数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 36-39

Cherednik algebras and quantized Coulomb branches

京都大学 大学院理学研究科　小寺 諒介
Ryosuke Kodera
Department of Mathematics, Kyoto University

Abstract

筆者は中島啓氏との共同研究 [KN] で，$W=\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ に付随する有理 Cherednik 代数の spherical 部分代数と，Jordan 箙に付随する量子 Coulomb 枝が同型であることを証明した．この結果について解説する．

1 イントロダクション

Coulomb 枝は理論物理学で研究されてきた対象だが，近年中島 [N] によってその数学的定義が提唱された．続いて Braverman-Finkelberg-中島 [BFN1] は，cotangent 型と呼ばれる場合に Coulomb 枝のアフィン代数多様体としての定義を与えた．[BFN1] の定義は convolution 代数の手法を用いたもので，同時にその量子化（座標環の非可換変形）も構成される．

Jordan 箙に付随する場合の Coulomb 枝は，物理の研究では $\mathbb{C}^{2n}/W$（但し $W=\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$）であることが de Boer-堀-大栗-Oz [dBHOO] によって知られており，[BFN1] の定義がこの結果を再現することは [BFN2] で示された．従って，Jordan 箙に付随する場合の量子 Coulomb 枝は $\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化を与える．

一方，$\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化は，Etingof-Ginzburg [EG] によって有理 Cherednik 代数を用いて構成されていた．[KN] の主結果は，二つの量子化が同型な代数を与えることを証明し，パラメータの対応を決定したことである．

2 $\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化：有理 Cherednik 代数

n と l を 1 以上の整数とし，$W=\mathfrak{S}_n\ltimes(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ を n 次対称群と位数 l の巡回群との wreath 積とする．Etingof-Ginzburg [EG] に従い，$\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化を導入する．

ζ を 1 の原始 l 乗根とし，$\zeta_i\in(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ を第 i 成分の生成元とする．W の $\mathfrak{h}=\bigoplus_{i=1}^n\mathbb{C}y_i$ への作用を次で定める．

$$\sigma(y_i)=y_{\sigma(i)}\ (\sigma\in\mathfrak{S}_n),\quad \zeta_i(y_i)=\zeta^{-1}y_i,\quad \zeta_j(y_i)=y_i\ (j\neq i)$$

この作用から，自然に W の $\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{h}^*\cong\mathbb{C}^{2n}$ への作用が定まる．$\{y_i\}\subset\mathfrak{h}$ の双対基底を

$\{x_i\} \subset \mathfrak{h}^*$ とする．このとき

$$\mathbb{C}[\mathfrak{h}] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n], \quad \mathbb{C}[\mathfrak{h}^*] = \mathbb{C}[y_1, \ldots, y_n]$$

である．$s_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ を (i,j) の置換とする．

W に付随する有理 Cherednik 代数 $\mathbf{H}_{n,l}$ とは，$\mathbb{C}W$, $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, $\mathbb{C}[\mathfrak{h}^*]$ で生成され次の定義関係式を持つ $\mathbb{C}[\hbar, c, c_1, \ldots, c_{l-1}]$ 上の代数である．

$$wx_iw^{-1} = w(x_i), \quad wy_iw^{-1} = w(y_i) \quad (w \in W)$$
$$[y_i, x_i] = -\hbar + c\sum_{j\neq i}\sum_{k=0}^{l-1} s_{ij}\zeta_i^k\zeta_j^{-k} + \sum_{m=1}^{l-1} c_m\zeta_i^m$$
$$[y_i, x_j] = -c\sum_{k=0}^{l-1}\zeta^k s_{ij}\zeta_i^k\zeta_j^{-k} \quad (i \neq j)$$

$e = \dfrac{1}{\#W}\sum_{g\in W} g \in \mathbb{C}W$ を W の自明表現に対応する冪等元とする．

$$\mathbf{SH}_{n,l} = e\mathbf{H}_{n,l}e$$

を $\mathbf{H}_{n,l}$ の spherical 部分代数と呼ぶ．$\mathbf{SH}_{n,l}$ は $\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化を与える．すなわち

$$\mathbf{SH}_{n,l}/(\hbar, c, c_1, \ldots, c_{l-1} = 0) \cong \mathbb{C}[\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*]^W = \mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}/W]$$

が成り立つ．

3 量子 Coulomb 枝

Braverman-Finkelberg-中島 [BFN1] は，$\mathbb{C}$ 上の簡約代数群 G とその $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現 $\mathbf{N}$ のペア $(G, \mathbf{N})$ から，可換 $\mathbb{C}$ 代数とその非可換変形を構成した．本稿では $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ の場合を扱うが，以下で説明する構成の部分は（同変パラメータの数を除いて）一般の $(G, \mathbf{N})$ で成立する．

n と l を 1 以上の整数とし，$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$（随伴表現とベクトル表現 l 個の直和）とする．$\mathcal{K} = \mathbb{C}((z)) \supset \mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ とし，

$$G_{\mathcal{K}} = G(\mathcal{K}) \supset G_{\mathcal{O}} = G(\mathcal{O}), \quad \mathbf{N}_{\mathcal{O}} = \mathbf{N} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}$$

とする．

$$\mathcal{R} = \{(gG_{\mathcal{O}}, x) \in G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}} \times \mathbf{N}_{\mathcal{O}} \mid g^{-1}x \in \mathbf{N}_{\mathcal{O}}\}$$

と定義する．$\mathcal{R}$ は Steinberg 多様体のループ群における類似物である．

$\mathcal{R}$ は次に挙げる $\mathbb{C}^\times$ 作用を持つ．

• $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$ への $\mathbb{C}^\times$ 作用 $z \mapsto tz$ $(t \in \mathbb{C}^\times)$ から定まるもの．これを $\mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}}$ で表す（loop rotation）．

• $\mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ の各直和成分ごとの $\mathbb{C}^\times$ のスカラー作用から定まるもの．

これらをすべて合わせて，$\mathcal{R}$ への $\tilde{G} = G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}} \times (\mathbb{C}^\times)^{l+1}$ 作用を考える．Braverman-Finkelberg-中島 [BFN1] は，$\mathcal{R}$ の $\tilde{G}$ 同変 Borel-Moore ホモロジー群を構成し，結合的な積（convolution 積）を定義した．$\mathcal{A} = H^{\tilde{G}}_*(\mathcal{R})$ は，1 点の同変コホモロジー環 $H^*_{\mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}} \times (\mathbb{C}^\times)^{l+1}}(\mathrm{pt})$ 上の代数である．トーラス作用の同変パラメータを $\hbar, c, z_1, \ldots, z_l$ とする．つまり，1 点の同変コホモロジー環を $H^*_{\mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}} \times (\mathbb{C}^\times)^{l+1}}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{C}[\hbar, c, z_1, \ldots, z_l]$ と同一視する．

定理 3.1（[BFN2]）

$$\mathcal{A}/(\hbar, c, z_1, \ldots, z_l = 0) \cong \mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}/W]$$

である．

一般の $(G, \mathbf{N})$ に対しては，$\tilde{G} = G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}}$ に関する同変ホモロジー群 $\mathcal{A} = H^{G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}}}_*(\mathcal{R})$ 上に積が定義される．これは $H^*_{\mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}}}(\mathrm{pt}) \cong \mathbb{C}[\hbar]$ 上の非可換代数だが，[BFN1] によって $\mathcal{A}/(\hbar = 0)$（つまり $H^{G_{\mathcal{O}}}_*(\mathcal{R})$ のこと）は可換であることが示された．$\mathrm{Spec}\, H^{G_{\mathcal{O}}}_*(\mathcal{R})$ を Coulomb 枝と呼び，$\mathcal{A} = H^{G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times_{\mathrm{rot}}}_*(\mathcal{R})$ を量子 Coulomb 枝と呼ぶ．

Coulomb 枝は理論物理学の研究に起源を持つ．上で述べた Coulomb 枝の数学的定義は，ペア $(G, \mathbf{N})$ からアフィン代数多様体とその量子化を組織的に構成する手続きを与えたものと思うことができる．

4 主定理

これまでに見たように，$\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化が二つの全く異なる方法で与えられる．[KN] では，この二つの代数の間の同型を構成し，量子化のパラメータを同定した．

定理 4.1（**小寺-中島** [KN]）　$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ のとき

$$\mathcal{A} \cong \mathbf{SH}_{n,l}$$

であり，パラメータの対応は

$$z_k = -\frac{1}{l}\left((l-k)\hbar + \sum_{m=1}^{l-1} \frac{1-\zeta^{mk}}{1-\zeta^m} c_m\right)$$

で与えられる．

参考文献

[BFN1] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of* 3*-dimensional* $\mathcal{N}=4$ *gauge theories, II*, arXiv:1601.03586.

[BFN2] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Coulomb branches of* 3*d* $\mathcal{N}=4$ *quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian* (with appendices by Alexander Braverman, Michael Finkelberg, Joel Kamnitzer, Ryosuke Kodera, Hiraku Nakajima, Ben Webster, and Alex Weekes), arXiv:1604.03625.

[dBHOO] Jan de Boer, Kentaro Hori, Hirosi Ooguri, and Yaron Oz, *Mirror symmetry in three-dimensional gauge theories, quivers and D-branes*, Nuclear Phys. B **493** (1997), no. 1-2, 101–147.

[EG] Pavel Etingof and Victor Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 243–348.

[KN] Ryosuke Kodera and Hiraku Nakajima, *Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras*, arXiv:1608.00875.

[N] Hiraku Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of* 3*-dimensional* $\mathcal{N}=4$ *gauge theories, I*, Adv. Theor. Math. Phys. **20** (2016), no. 3, 595–669.