）．

Factorial P 関数に対しても，Schur の P 関数と同様の Pfaffian 公式が成り立つ．

命題 4.2. 長さ n 以下のストリクトな分割 λ に対して，

$$P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) = \begin{cases} \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V_\lambda(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V_\lambda(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が偶数であるとき}), \\ \dfrac{1}{D(\boldsymbol{x})} \mathrm{Pf} \begin{pmatrix} A(\boldsymbol{x}) & V_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) \\ -{}^t V_{\lambda^0}(\boldsymbol{x}) & O \end{pmatrix} & (n + l(\lambda) \text{ が奇数であるとき}). \end{cases} \tag{17}$$

ここで，

$$D(\boldsymbol{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}, \quad A(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \leq i,j \leq n}, \quad V_\alpha(\boldsymbol{x}) = \left((x_i|\boldsymbol{a})^{\alpha_j} \right)_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq l}$$

であり，$\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)})$, $\lambda^0 = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{l(\lambda)}, 0)$ である．

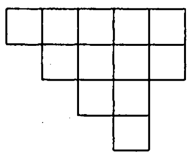
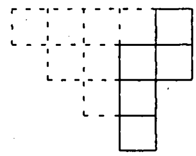
ここでは，長さ 1 のストリクトな分割 (r) に対応する Schur の Q 関数 $Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) = 2P_{(r)}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{0})$ と factorial P 関数 $P_\mu(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$ との積を考える．[8, II.8.(8.1)] より，$Q_{(r)}(\boldsymbol{x})$ の母関数は

$$1 + \sum_{r=1}^{\infty} Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) z^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + x_i z}{1 - x_i z}$$

で与えられる．定理の主張を述べるために，記号，用語を導入する．ストリクトな分割 λ に対して，その変形 Young 図形 (shifted Young diagram) $S(\lambda)$ を

$$S(\lambda) = \{(i,j) \in \mathbb{Z}^2 : i \le j \le \lambda_i + i - 1\}$$

とおいて定義し，格子点に単位正方形をおいて図示する．ストリクトな分割 λ, μ が $S(\lambda) \supset S(\mu)$ をみたすとき，その差集合を $S(\lambda/\mu)$ と表し，歪変形 Young 図形 (skew shifted Young diagram) と呼ぶ．例えば，$\lambda = (5,4,2,1)$, $\mu = (4,3,1)$ のとき，対応する変形 Young 図形，歪変形 Young 図形は，それぞれ

$S((5,4,2,1)) =$ , $S((5,4,2,1)/(4,2,1)) =$ 

となる．歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ は，連結であり 2×2 の正方形を含まないとき，境界帯 (border strip) であるという．例えば，$S((5,4,2,1)/(4,2,1))$ は境界帯である．これらの準備のもとで，この節の主定理を述べることができる．

定理 4.3. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ と正整数 r に対して，

$$P_\mu(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a}) \cdot Q_{(r)}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\lambda} c^{\lambda}_{\mu,(r)}(\boldsymbol{a}) P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$$

と展開し，母関数

$$C^{\lambda}_{\mu}(\boldsymbol{a}, z) = \sum_{r=0}^{\infty} c^{\lambda}_{\mu,(r)}(\boldsymbol{a}) z^r$$

を考える．このとき，

(1) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ でないとき，あるいは，歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ が 2×2 の正方形を含むとき，$C^{\lambda}_{\mu}(\boldsymbol{a}, z) = 0$ である．

(2) 歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ が 2×2 の正方形を含まないとき，$S(\lambda/\mu)$ を境界帯の共通部分をもたない和集合に

$$S(\lambda/\mu) = \bigsqcup_{i=1}^{r} S(\lambda_{m(i)}, \cdots, \lambda_{M(i)})/(\mu_{m(i)}, \cdots, \mu_{M(i)})$$

（ただし $\lambda_{m(i)} > \mu_{m(i)}$, $\lambda_{M(i)} > \mu_{M(i)}$）と分解し，

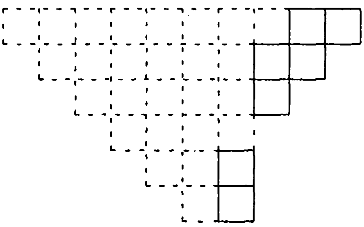
$$K = \begin{cases} \{k : 1 \le k \le l(\mu),\ \lambda_k = \mu_k\} & (n + l(\mu) \text{ が偶数のとき}) , \\ \{k : 1 \le k \le l(\mu) + 1,\ \lambda_k = \mu_k\} & (n + l(\mu) \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

とおくと,

$$C^{\lambda}_{\mu}(\boldsymbol{a},z)=\prod_{k\in K}\frac{1+a_{\mu_k}z}{1-a_{\mu_k}z}\prod_{i=1}^{r}\frac{2z^{\lambda_{m(i)}-\mu_{M(i)}}}{\prod_{j=\mu_{M(i)}}^{\lambda_{m(i)}}(1-a_jz)}$$

と表される.
特に, 係数 $c^{\lambda}_{\mu,(r)}$ は factorial パラメータ $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots)$ の非負整数係数の多項式である.

例えば, $\lambda=(10,8,6,4,3,2)$, $\mu=(8,6,5,4,2,1)$ のとき, 歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ は

$S(\lambda/\mu)=$ 

$$=S((10,8,6)/(8,6,5))\sqcup S((3,2)/(2,1))$$

と境界帯に分解され,

$$K=\begin{cases}\{4\} & (n\text{ が偶数のとき}),\\ \{4,7\} & (n\text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

となるので,

$$C^{(10,8,6,4,3,2)}_{(8,6,5,4,2,1)}=\begin{cases}\dfrac{1+a_4z}{1-a_4z}\cdot\dfrac{2z^{10-5}}{\prod_{i=5}^{10}(1-a_iz)}\cdot\dfrac{2z^{3-1}}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_iz)} & (n\text{ が偶数のとき}),\\[2ex] \dfrac{1+a_4z}{1-a_4z}\cdot\dfrac{1+a_7z}{1-a_7z}\cdot\dfrac{2z^{10-5}}{\prod_{i=5}^{10}(1-a_iz)}\cdot\dfrac{2z^{3-1}}{\prod_{i=1}^{3}(1-a_iz)} & (n\text{ が偶数のとき}).\end{cases}$$

この定理といくつかの計算機による実験例から, 次を予想している.

予想 4.4. 長さ n 以下のストリクトな分割 μ,ν が与えられたとき,

$$P_\mu(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})P_\nu(\boldsymbol{x})=\sum_{\lambda}c^{\lambda}_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a})P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$$

と展開する. このとき, 係数 $c^{\lambda}_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a})$ は factorial パラメータ $\boldsymbol{a}$ に関する非負整数係数の多項式である. より一般に, パラメータ $\boldsymbol{a}=(a_0,a_1,\cdots)$, $\boldsymbol{b}=(b_0,b_1,\cdots)$ に対して,

$$P_\mu(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})P_\nu(\boldsymbol{x}|-\boldsymbol{b})=\sum_{\lambda}c^{\lambda}_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})P_\lambda(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{a})$$

(ただし, $-\boldsymbol{b}=(-b_0,-b_1,\cdots)$ である) と展開するとき, 係数 $c^{\lambda}_{\mu,\nu}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ は $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に関する非負整数係数の多項式である.

注意． Cho–Ikeda [2] は，factorial パラメータが同じ場合（つまり，$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$ の場合）に，Pieri 係数 $c^{\lambda}_{\mu,(r)}(\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})$ の組合せ論的な公式を与え，$c^{\lambda}_{\mu,(r)}$ が $a_i \pm a_j$ $(i>j)$ に関する非負整数係数多項式として表されること（Graham [3] の意味での正値性）を示している．

注意． Factorial Schur 関数については，予想 4.4 にあたる正値性が Molev–Sagan [10] によって示されている．

以下では，定理 4.3 の証明の概要を説明する．

定理 4.3 の証明の概要． z のべき級数 $d^s_r(\boldsymbol{a};z)$ $(r,\, s\geq 0)$ を

$$(t|\boldsymbol{a})^r\cdot\frac{1+tz}{1-tz}=\sum_{s=0}^{\infty}d^s_r(\boldsymbol{a};z)(t|\boldsymbol{a})^s$$

によって定義する．このとき，命題 3.2 の証明と同様の議論により，

$$C^{\lambda}_{\mu}(\boldsymbol{a};z)=\begin{cases}\det D^{\lambda}_{\mu} & (n+l(\mu)\ \text{が偶数であり，}\ l(\lambda)=l(\mu)\ \text{であるとき})\ ,\\ \det D^{\lambda^0}_{\mu} & (n+l(\mu)\ \text{が偶数であり，}\ l(\lambda)=l(\mu)-1\ \text{であるとき})\ ,\\ \det D^{\lambda}_{\mu^0} & (n+l(\mu)\ \text{が偶数であり，}\ l(\lambda)=l(\mu)+1\ \text{であるとき})\ ,\\ \det D^{\lambda^0}_{\mu^0} & (n+l(\mu)\ \text{が奇数であり，}\ l(\lambda)=l(\mu)\ \text{であるとき})\ ,\\ \det D^{\lambda}_{\mu^0} & (n+l(\mu)\ \text{が奇数であり，}\ l(\lambda)=l(\mu)+1\ \text{であるとき})\ ,\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

となることがわかる．ここで，$D^{\alpha}_{\beta}=\left(d^{\alpha_i}_{\beta_j}(\boldsymbol{a};z)\right)_{1\leq i,j\leq l}$ である．また，$d^r_s(\boldsymbol{a};z)$ は具体的には，

$$d^s_r(\boldsymbol{a};z)=\begin{cases}\dfrac{1+a_rz}{1-a_rz} & (s=r\ \text{のとき})\ ,\\[2ex] \dfrac{2z^{s-r}}{\prod_{j=r}^{s}(1-a_jz)} & (s>r\ \text{のとき})\ ,\\ 0 & (s<r\ \text{のとき})\end{cases}$$

で与えられる．

まず，行列式表示と $s<r$ のとき $d^s_r(\boldsymbol{a};z)=0$ であることから，

(a) $S(\lambda)\supset S(\mu)$ でなければ，$C^{\lambda}_{\mu}(\boldsymbol{a};z)=0$ となる

ことがわかる．

そこで，以下では $S(\lambda)\supset S(\mu)$ の場合を考える．このとき，上の行列式表示と $d^0_r(\boldsymbol{a};z)=0$ $(r>0)$ であることから，

$$C^{\lambda}_{\mu}=\begin{cases}\det D^{\lambda}_{\mu} & (n+l(\mu)\ \text{が偶数で}\ l(\lambda)=l(\mu)\ \text{であるとき})\ ,\\ d^0_0(\boldsymbol{a};z)\cdot\det D^{\lambda}_{\mu} & (n+l(\mu)\ \text{奇数で}\ l(\lambda)=l(\mu)\ \text{であるとき})\ ,\\ \det D^{\lambda}_{\mu^0} & (l(\lambda)=l(\mu)+1\ \text{であるとき})\ ,\\ 0 & (\text{その他})\end{cases}$$

が導かれる．そして，次を示すことができる．

(b) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ であり，$\lambda_{k+1} < \mu_k$ となる k が存在するならば，$C_\mu^\lambda(\boldsymbol{a};z) = C_{\mu'}^{\lambda'}(\boldsymbol{a};z) \cdot C_{\mu''}^{\lambda''}(\boldsymbol{a};z)$ である．ここで，

$$\lambda' = (\lambda_1, \cdots, \lambda_k), \quad \mu' = (\mu_1, \cdots, \mu_k),$$
$$\lambda'' = (\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_m), \quad \mu'' = (\mu_{k+1}, \cdots, \mu_m).$$

(c) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ であり，$\lambda_k = \mu_k > 0$ となる k が存在するならば，$C_\mu^\lambda(\boldsymbol{a};z) = C_{\mu'}^{\lambda'}(\boldsymbol{a};z) \cdot d_{\mu_k}^{\lambda_k}(\boldsymbol{a};z) \cdot C_{\mu''}^{\lambda''}(\boldsymbol{a};z)$ である．ここで，

$$\lambda' = (\lambda_1, \cdots, \lambda_{k-1}), \quad \mu' = (\mu_1, \cdots, \mu_{k-1}),$$
$$\lambda'' = (\lambda_{k+1}, \cdots, \lambda_m), \quad \mu'' = (\mu_{k+1}, \cdots, \mu_m).$$

さらに，$t > s > r$ のとき

$$d_r^t(\boldsymbol{a};z) = d_r^s(\boldsymbol{a};z) \cdot \frac{z^{t-s}}{(1-a_{s+1}z)\cdots(1-a_t z)}$$

であることに注意し，行列の基本変形を用いると，

(d) $S(\lambda) \supset S(\mu)$ であり，歪変形 Young 図形 $S(\lambda/\mu)$ は連結であるが，2×2 の正方形を含むならば，$C_\mu^\lambda(\boldsymbol{a};z) = 0$ となる

ことが証明できる．

以上の主張 (a), (b), (c), (d) により，定理の証明は $S(\lambda/\mu)$ が境界帯であるときの $\det D_\mu^\lambda$ (あるいは $\det D_{\mu^0}^\lambda$) の計算に帰着される．つまり，λ, μ が

$$\lambda_1 > \mu_1 = \lambda_2 > \mu_2 = \lambda_3 > \cdots > \mu_{l-1} = \lambda_l > \mu_l \geq 0$$

をみたすとき，

$$\det D_\mu^\lambda(\boldsymbol{a};z) = \frac{2z^{\lambda_1-\mu_l}}{\prod_{i=\mu_l}^{\lambda_1}(1-a_i z)}$$

となることを示せばよいが，これは l に関する帰納法と $d_r^s(\boldsymbol{a};z)$ の具体形を用いることによって証明できる．

以上をまとめると，定理の主張が導かれる． □

参考文献

[1] A. Buch, A. Kresch, and H. Tamvakis, Littlewood–Richardson rules for Grassmannians, Adv. Math. **185** (2004), 80–90.

[2] S. Cho and T. Ikeda, Pieri rule for the factorial Schur P-functions, in "Schubert Varieties, Equivariant Cohomology and Characteristic Classes", eds. J. Buczyński, M. Michałek, and E. Postinghel, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., 2018, pp. 25–48.

[3] W. Graham, Positivity in equivariant Schubert calculus, Duke Math. J. **109** (2001), 599–614.

[4] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, Adv. Math. **215** (2007), 1–23.

[5] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, Trans. Amer. Math. Soc. **361** (2009), 5193–5221.

[6] V. N. Ivanov, Combinatorial formula for factorial Schur Q-functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **107** (2001), 4195–4211.

[7] V. N. Ivanov, Interpolation analogues of Schur Q-functions, J. Math. Sci. (N.Y.) **131** (2005), 5495–5507.

[8] I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd edition", Oxford Univ. Press, 1995.

[9] I. G. Macdonald, Orthogonal polynomials associated with root systems, Sém. Lothar. Combin. **45** (2000/01), Art. B45a.

[10] A. I. Molev and B. E. Sagan, A Littlewood–Richardson rule for factorial Schur functions, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), 4429–4443.

[11] A. O. Morris, A note on the multiplication of Hall functions, J. London Math. Soc. **39** (1964), 481–488.

[12] J. J. C. Nimmo, Hall–Littlewood symmetric functions and the BKP equation, J. Phys. A **23** (1990), 751–760.

[13] S. Okada, (q,t)-Deformations of multivariate hook product formulae, J. Algebraic Combin. **32** (2010), 399–416.

[14] 岡田 聡一, Schur Q-functions and symplectic Q-functions, 2016 年度表現論シンポジウム講演集, 2016, pp. 111–132.

[15] S. Okada, Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux, Electron. J. Combin. **23** (2016), #P4.43

[16] 岡田 聡一, Symplectic Q-functions, 数理解析研究所講究録 **2039**「リー型の組合せ論」(2017), 90–105.

[17] M. Pieri, Sul problema degli spazi secanti, Rend. Ist. Lombardo (2) **26** (1893), 534–546.

[18] S. Sundaram, The Cauchy identity for $Sp(2n)$, J. Combin. Theory Ser. A **53** (1990), 209–238.

[19] 高崎 金久, 線形代数と数え上げ, 日本評論社, 2012.