数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 52-62

Wakimoto representations for $\mathcal{W}$-algebras

京都大学・数理解析研究所　元良 直輝 *
Naoki Genra
Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University

Abstract

The $\mathcal{W}$-algebras are vertex algebras defined by the generalized Drinfeld-Sokolov reductions. Using the Wakimoto representations of affine Lie algebras, we describe the explicit formulae of the screening operators for the $\mathcal{W}$-algebras with generic level. As applications, we show that the $\mathcal{W}$-algebras of type A have the "coproduct" structures.

1 はじめに

(アファイン) $\mathcal{W}$ 代数とは，Lie 代数 $\mathfrak{g}$，そのべき零元 f，複素数 k によって定まる Drinfeld-Sokolov 還元と呼ばれるコホモロジーによって定義される代数である．$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$, $f=\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ の時，$\mathcal{W}$ 代数は Virasoro 代数と呼ばれる無限次元の Lie 代数になる．よって一般の $\mathcal{W}$ 代数は，Virasoro 代数の一種の一般化と考えても良い．ところが一般の $\mathcal{W}$ 代数は Virasoro 代数とは異なり，単なる Lie 代数とみなすことはできず，頂点代数という複雑な代数構造を持つ．よってその表現論を調べることは Virasoro 代数の時に比べてずっと難しくなる．

そもそも $\mathcal{W}$ 代数の代数構造は，コホモロジーとして定義されているために一般にはわかっていない．そこで，その構造を解析する方法として $\mathcal{W}$ 代数の別構成について考える．f が主べき零元 (principal nilpotent) の時に Feigin-Frenkel によって証明されたスクリーニング作用素を用いた別構成がある:

定理 1.1 (Feigin-Frenkel [FF3]) $f=f_{\mathrm{prin}}$ を $\mathfrak{g}$ の主べき零元，k を generic とすると，$\mathcal{W}$ 代数 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f_{\mathrm{prin}})$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数に伴う Heisenberg 頂点代数 $\mathcal{H}$ の頂点部分代数として次のように実現される:

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f_{\mathrm{prin}})\simeq\bigcap_{i=1}^{\mathrm{rank}\mathfrak{g}}\mathrm{Ker}\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha_i(z)}\,dz.$$

ただし $\int \mathrm{e}^{-\frac{1}{\nu}\int\alpha_i(z)}\,dz$ は $\mathfrak{g}$ の単純ルート α_i に付随するスクリーニング作用素，$\nu=$

---

* gnr@kurims.kyoto-u.ac.jp

$\sqrt{k+h^\vee}$，$h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対 Coxeter 数である．

この結果を一般の f に対しても与えたい．そこで本稿ではアファイン Lie 代数の脇本表現を用いることを考える．アファイン Lie 代数の脇本表現とは旗多様体における $\mathfrak{g}$ の微分表現のアファイン化である．アファイン頂点代数と呼ばれるレベル k のアファイン Lie 代数の表現 (であり頂点代数構造を持つ) の，Heisenberg 頂点代数と無限次元 Weyl 頂点代数のテンソル積への埋め込みとして構成される．その像は k が generic の時にスクリーニング作用素を用いて表すことができ，その作用素は $\mathfrak{g}$ の旗多様体上の微分表現から計算することができる．こうした構成に対して Drinfeld-Sokolov 還元を考えることで，自然に $\mathcal{W}$ 代数の表現を得られる．結果として一般の $\mathcal{W}$ 代数のスクリニーニング作用素による表示が得ら れることを示す (定理 4.1)．さらにその応用として A 型の $\mathcal{W}$ 代数において coproduct 構造とも呼ぶべき頂点代数の準同型を構成する (定理 5.1)．最後にその準同型と Yangian の coproduct との関係性について述べる．

2 頂点代数

頂点代数の定義を与える [FB]．$\mathbb{C}$ 上のベクトル空間 V が頂点代数とは，0 でないベクトル $1\in V$，線形作用素 $\partial\colon V\to V$，線形写像

$$Y\colon V\ni A\longmapsto Y(A,z)=A(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}A_{(n)}z^{-n-1}\in(\operatorname{End}V)[[z,z^{-1}]]$$

が与えられていて次を満たすこと: 0) 任意の $A\in V$ に対して $A(z)$ は V 上の場．すなわち任意の $B\in V$ に対し

$$A(z)B=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(A_{(n)}B)z^{-n-1}\in V((z));$$

1) $1(z)=\mathrm{Id}_V$．さらに任意の $A\in V$ に対して $A_{(n)}1=0$ $(n\geq 0)$ かつ $A(z)1|_{z=0}=A$; 2) $\partial 1=0$．さらに $[\partial,A(z)]=\partial_z A(z)$; 3) 任意の $A,B\in V$ に対して $A(z)$ と $B(z)$ は局所的．すなわちある自然数 N が存在して

$$(z-w)^N[A(z),B(w)]=0.$$

頂点代数 V に対して 1 を真空ベクトル，∂ を変換作用素，Y を頂点作用素と呼ぶ．1) から $A_{(-1)}1=A$ であり Y は単射．2) と 3) を組み合わせて

$$Y(\partial A,z)=\partial_z A(z).$$

3) の局所性条件から任意の $A, B \in V$ に対してある V 上の場 $C_n(z)$ $n = 0, \ldots, N-1$ が存在して

$$[A(z), B(w)] = \sum_{n=0}^{N-1} C_n(w) \frac{1}{n!} \partial_w^n \delta(z-w).$$

ただし

$$\delta(z-w) = \left.\frac{1}{z-w}\right|_{|z|>|w|} - \left.\frac{1}{z-w}\right|_{|z|<|w|} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} z^{-n-1} w^n.$$

これと 1) 2) の条件を用いると $C_n(z) = Y(A_{(n)}B, z)$ とわかる．さらに

$$A(z)B(w) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{Y(A_{(n)}B, w)}{(z-w)^{n+1}} + :A(z)B(w):.$$

ただし

$$:A(z)B(w): = \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} :A_{(m)}B_{(n)}: \ z^{-m-1} w^{-n-1}$$

とおくと

$$:A_{(m)}B_{(n)}: = \begin{cases} B_{(n)}A_{(m)} & (m \geq 0) \\ A_{(m)}B_{(n)} & (m < 0). \end{cases}$$

で定義される．さらに $A(z), B(z)$ が場であることから $:A(z)B(z):$ が well-defined な V 上の場を定義することがわかる．従って $:A(z)B(w):$ は二つの場の積 $A(z)B(w)$ の $z = w$ における正則な部分を与えている．$:A(z)B(z):$ を $A(z)$ と $B(z)$ の NOP (Normally Ordered Product) という．一方で $A(z)B(w)$ の $z = w$ における特異な部分を

$$A(z)B(w) \sim \sum_{n=0}^{N-1} \frac{Y(A_{(n)}B, w)}{(z-w)^{n+1}}$$

で表し，これを OPE (Operator Product Expansion) という．$A(z)B(w)$ の正則部を調べることで

$$Y(A_{(-1)}B, z) =: A(z)B(z):$$

とわかる．一般に任意の $A^i \in V$ と任意の $j_i \geq 1$ に対して

$$Y(A^1_{(-j_1)} \cdots A^n_{(-j_n)} 1, z) = \frac{:\partial_z^{j_1-1} A^1(z) \cdots \partial_z^{j_n-1} A^n(z):}{(j_1-1)! \cdots (j_n-1)!}.$$

ただし場 $B^i(z)$ たちに対して $:B^1(z)\cdots B^n(z):=:B^1(z)(:B^2(z)\cdots B^n(z):):$ と帰納的に定義する．頂点代数 V の元 $A^1,\ldots,A^n$ に対して

$$V=\mathrm{Span}\{A^{i_1}_{(-j_1)}\cdots A^{i_m}_{(-j_m)}1\mid m\geq 0,j_s\geq 1,i_s=1,\ldots,n\}$$

が成り立つとき V は $A^1,\ldots,A^n$ で生成されているという．特にこのような生成元の組 $A^1,\cdots,A^n$ であって一つでも除くと生成条件を満たさなくなるものを V の strongly generating set という．頂点代数 V に対してベクトル空間 M が V-加群とは線形作用素 $Y_M\colon V\to(\mathrm{End}\,M)[[z,z^{-1}]]$ が与えられて $Y_M(1,z)=\mathrm{Id}_M$，任意の $Y_M(A,z)$，$Y_M(B,z)$ の間に Borcheds identity (局所性条件に対応する条件) が成り立つことである．

3 $\mathcal{W}$ 代数

(アファイン) $\mathcal{W}$ 代数を定義する [FF2, KRW]．$\mathfrak{g}$ を $\mathbb{C}$ 上の有限次元 Lie 代数，f を $\mathfrak{g}$ のべき零元，k を任意の複素数とする．f を含む $\mathfrak{sl}_2$-triple (e,h,f) を取り，$\mathrm{ad}(\frac{1}{2}h)$ により $\mathfrak{g}$ に $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$-次数付け $\mathfrak{g}=\bigoplus_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\mathfrak{g}_j$ を与える．Cartan 部分代数 $\mathfrak{h}$ を h を含むように取りルート系 Δ を考えると次数付けを持つ．すなわち $\Delta_j=\{\alpha\in\Delta\mid\mathfrak{g}_\alpha\subset\mathfrak{g}_j\}$ とすると，$\Delta=\sqcup_{j\in\frac{1}{2}\mathbb{Z}}\Delta_j$．ただし $\mathfrak{g}_\alpha$ はルート空間．単純ルートの集合 Π を正ルートの集合 Δ_+ が $\Delta_{\geq 0}$ に含まれるように取れる．この時 $\mathfrak{sl}_2$ の表現論を用いて $\Pi=\Pi_0\sqcup\Pi_{\frac{1}{2}}\sqcup\Pi_1$ となる．ただし $\Pi_j=\Pi\cap\Delta_j$．$\mathfrak{n}_\pm=\bigoplus_{\alpha\in\Delta_\pm}\mathfrak{g}_\alpha$，$\mathfrak{b}_\pm=\mathfrak{h}\oplus\mathfrak{n}_\pm$ とする．ルートベクトル $e_\alpha\in\mathfrak{g}_\alpha$ を固定する．さらに $\mathfrak{m}_+=\bigoplus_{j>0}\mathfrak{g}_j$，$\mathfrak{r}_+=\mathfrak{n}_+\cap\mathfrak{g}_0$ とおくと，$\mathfrak{n}_+=\mathfrak{m}_+\oplus\mathfrak{r}_+$．$\mathfrak{g}$ 上の不変対称双線形形式 $(\cdot|\cdot)$ を最高ルートの長さが 2 となるように固定する．$\hat{\mathfrak{g}}=\mathfrak{g}[t,t^{-1}]\oplus\mathbb{C}K$ を $\mathfrak{g}$ のアファイン Lie 環，$\hat{\mathfrak{g}}_+=\mathfrak{g}[t]\oplus\mathbb{C}K$ をその部分代数とする．$\mathfrak{g}[t]=0,K=k$ で作用する $\hat{\mathfrak{g}}_+$ の一次元表現 $\mathbb{C}_k$ に対し

$$V^k(\mathfrak{g})=U(\hat{\mathfrak{g}})\underset{U(\hat{\mathfrak{g}}_+)}{\otimes}\mathbb{C}_k$$

とすると $V^k(\mathfrak{g})$ はレベル k の $\hat{\mathfrak{g}}$-加群．任意の $u\in\mathfrak{g}$ に対し $ut^n=u_{(n)}\in\hat{\mathfrak{g}}$ と表すと $V^k(\mathfrak{g})$ は

$$Y(u_{(-1)}1,z)=u(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}u_{(n)}z^{-n-1}$$

で生成される頂点代数構造を持つ．ただし 1 は $\mathbb{C}_k$ の基底．$u(z)$ たちの間の OPE は

$$u(z)v(w)\sim\frac{[u,v](w)}{z-w}+\frac{k(u\mid v)}{(z-w)^2}$$

で与えられる．$V^k(\mathfrak{g})$ を $\mathfrak{g}$ に伴うレベル k のアファイン頂点代数という．また $\Lambda(\mathfrak{m}_+)$ を $\mathfrak{m}_+[t,t^{-1}]\oplus\mathfrak{m}_+^*[t,t^{-1}]$ に伴うフェルミオン頂点代数とする．ただし $\mathfrak{m}_\pm^*$ は $\mathfrak{m}_+$ の双対であ

り，$\mathfrak{m}_+[t,t^{-1}]$ と $\mathfrak{m}_+^*[t,t^{-1}]$ の間には自然なペアリング

$$(u^*\otimes f(t)\mid v\otimes g(t))_\Lambda = u^*(v)\cdot \operatorname*{Res}_{t=0} f(t)g(t)dt$$

$(u^*\in\mathfrak{m}_+^*, v\in\mathfrak{m}_+)$ がある．$\Lambda(\mathfrak{m}_+)$ はこのペアリングによって定義されたクリフォード代数の表現空間として構成される．この時 $\Lambda(\mathfrak{m}_+)$ には

$$\varphi_\alpha(z)\varphi^\beta(w)\sim\frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w},\quad \varphi_\alpha(z)\varphi_\beta(w)\sim 0\sim\varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(w)$$

を満たす (odd な) 場 $\varphi_\alpha(z),\varphi^\alpha(z)$ $(\alpha\in\Delta_{>0})$ で生成される (スーパー) 頂点代数の構造が入る．$\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}$ 上の交代形式を $\langle u\mid v\rangle=(f\mid[u,v])$ で定義する．$\mathfrak{sl}_2$ の表現論により $\mathrm{ad}(f)\colon\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}\to\mathfrak{g}_{-\frac{1}{2}}$ は全単射であり従ってこの交代形式は非退化になる．この交代形式に対応する中立頂点代数を $F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ と表す．$F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ は

$$\Phi_\alpha(z)\Phi_\beta(w)\sim\frac{\langle e_\alpha\mid e_\beta\rangle}{z-w}$$

を満たす場 $\Phi_\alpha(z)$ $(\alpha\in\Delta_{\frac{1}{2}})$ で生成される頂点代数である．(スーパー) 頂点代数

$$C_k=C_k(\mathfrak{g},f)=V^k(\mathfrak{g})\otimes\Lambda(\mathfrak{m}_+)\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$$

に対し電荷と呼ばれる次数付け (charge) を $\mathrm{charge}(V^k(\mathfrak{g}))=\mathrm{charge}(F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}))=0$, $\mathrm{charge}(\varphi_\alpha(z))=-1$，$\mathrm{charge}(\varphi^\alpha(z))=1$ で定義する．C_k^n を次数 n の部分ベクトル空間とすると $C_k=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}C_k^n$．$C_k$ 上の odd な場 $d(z)$ を

$$\begin{aligned}d(z)=&\sum_{\alpha\in\Delta_{>0}}e_\alpha(z)\otimes\varphi^\alpha(z)\otimes 1\\&-\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta,\gamma\in\Delta_{>0}}c_{\alpha,\beta}^\gamma\otimes:\varphi_\gamma(z)\varphi^\alpha(z)\varphi^\beta(z):\otimes 1\\&+\sum_{\alpha\in\Delta_{\frac{1}{2}}}1\otimes\varphi^\alpha(z)\otimes\Phi_\alpha(z)+\sum_{\alpha\in\Delta_{>0}}(f\mid e_\alpha)\otimes\varphi^\alpha(z)\otimes 1\end{aligned}$$

で定義する．ただし $c_{\alpha,\beta}^\gamma$ は $\mathfrak{g}$ の構造定数である．$d=d_{(0)}$ に対し $\mathrm{charge}(d(z))=1$ より $d\cdot C_k^n\subset C_k^{n+1}$ かつ計算から $d^2=0$ より複体 $(C_k^\bullet,d)$ を得る．$\mathcal{W}$ 代数をそのコホモロジー

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)=H(C_k,d)$$

によって定義する．このコホモロジーを一般化された Drinfeld-Sokorov 還元と呼ぶ．C_k の頂点代数構造から $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)$ にも頂点代数構造が誘導されることがわかる．さらに 0 次のコホモロジー以外は消滅し $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f)=H^0(C_k,d)$ となる．$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ かつ $f=e_{-\alpha}$ の時 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{sl}_2,f)$ は一つの場

$$L(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L_nz^{-n-2}$$

によって生成される頂点代数になりその間の OPE は

$$L(z)L(w) \sim \frac{\partial_w L(w)}{z-w} + \frac{2L(w)}{(z-w)^2} + \frac{c(k)/2}{(z-w)^4}$$

で与えられる．ただし $c(k) = 1 - 6(k+1)^2/(k+2)$．これより

$$[L_m, L_n] = (m-n)L_{m+n} + \frac{m^3-m}{12}c(k)\delta_{m+n,0}$$

を得て L_n たちは Virasoro 代数の関係式を満たしていることがわかる．

4 脇本表現

G を $\mathfrak{g}$ に対応する単連結かつ連結な Lie 群，B_- を $\mathfrak{b}_-$ に対応する Borel 部分群，G/B_- を旗多様体とし G の G/B_- への自然な左作用から $\mathfrak{g}$ の G/B_- 上の微分表現を得る．N_+ を $\mathfrak{n}_+$ に対応する G のべき零部分群，1 を G の単位元，$\bar{1}$ をその G/B_- での同値類とすると $U = N_+ \cdot \bar{1}$ は Zariski 位相について G/B_- の極大稠密な開集合．$\mathfrak{g}$ の微分表現を $U \simeq N_+$ に制限することで得られる Lie 準同型 $\rho\colon \mathfrak{g} \to \mathcal{D}_{N_+}$ を考えると，べき零部分群 N_+ は指数写像により $\mathfrak{n}_+$ と同一視されるから ρ の像は多項式環 $\mathbb{C}[N_+]$ 上の微分になる．ここで $\mathcal{D}_{N_+}$ は $\mathbb{C}[N_+]$ 上の微分環である．$\mathbb{C}[N_+]$ の $e_\alpha \in \mathfrak{n}_+$ に対応する座標を x_α とすると Chevalley 生成元 $e_\alpha, h_\alpha, f_\alpha$ $(\alpha \in \Pi)$ に対し

$$\rho(e_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} P_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta\neq\alpha} P_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta},$$

$$\rho(h_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} \beta(h_\alpha)x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}, \quad \rho(f_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} Q_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta}.$$

ただし $P_\alpha^\beta(x), Q_\alpha^\beta(x)$ は $\mathbb{C}[N_+]$ の多項式．さらに $\chi \in \mathfrak{h}^*$ による twist を

$$\rho(e_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} P_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta}, \quad \rho(h_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} \beta(h_\alpha)x_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta} + \chi(h_\alpha),$$

$$\rho(f_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} Q_\alpha^\beta(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta} + \chi(h_\alpha)x_\alpha$$

と与えることもできる．$\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$ を $\mathfrak{n}_+$ に対応する無限次元 Weyl 頂点代数とする．$\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$ は

$$a_\alpha(z)a_\beta^*(w) \sim \frac{\delta_{\alpha,\beta}}{z-w}, \quad a_\alpha(z)a_\beta(w) \sim 0 \sim a_\alpha^*(z)a_\beta^*(w)$$

を満たす場 $a_\alpha(z), a_\alpha^*(z)$ $(\alpha \in \Delta_+)$ で生成される頂点代数である．$\mathcal{H} = \mathcal{H}^{k+h^\vee} = V^{k+h^\vee}(\mathfrak{h})$ とすると $\mathcal{H}$ は $\mathfrak{h}$ に伴う Heisenberg 頂点代数である．$b_\alpha(z) = h_\alpha(z)$ と表すと

$$b_\alpha(z)b_\beta(w) \sim \frac{(k+h^\vee)(\alpha \mid \beta)}{(z-w)^2}.$$

を満たす．[Fre] より任意の k について

$$\begin{aligned}\hat{\rho}(e_\alpha(z)) &= \sum_{\beta\in\Delta_+} :P_\alpha^\beta(a^*(z))a_\beta(z):,\\ \hat{\rho}(h_\alpha(z)) &= \sum_{\beta\in\Delta_+} \beta(h_\alpha):a_\beta^*(z)a_\beta(z): + b_\alpha(z),\\ \hat{\rho}(f_\alpha(z)) &= \sum_{\beta\in\Delta_+} :Q_\alpha^\beta(a^*(z))a_\beta(z): + a_\alpha^*(z)b_\alpha(z)\\ &\quad + ((e_\alpha \mid f_\alpha)k + c_\alpha)\partial a_\alpha^*(z).\end{aligned}$$

を満たす頂点代数の単射準同型 $\hat{\rho}\colon V^k(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_-} \otimes \mathcal{H}$ が存在する．ただし $P_\alpha^\beta(a^*(z))$ などは多項式 $P_\alpha^\beta(x)$ に $x_\alpha = a_\alpha^*(z)$ を代入することで定義される (well-defined な) 場であり，c_α はある複素数．$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $\mathcal{H}_\lambda$ を最高ウェイト λ なる Heisenberg 代数の Fock 空間とすれば $\hat{\rho}$ によって $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_\lambda$ は $\hat{\mathfrak{g}}$-加群となる．これを $\hat{\mathfrak{g}}$ の脇本表現という [W, FF1]．さらに k が generic の時

$$0 \to V^k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\hat{\rho}} \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H} \xrightarrow{\bigoplus S_\alpha} \bigoplus_{\alpha\in\Pi} \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\alpha}$$

が exact．ここで $\lambda_\alpha = -\alpha/(k+h^\vee) \in \mathfrak{h}^*$ であり S_α は次で定義される交絡作用素: $U \simeq N_+$ への N_+ の自然な右作用によって誘導される Lie 代数の反準同型 $\rho^R\colon \mathfrak{n}_+ \to \mathcal{D}_{N_+}$ を

$$\rho^R(e_\alpha) = \sum_{\beta\in\Delta_+} P_\alpha^{\beta,R}(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta} = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \sum_{\beta\neq\alpha} P_\alpha^{\beta,R}(x)\frac{\partial}{\partial x_\beta}$$

とおきそのアファイン化

$$\hat{\rho}^R(e_\alpha(z)) = \sum_{\beta\in\Delta_+} :P_\alpha^{\beta,R}(a^*(z))a_\beta(z):$$

に対して $S_\alpha\colon \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H} \to \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\alpha}$ は

$$S_\alpha = \int :\hat{\rho}^R(e_\alpha(z))\, e^{\int \lambda_\alpha(z)}: dz$$

で定義される．ただし場 $B(z)$ に対して $\int B(z)dz = B_{(0)}$ とし，$e^{\int \lambda_\alpha(z)}$ は $\mathcal{H}$ 上の $\lambda_\alpha \in \mathfrak{h}^*$ に対応する場 $\lambda_\alpha(z)$ の形式的な積分を取って指数写像に代入することで得られる $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}_{\lambda_\alpha}$ への頂点作用素である．S_α たちを $\hat{\mathfrak{g}}$ のスクリーニング作用素と呼ぶ．任意の $V^k(\mathfrak{g})$-加群 M に対して複体

$$C_k(M) = M \otimes \Lambda(\mathfrak{m}_+) \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$$

及びその微分 d を考えれば再び $\Lambda(\mathfrak{m}_+)$ に関する次数づけを考えることでコホモロジー $H(M) = H(C_k(M), d)$ を得て (M の次数は 0)，$H(M)$ は自然に $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$-加群になる．$\hat{\rho}$ を介して脇本表現 $W_\lambda = \mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+} \otimes \mathcal{H}_\lambda$ を $V^k(\mathfrak{g})$-加群と思うと $H(W_\lambda)$ は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$-加群になる．$C_k(M)$ は C_k-加群であり，C_k 上の (odd な) 場 $d_{\mathrm{st}}(z)$ を

$$
\begin{aligned}
d_{\mathrm{st}}(z) = & \sum_{\alpha \in \Delta_{>0}} e_\alpha(z) \otimes \varphi^\alpha(z) \otimes 1 \\
& - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma \in \Delta_{>0}} c_{\alpha,\beta}^{\gamma} \otimes : \varphi_\gamma(z) \varphi^\alpha(z) \varphi^\beta(z) : \otimes 1
\end{aligned}
$$

で定義し $d_{\mathrm{st}} = d_{\mathrm{st}(0)}$ とすると $C_k(M)$ に作用する．特に $M = W_\lambda$ の時，$C_k(W_\lambda)$ に適切なフィルトレーションを与えることで対応するスペクトル系列 E_1 がコホモロジー

$$E_1 = H(C_k(W_\lambda), d_{\mathrm{st}})$$

となりこれは $\hat{\mathfrak{m}}_+$ に関する semi-infinite コホモロジーに一致する．脇本表現の性質からこれは 0 次のコホモロジー以外消滅するので $H(W_\lambda) \simeq H^0(C_k(W_\lambda), d_{\mathrm{st}})$．さらに M_+, R_+ を $\mathfrak{m}_+, \mathfrak{r}_+$ に対応するべき零 Lie 部分群として $N_+ \simeq M_+ \times R_+$ の分解に対応する N_+ の座標を選べば

$$H^0(C(W_\lambda), d_{\mathrm{st}}) \simeq \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_-} \otimes \mathcal{H}_\lambda \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}).$$

と計算できる．ただし $\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}$ は $a_\alpha(z), a_\alpha^*(z)$ $(\alpha \in \Delta_+ \cap \Delta_0)$ で生成される $\mathcal{A}_{\mathfrak{n}_+}$ の部分頂点代数とする．以上より $H(W_\lambda) \simeq \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_\lambda \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}})$ は $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$-加群になる．これを $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現と呼ぶことにする．さらに k が generic の時，通常の脇本表現の完全系列から次を得る:

$$
\begin{aligned}
0 \to \mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) \to & \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}) \\
& \xrightarrow{\bigoplus Q_\alpha} \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+} \otimes \mathcal{H}_{\lambda_\alpha} \otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}).
\end{aligned}
$$

ただし Q_α は S_α から誘導されるスクリーニング作用素である．

定理 4.1 ([G]) スクリーニング作用素 Q_α は次のように表される:

$$Q_\alpha = \sum_{\beta \in \Delta_+} \int : P_\alpha^{\beta,R}(a^*(z)) a_\beta(z)\, e^{\int \lambda_\alpha(z)} : dz \quad (\text{if } \alpha \in \Pi_0),$$

$$Q_\alpha = \sum_{\beta \in \Delta_{\frac{1}{2}}} \int : P_\alpha^{\beta,R}(a^*(z)) \Phi_\beta(z)\, e^{\int \lambda_\alpha(z)} : dz \quad (\text{if } \alpha \in \Pi_{\frac{1}{2}}),$$

$$Q_\alpha = \sum_{\beta \in \Delta_1} (f \mid e_\alpha) \int : P_\alpha^{\beta,R}(a^*(z))\, e^{\int \lambda_\alpha(z)} : dz \quad (\text{if } \alpha \in \Pi_1).$$

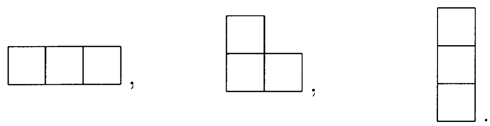
5 Coproduct 構造

$\mathcal{W}$ 代数の脇本表現の応用として A 型の $\mathcal{W}$ 代数の coproduct 構造を与える．ただしここでの coproduct 構造は通常の coproduct とは異なるので注意する (最後に Yangian の coproduct との関係性について触れる)．$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$ のべき零元の共役類は Jordan 標準形で分類される．従って n の分割で分類でき Young 図形を用いて表せる．$n=3$ の時

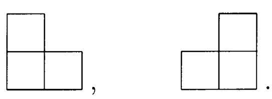
$$f \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix},$$

3 の分割: $(\ 3\ ),\qquad (\ 2,1\ ),\qquad (\ 1,1,1\ ),$

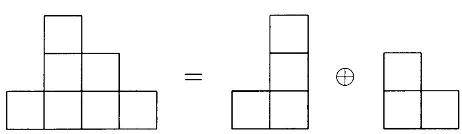
Young 図形:



となる．ここで Young 図形の箱を次のルールでずらす: 一番下の段以外の箱を左右にずらし，ずらされた箱が浮いたり，はみ出したりしないようにする．ただし一つの箱の上に二つ以上被さるように箱を乗せることはできない．上の例では真ん中の Young 図形だけ動かすことができ，次の可能性しかない．



ずらされた Young 図形たちをピラミッドと呼ぶ．ピラミッド $\mathcal{P}$ を縦のラインに沿って二つのピラミッド $\mathcal{P}_1$ と $\mathcal{P}_2$ に分割し $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\oplus\mathcal{P}_2$ で表す．例えば



のような分割を考える．ピラミッド $\mathcal{P}$ に対して元の Young 図形に対応する $\mathfrak{gl}_n$ のべき零元 (の共役類) を $f_{\mathcal{P}}$ とし

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n,\mathcal{P})=\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n,f_{\mathcal{P}})$$

とする．

定理 5.1 ([G]) generic な k に対し任意のピラミッドの分割 $\mathcal{P}=\mathcal{P}_1\oplus\mathcal{P}_2$ に対応して頂点代数の単射準同型

$$\Delta_{1,2}\colon \mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n,\mathcal{P})\to\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1},\mathcal{P}_1)\otimes\mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2},\mathcal{P}_2)$$

が存在する．ただし n_i は $\mathcal{P}_i$ に含まれる箱の数，$k+n=k_1+n_1=k_2+n_2$.

証明 $\mathcal{W}$ 代数の脇本表現から，generic な k に対して

$$\mathcal{W}^k(\mathfrak{gl}_n,\mathcal{P})\simeq\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i}. \tag{1}$$

定理 4.1 で与えられた Q_α の explicit な表式を調べることで

$$\mathcal{W}^{k_1}(\mathfrak{gl}_{n_1})\simeq\bigcap_{i=1}^{n_1-1}\mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i},\quad \mathcal{W}^{k_2}(\mathfrak{gl}_{n_2})\simeq\bigcap_{i=n_1+1}^{n-1}\mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i} \tag{2}$$

とわかる．一方で Q_{α_i} と Q_{α_j} は $|i-j|>1$ なら可換だから

$$0\to\bigcap_{i=1}^{n-1}\mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i}\to\bigcap_{i=1}^{n_1-1}\mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i}\otimes\bigcap_{i=n_1+1}^{n-1}\mathrm{Ker}\ Q_{\alpha_i}$$
$$\xrightarrow{Q_{\alpha_{n_1}}}\mathcal{A}_{\mathfrak{r}_+}\otimes\mathcal{H}_{\lambda_{\alpha_{n_1}}}\otimes F(\mathfrak{g}_{\frac{1}{2}}).$$

(1)(2) より上の最初の単射準同型が求めたい $\Delta_{1,2}$ となる． □

頂点代数 V に対してその表現圏からある通常の代数の表現圏への関手が存在し Zhu 関手という [Z]．特に $\mathrm{Zhu}(V)$ は単位元を持つ結合代数になり，V の既約表現と $\mathrm{Zhu}(V)$ の既約表現は一対一に対応する．$\mathrm{Zhu}(V^k(\mathfrak{g}))=U(\mathfrak{g})$，$\mathrm{Zhu}(\mathcal{H})=\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ などが成り立つ．$\mathcal{W}$ 代数の場合 $\mathrm{Zhu}(\mathcal{W}^k(\mathfrak{g},f))=U(\mathfrak{g},f)$ は有限 $\mathcal{W}$ 代数と呼ばれる代数になる．有限 $\mathcal{W}$ 代数で成り立つ結果の類似が $\mathcal{W}$ 代数でも成り立つことがしばしばある．$f=f_{\mathrm{prin}}$ が $\mathfrak{g}$ の主べき零元 (principal nilpotent) の時 $U(\mathfrak{g},f_{\mathrm{prin}})=Z(\mathfrak{g})$ ($U(\mathfrak{g})$ の中心) となるが，$\mathcal{W}$ 代数でも $k=-h^\vee$ (臨界レベル) の時 $\mathcal{W}^{-h^\vee}(\mathfrak{g},f_{\mathrm{prin}})=Z(V^{-h^\vee}(\mathfrak{g}))$ ($V^{-h^\vee}(\mathfrak{g})$ の中心) となる．$\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$ の時 [BK] により $U(\mathfrak{gl}_n,f)$ は Yangian $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の部分代数の商変形になることが知られている．定理 5.1 と同じ仮定のもとで $U(\mathfrak{gl}_n,\mathcal{P})=U(\mathfrak{gl}_n,f_{\mathcal{P}})$ と表すと単射準同型

$$U(\mathfrak{gl}_n,\mathcal{P})\to U(\mathfrak{gl}_{n_1},\mathcal{P}_1)\otimes U(\mathfrak{gl}_{n_2},\mathcal{P}_2)$$

が $Y(\mathfrak{gl}_n)$ の coproduct から誘導されることがわかる．一方で [MO] により (f が主べき零元の場合には) affine Yangian $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$ の適切なパラメータの退化と $\mathcal{W}$ 代数が同様の関係にあることが示唆されている．従って定理 5.1 は有限 $\mathcal{W}$ 代数の場合の自然なアファイン化と見ることができ $\Delta_{1,2}$ は $Y(\hat{\mathfrak{gl}}_n)$ の coproduct から誘導されているものと予想される．

参考文献

[BK] J. Brundan, A. Kleshchev. Shifted Yangians and finite W-algebras. *Adv. Math.*, 200(1):136–195, 2006.

[FF1] B. L. Feigin, E. Frenkel. A family of representations of affine Lie algebras. *Russ. Math. Surv.*, 43(5):221-222, 1988.

[FF2] B. L. Feigin, E. Frenkel. Quantization of Drinfel'd-Sokolov reduction. *Phys. Lett., B* 246(1–2):75–81, 1990.

[FF3] B. L. Feigin, E. Frenkel. Affine Kac-Moody algebras at the critical level and Gel'fand-Dikii algebras. *Infinite analysis, Part A, B (Kyoto, 1991)*, 197–215, Adv. Ser. Math. Phys., 16, *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, 1992.

[Fre] E. Frenkel. Wakimoto modules, opers and the center at the critical level. *Adv. Math.*, 195(2):297-404, 2005.

[FB] E. Frenkel, D. Ben-Zvi. Vertex algebras and algebraic curves. Second edition. Mathematical Surveys and Monographs, 88. *American Mathematical Society, Providence, RI*, 2004.

[G] N. Genra. Coproducts for Affine $\mathcal{W}$-algebras. in preparation.

[KRW] V. G. Kac, S.-S. Roan, M. Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.

[MO] D. Maulik, A. Okounkov. Quantum Groups and Quantum Cohomology. arXiv:1211.1287.

[W] M. Wakimoto. Fock representations of affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. *Comm. Math. Phys.*, 104:605–609, 1986.

[Z] Y. Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):237-302, 1996.