

# 同軸円筒内を流れる流体ジェットの実定性

Instabilities of a liquid jet flowing in a coaxial cylinder

大阪大学 (Osaka Univ.)

吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)

## 1 研究の背景と目的

液体ジェットの安定性の問題は、微小粒子や微細ファイバーの形成に関連して、工学や産業などの幅広い分野において重要である [1]. 最も基本的な形状である円柱ジェットの液滴形成に関しては古くから実験的に調べられてきた [2, 3].

ノズルから噴出するジェットの流速を  $U$ , ノズルから液滴が形成されるまでの距離を  $L$  とすると,  $U$  が十分小さい場合を除き,  $U$  が増加するに従いノズル付近では一様なジェットが形成され,  $L$  は  $U$  とともに増加する. この領域での液滴形成では表面張力が支配的で, 形成される液滴径はノズル径の約2倍である. このような表面張力不安定が支配的なモードはレイリーモード (Rayleigh mode) とよばれる.

さらに  $U$  が増加すると表面張力不安定に周囲流体との速度差による空力不安定が加わるため,  $U$  の増加とともに  $L$  は増加から減少に転ずる. この時ジェット先端部に形成される液滴径はノズル径とほぼ同程度にまで減少する. この領域での液滴形成モードは第1空力不安定モード (first wind-induced mode) とよばれる. さらに  $U$  が増加すると, 空力不安定により  $L$  はさらに減少する. このとき, 液滴はジェット先端部からだけでなく, ジェット周囲部からも発生し液滴径はさらに小さくなる. この不安定モードは第2空力不安定モード (second wind-induced mode) とよばれる. そして, この第1, 第2空力不安定モードをあわせてテイラーモード (Taylor mode) とよばれる.

流速  $U$  がさらに増加すると, ノズル内の流速分布に依存して  $L$  は増加する場合と減少する場合に分かれるが, いずれの場合も多数の微細な液滴がノズル付近で形成される. このようなモードは噴霧モード (atomization mode) とよばれる.

このようにジェットの液滴形成は, 表面張力, ジェット流体と周囲流体の密度比や速度差が特に重要な役割を果たすことが知られているが, 液滴形成に関する実験的研究は主にレイリーモードに対して行われてきており [4], テイラーモード (第2空力不安定モード) や噴霧モードでの微小液滴形成に関する詳細な研究はほとんど見られない [5]. 一方, 理論的研究でも, これまで主にレイリーモードに関して線形, 非線形の両面から調べられており, 液滴やサテライト形成のメカニズムが明らかにされつつある [3, 4]. しかし, テイラーモードや噴霧モードでの液滴形成メカニズムは線形理論では十分説明できず, 限られ

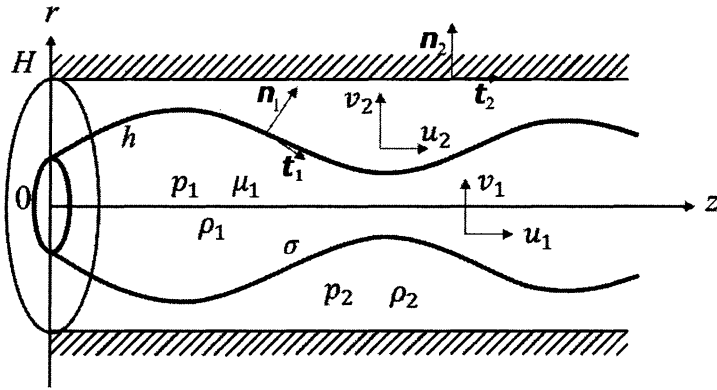


図 1: Schematic of a column jet with a surrounding gas in a coaxial cylinder.

た条件の下で数値解析が行われているだけである [6, 7]. そのため、微小液滴形成メカニズムは十分理解されているとはいえない。

さらに、これまでの実験及び理論的な研究では、無限に広がった周囲環境のもとでのジェットの手動が調べられてきた。しかし、実際の周囲環境として固体壁の影響などが考えられるため、ジェットの安定性や液滴形成に及ぼす固体壁の影響を調べることは重要である [8].

本研究では、最も基本的な周囲環境として、同軸円筒内での周囲流体の運動を考慮した、ジェットの安定性解析をおこなう。特に、周囲固体壁の位置や周囲流体との密度比や速度差が円柱ジェットの安定性に及ぼす影響を明らかにしている。

## 2 問題の定式化とジェット方程式

図 1 に示すような軸対称円筒座標系  $(z, r)$  で、同軸円筒壁で覆われた液体円柱ジェットを考える。ジェット主流部、周囲流体部をそれぞれ添え字  $j = 1, 2$  で表し、ジェットの速度成分を  $(u_j, v_j)$ 、圧力を  $p_j$ 、密度を  $\rho_j$ 、粘性係数を  $\mu_j$ 、界面での表面張力を  $\sigma$  とする。また、 $h(z, r)$  をジェットの半径、 $H$  は壁面までの距離 (一定) とする。 $n_j, t_j$  はそれぞれ界面における法線ベクトルと接線ベクトルである。ただし本解析では周囲流体部の粘性は無視し ( $\mu_2 = 0$ )、重力の影響を考えないものとする。さらに、後の解析のために、周囲流体部の中央面  $R = (h + H)/2$  を導入する。

基礎方程式はジェット部 ( $0 < r < h$ ) 及び周囲流体部 ( $h < r < H$ ) の連続の式と運動方程式である。一方、境界条件は、ジェット界面 ( $r = h$ ) での運動学的条件および力学的条件、壁面 ( $r = H$ ) での運動学的条件からなる。

このような境界条件の下で基礎方程式は容易に解くことができない。そこで攪乱の波長がジェットの径や円筒半径に比べて十分長いと仮定する以下のような長波近似を導入する：

(i) ジェット流体部 ( $0 \leq r < h$ ):

$$u_1 = u_1^{(0)} + r^2 u_1^{(2)} + \dots, \quad (1a)$$

$$p_1 = p_1^{(0)} + r^2 p_1^{(2)} + \dots, \quad (1b)$$

(ii) 周囲流体部 ( $h < r < H$ ,  $R \equiv (H + h)/2$ ):

$$u_2 = u_2^{(0)} + (r - R)u_2^{(1)} + (r - R)^2 u_2^{(2)} + \dots, \quad (2a)$$

$$v_2 = v_2^{(0)} + (r - R)v_2^{(1)} + (r - R)^2 v_2^{(2)} + \dots, \quad (2b)$$

$$p_2 = p_2^{(0)} + (r - R)p_2^{(1)} + (r - R)^2 p_2^{(2)} + \dots. \quad (2c)$$

長波近似 (1), (2) を基礎方程式と境界条件に用いて, 最低次の近似で以下のようなジェットの通減された非線形方程式を無次元形で得る:

$$h_t = -u_1 h_z - (h/2)u_{1z}, \quad (3a)$$

$$u_{1t} = -u_1 u_{1z} - p_{1z} + (2u_{1zz} + 6h^{-1}h_z u_{1z})/\text{Re}, \quad (3b)$$

$$u_{2t} = -u_2 u_{2z} - (p_2^{(0)} - p_2^{(1)} R_z)/\gamma, \quad (3c)$$

$$v_{2t} = -u_2 v_{2z} - p_2^{(1)}/\gamma, \quad (3d)$$

ここで, 下付き添え字  $t, z$  は微分を表し, 無次元数  $\text{Wb} = \rho_1 h_0 U_0 / \sigma$ ,  $\text{Re} = \rho_1 h_0 U_0 / \mu_1$ ,  $\gamma = \rho_2 / \rho_1$  が導入されている. ただし,  $h_0, U_0$  はそれぞれ長さ, 速度の代表量であるが,  $U \equiv u_{10} - u_{20}$  のように, 各層での代表速度  $u_{10}, u_{20}$  を用いると, 常にジェット部の代表速度 1, 気相部の代表速度を 0 と選ぶことができる. さらに, ジェット部圧力  $p_1$  と周囲流体圧力  $p_2^{(0)}, p_2^{(1)}$  は以下の関係がある:

$$p_1 = p_2^{(0)} + (h - H)p_2^{(1)}/2 - \kappa/\text{Wb} - u_{1z}/\text{Re}. \quad (4)$$

ここで,  $\kappa = h^{-1}(1 + h_z^2)^{-1/2} - h_{zz}(1 + h_z^2)^{-3/2}$  は曲率である. このとき,  $p_2^{(0)}, p_2^{(1)}$  は以下の微分方程式を満たす:

$$(A_1 p_{2zz}^{(0)} + A_2 p_{2z}^{(0)}) + (A_3 p_{2zz}^{(1)} + A_4 p_{2z}^{(1)} + A_5 p_2^{(1)}) + A_6 = 0, \quad (5a)$$

$$(B_1 p_{2zz}^{(0)} + B_2 p_{2z}^{(0)}) + (B_3 p_{2zz}^{(1)} + B_4 p_{2z}^{(1)} + B_5 p_2^{(1)}) + B_6 = 0. \quad (5b)$$

ここで, 係数  $A_1$  から  $A_6$ ,  $B_1$  から  $B_6$  は  $h, u_1, u_2, v_2$  の複雑な関数である. このようにして, 問題は圧力の方程式 (5) を満たすような圧力差 (4) に対して方程式系 (3) を解くことに帰着される.

### 3 長波近似の有効性と限界

前節で得られた方程式の近似の有効性を調べるために、基礎方程式の厳密な線形安定性と長波近似での線形安定性を比較する。実波数  $k$ 、複素角周波数  $\omega$  に対して、一様状態に正弦攪乱を加えた状態  $\mathbf{v}_1 = (1 + \tilde{u}_1, \tilde{v}_1)$ ,  $\mathbf{v}_2 = (\tilde{u}_2, \tilde{v}_2)$ ,  $h = 1 + \tilde{h}$ ,  $p_1 = 1/Wb + \tilde{p}_1$ ,  $p_2^{(0)} = \tilde{p}_2^{(0)}$ ,  $p_2^{(1)} = \tilde{p}_2^{(1)}$  を考える。ここで、正弦攪乱  $\propto \exp[i(kz - \omega t)]$  である。このとき、 $\Omega = \omega - k$  とおくと、以下のような厳密方程式と近似方程式の分散関係式を得る：

(i) 近似解:  $a_1(k)\Omega^2 + a_2(k)\Omega + a_3(k) = 0$ ,

(ii) 厳密解:  $b_1(k, \Omega)\Omega^2 + b_2(k, \Omega)\Omega + b_3(k, \Omega) = 0$ .

ここで、 $a_1, a_2, a_3$  は  $k$  の複素関数、 $b_1, b_2, b_3$  は  $k$  の複素関数、 $\Omega$  複素超越関数である。上式で  $k$  に対して  $\Omega$  を求め、 $\Omega$  の虚数部  $\Omega_I > 0$  が時間不安定性を示す。

以下に  $Wb = 1000$ ,  $\gamma = 0.001$  で  $H = 2, 3$ ,  $Re = 10, 100, 1000, \infty$  の場合の近似解 (i) と厳密解 (ii) の比較を図2に示す。図では線は近似解を、印は厳密解を示す。図よりわかる

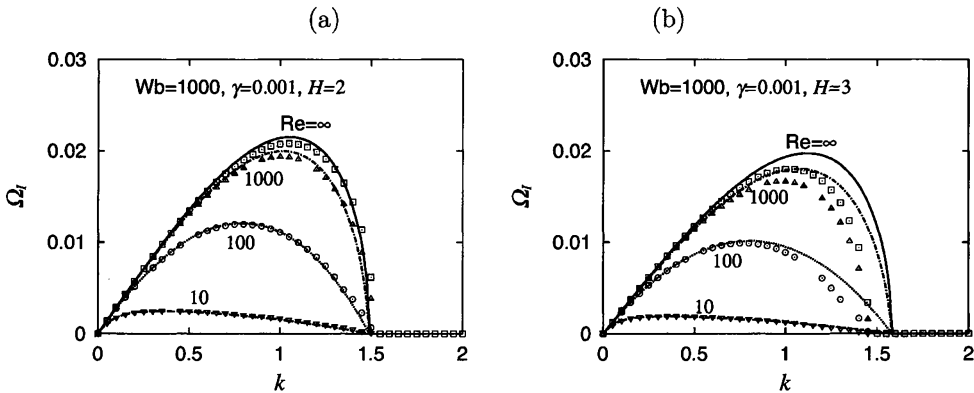


図2: Comparison of linear instabilities between exact solutions (marks) and approximation (lines).

ように、 $H = 2$  から  $3$  に増加するにつれて、また  $Re = 10$  から  $\infty$  に増加するにつれて近似解は厳密解からより離れていく。以下では、最も条件の厳しい  $Re = \infty$  の場合について、 $H$  の影響をより詳しく調べる。

図3は最大増幅率を与える波数  $k_m$  と不安定領域 ( $0 \leq k \leq k_c$ ) の最大波数  $k_c$  を  $H$  に対して厳密解 (印) と近似解 (線) で比較している。  $k_m, k_c$  の両者ともに、 $H \gtrsim 3$  で近似解は厳密解から離れていくため、長波近似が成り立たなくなっていることがわかる。また、 $H \lesssim 1.5$  で  $k_m, k_c$  は  $H$  の変化とともに急激に変化することから、安定性に及ばず壁の効果が大きく現れていることがわかる。このことから、近似が有効である  $H$  の範囲と、壁の影響が大きく現れる  $H$  の範囲が存在することが予想される。

図4は各  $Wb$  に対して、長波近似が有効になる  $H$  の範囲  $1 \leq H \lesssim H_c$ 、壁の影響が現れる  $H$  の範囲  $1 \leq H \lesssim H_w$  を  $\gamma = 0.001$  に対して示している。図よりわかるように、 $H_c$  は

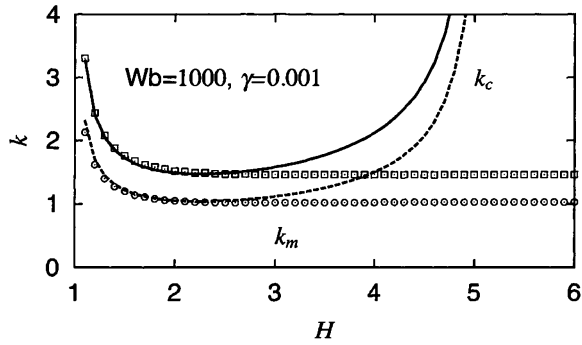


図 3: Variations of  $k_m$  and  $k_c$  with  $H$ , where marks denote the exact solutions and lines the approximation.

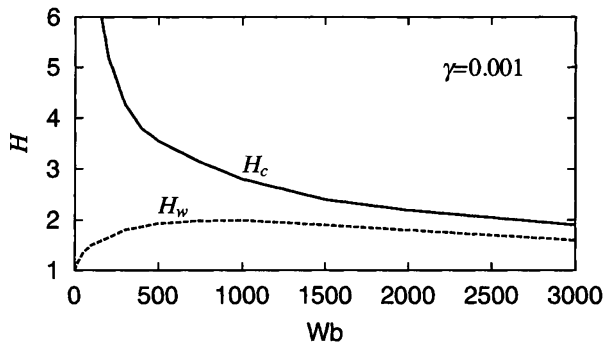


図 4: Variations of critical  $H$  with  $Wb$ , where the long wave approximation is valid for  $H < H_c$  and the approximation deviates from the exact solutions for  $H > H_c$ , while influence of the wall disappears for  $H > H_w$  and appears for  $H < H_w$ .

$Wb$  の増加とともに減少し、 $H_w$  は増加する。すなわち主流速度の増加とともに、近似の適用範囲は減少し、壁の影響がより大きく現れる。また、 $H_w \lesssim H \lesssim H_c$  の領域では、本解析で用いた近似解は無限に広がった周囲流体内でのジェットの安定性に対して用いることができる。

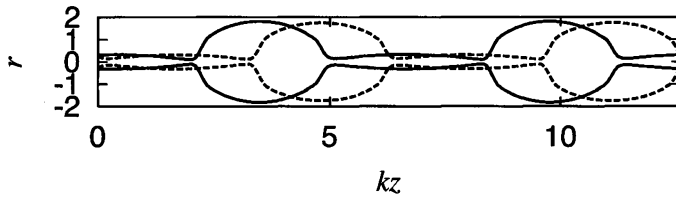
## 4 計算結果

方程式系 (3) を圧力方程式 (5) と連立して数値的に解く。計算は時間微分を Runge-Kutta 法で、空間微分を有限差分法でおこない、圧力の方程式は Gauss の消去法を用いた。以下では基本パラメータとして  $\gamma = 0.001$ ,  $Re = \infty$ ,  $H = 2, 3$ ,  $Wb = 100, 1000$  をとる。

図 5 は、 $Wb = 100, 1000$  に対する崩壊時の  $h$  の形状を示している。図で実線は  $H = 2$ ,

破線は  $H = 3$  の場合を示す。図よりわかるように、 $Wb = 100$  の場合は  $H$  の値によらず、

(a)  $Wb = 100$



(b)  $Wb = 1000$

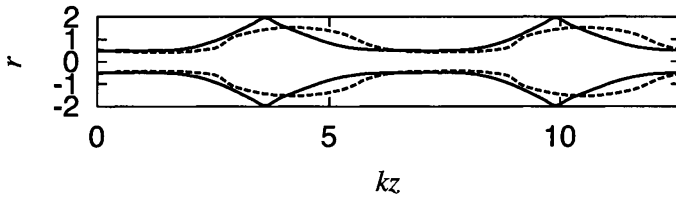


図 5: Breakup profiles for different  $Wb$  when  $H = 2$  (solid lines) and  $3$  (broken lines), where  $Wb = 100$  in (a) and  $Wb = 1000$  in (b).

ジェットはピンチングにより崩壊して液滴とサテライトを形成することが予想される。一方、 $Wb = 1000$  の場合、 $H = 2$  では最大振幅部がカスパ状になり、 $H = 3$  では最大振幅はそれほど大きくなる。  $Wb = 1000$  では、いずれの  $H$  の場合もピンチングはおこらないことが予想され、 $Wb$  の大きさは崩壊形状に大きな影響を与える。

図 6 は  $h$  の最大値、最小値の時間発展を  $H = 2$  (実線)、 $H = 3$  (破線) に対して示している。図からわかるように、 $Wb = 100, 1000$  いずれの場合も、 $h_{max}$ 、 $h_{min}$  共に時間の増加とともに大きく変化する。このとき、 $Wb = 100$  では  $h_{min}$  がより速やかに減少しピンチングに至るが、 $Wb = 1000$  では  $h_{max}$  がより速やかに増大し、特に  $H = 2$  ではカスパの出現につながる。したがって、ピンチングにより崩壊するモードは Rayleigh モードとよぶことができる。また、カスパ形状を示し崩壊するモードでは、カスパ先端から微小液滴が形成されることが予想される。したがって、このようなカスパを形成するモードを以降 Taylor モードとよぶ。

このように、Rayleigh モードは大きな  $H$  に対して、Taylor モードは小さな  $H$  に対して現れることから、 $Wb$  に対して Rayleigh、Taylor 両モードの領域を分ける  $H$  の値を調べた。図 7(a) は  $\gamma = 0.01, 0.001, 0.0001$  に対して、図 7(b) は  $Re = 100, 1000, \infty$  に対する両モードを分ける  $H$  の臨界曲線を示している。図の曲線はジェット崩壊時に  $(1 - h_{min}) > (h_{max} - 1)$  となる場合を Rayleigh モード、 $(1 - h_{min}) < (h_{max} - 1)$  となる場合を Taylor モードと判定して得られた結果である。

図よりわかるように、 $\gamma$  が大きいほど Taylor モードを与える  $H$  が大きく現れることから、周囲流体の影響により Taylor モードが現れる。また、 $Re$  が小さくなると Taylor モードを与える  $H$  の領域は  $Wb$  の増加とともに急激に増加することがわかる。いずれにして

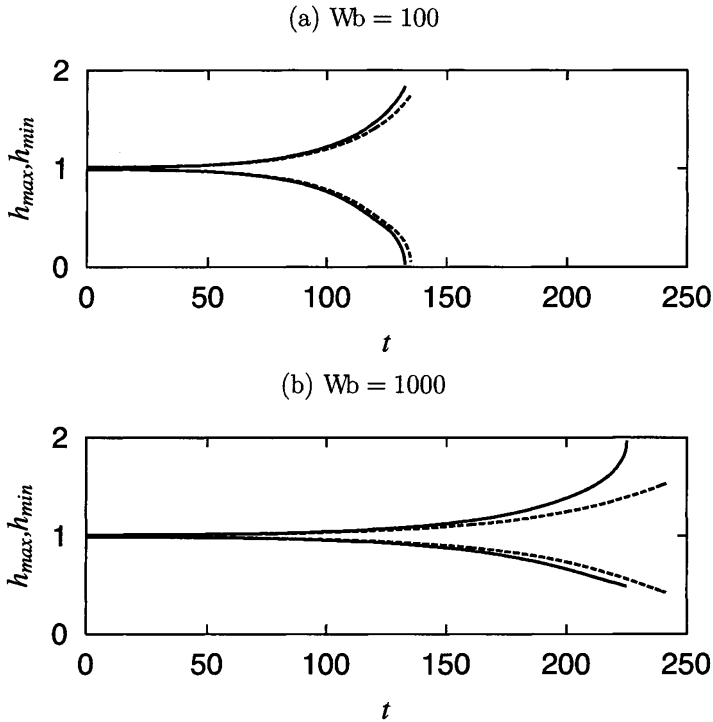


図 6: Evolutions of maxima and minima of the amplitude for different  $Wb$  when  $H = 2$  (solid lines) and 3 (broken lines), where Rayleigh mode is shown for  $Wb = 100$  in (a) and Taylor mode for  $Wb = 1000$  in (b)

も、Taylor モードは  $Wb$  が大きくなるほど (主流速度が増加するほど、したがって周囲流体との速度差が増加するほど) より大きな  $H$  で現れる。したがって、 $H$  が小さければ、比較的低い  $Wb$  でも Taylor モードは現れることが予想される。

## 5 まとめ

以上得られた結果をまとめて以下に示す：

- ジェットの安定性に円筒壁の影響が現れない  $H$  や  $Wb$  を選ぶことができる。
- Rayleigh モードから Taylor モードへの移行は、 $H$  が小さくなるほど低  $Wb$  でおこる。また、この移行は  $Re$  が小さく、 $\gamma$  が大きくなるとよりおこりやすい。
- $Wb = 1000$  での解析から  $H = 3$  で第 1 空力不安定、 $H = 2$  で第 2 空力不安定モードが予想される (実験 ( $H = \infty$ ) では  $Wb \sim 1000$  で第 1 空力不安定、 $Wb \sim 2500$  で第 2 空力不安定が観察される)。

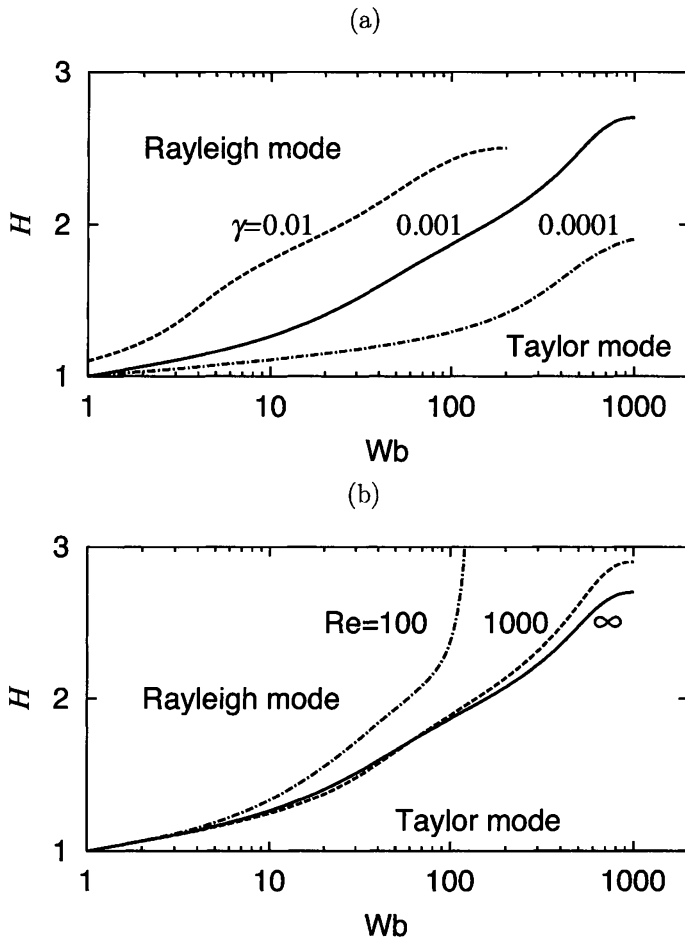


图 7: Critical lines in  $H - Wb$  parameter space for different  $\gamma$  and  $Re$ , above which Rayleigh mode appears and below which Taylor mode appears.



- 同軸円筒壁の影響により、小さな  $Wb$  でも Taylor モードが現れることから、円筒壁は液滴の微粒化を促進する。

## 謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16K06082 の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表す。

## 参考文献

- [1] A.H.Lefebvre,"Atomization and sprays", (Hemisphere Publishing Corporation, 1989).
- [2] S. P. Lin and R. D. Reitz,"Drop and spray formation from a liquid jet", Ann. Rev. Fluid Mech. 30 (1998) pp.85-105.
- [3] N.Ashgriz and A.L. Yarin,"Capillary Instability of Free Liquid Jets,"Hndbook of Atomization and Spray"(Ed.N.Ashgriz, Springer,2011) pp.20-35.
- [4] P. Lin,"Breakup of Liquid Sheets and Jets"(Cambridge Univ. Press, 2003).
- [5] R.D.Reitz and F.V.Bracco,"Mechanism of atomizationof a liquid jet", Phys.Fluids 25 (1982) pp.1730-1742.
- [6] C. A. Spangler, J. H. Hilbing and S.D. Heister,"Nonlinear modeling of jet atomization in the wind-induced regime", Phys. Fluids 7(1995)pp.964-971.
- [7] R.Scardovelli and S. Zaleski,"Dirext numerical simulation of free-surface and interfacial flow", Ann. Rev. Fluid Mech. 31 (1999) pp.567-603.
- [8] K. Kan and T. Yoshinaga," Instability of a planar liquid sheet with surrounding fluids between two parallel walls", Fluid Dynamics Research, 39 (2007) pp389-412, 2007.