数理解析研究所講究録
第2077巻 2018年 106-116

An algorithm on determining the reducibility points for generalized Verma modules of scalar type

龍谷大学 経済学部　久保 利久
Toshihisa Kubo
Faculty of Economics, Ryukoku University

Abstract

本稿では Haian He 氏 (上海大学) と Roger Zierau 氏 (Oklahoma State University) との共著論文 ([Kyoto. J. Math., to appear]) で考案したスカラー型一般 Verma 加群の「可約性判定アルゴリズム」ならびに筆者の論文 ([Springer Proc. Math. & Stat. vol. 191, 2016]) で与えた可約性を判定する際の計算量を減らす「simplification trick」について報告する.

1 序文

本稿の研究対象である一般 Verma 加群[*1]は有限次元複素単純リー環 $\mathfrak{g}$ の表現論において中心的な研究対象であり，これまで様々な観点から広くそして深く研究されてきた．例えば一般 Verma 加群が極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ に付随したスカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ の場合には，松本久義氏により準同型が分類されており ([12])，また放物型部分代数 $\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{n}$ の冪零根基 $\mathfrak{n}$ が可換の場合には Haian He 氏により可約点が分類されている ([4]).

スカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ の可約点についてはコホモロジー的誘導表現のユニタリ性 ([2, 15, 17]) や b-関数の零点 ([3, 8, 14, 16]) などにも関連して，これまでにもいくつかの部分的な分類がなされてきたが，完全な分類と言ったものは与えられてこなかった．そこで今回全ての極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ に対して，可約点の完全な分類に着手し，これを成功させた ([5])[*2]．リー環 $\mathfrak{g}$ が古典型の場合には可約性に関するいくつかの主張を組み合わせることで分類し，例外型の場合には可約性を判定するアルゴリズム (可約性判定アルゴリズム) を考案し，これを用いて分類した．本稿では主にこの可約性判定アルゴリズムについて解説する．古典型の場合に用いた主張等については本稿の注意 11 を参照されたい．

さてこの可約性判定アルゴリズムだが，特に新しい定理などを元に構成されたものではなく，土台となっているのは 1970 年代に Jantzen によって示された既約性判定 (Jantzen's criterion) である ([7])．[5] では Jantzen の既約性判定とそれから従う主張を組み合わせて可約性判定アルゴリズムを与えた．詳しくは本稿第 3 節を参照されたい．Jantzen の既約性

[*1] 「放物型 Verma 加群 (parabolic Verma modules)」とも呼ばれる．例えば [6] などを参照されたい．
[*2] [4] と [5] ではスカラー型一般 Verma 加群の parametrization が違うことに注意されたい．

判定は与えられた一般 Verma 加群が既約かどうかを判定するためのものであるため，それだけでは全ての可約点を分類することはできない．そこでまず一般論から個別に調べる複素パラメータ $t \in \mathbb{C}$ を有限個まで絞り，その後それぞれのパラメータを調べた．本稿ではこの有限個に絞る方法についても解説する．

ところで可約性判定アルゴリズムを用いてスカラー型一般 Verma 加群の可約点を分類したと上述したが，実際にそれを実行するには特に E 型において非常に tedious な計算を要することとなった．そこで [5] では例外型の場合に数学計算ソフトウェアの Maple を用いて可約点を決定した．一方で [11] では $\mathfrak{g}$ が ADE 型の場合にこの tedious な計算を簡単にする方法「simplification trick」を与えた．本稿ではこの simplification trick についても簡単な例を交えて解説する．

最後に我々の可約性判定アルゴリズムと似たアルゴリズムは既に [2] で紹介されていることを断っておきたい*3．実際に [2] では放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ が特別の場合にそのアルゴリズムを用いて可約となる最初の点 (first reduction point) を分類している．

これより本稿の構成について簡単に述べる．本稿は本序文を含め，全 4 節で構成されている．第 2 節ではまずスカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ を定義し，その後 Jantzen の既約性判定およ可約性に関するいくつかの主張を紹介する．第 3 節では第 2 節で紹介した主張を元に可約性判定アルゴリズムを与え，最後に第 4 節で simplification trick について簡単に触れる．

2 スカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ と Jantzen の既約性判定

本節ではまずスカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ を定義し，その後，可約性判定アルゴリズムの土台となる Jantzen の既約性判定および可約性に関するいくつかの主張を紹介する．

2.1 スカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$

まず必要な記号の導入から始める．$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純リー環とする．カルタン部分代数 $\mathfrak{h}$ を一つ選び，$\mathfrak{h}$ を含むボレル部分代数 $\mathfrak{b}$ を固定する．Δ で $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{h}$ に関するルート系を表し，Δ^+ で $\mathfrak{b}$ に関する正ルート系を表す．また正ルート系 Δ^+ の単純ルート全体の集合を Π と表す．リー環 $\mathfrak{g}$ のキリング形式から誘導された $\mathfrak{h}$ 上の内積を $(\cdot,\cdot)$ と書き，$\mu \in \mathfrak{h}^*$, $\beta \in \Delta$ に対して $\langle \mu, \beta \rangle := \dfrac{2(\mu,\beta)}{(\beta,\beta)}$ と定める．また $\mathfrak{g}$ のワイル群を W と書き，ルート β に関する鏡映を σ_β で表す．

α を単純ルートとし，λ をその基本ウェイトとする．$\beta \in \Delta$ に対して $\mathfrak{g}^{(\beta)}$ をそのルート

*3 筆者がとあるブルガリアでの研究集会で simplification trick に関する講演を行った際，J. Wolf 氏から教えて頂いた．

空間とすると，単純ルート α に対応する極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ は次のように定義される．

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} = (\mathfrak{h} + \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{l})} \mathfrak{g}^{(\beta)}) + \sum_{\beta \in \Delta(\mathfrak{u})} \mathfrak{g}^{(\beta)}. \tag{2.1}$$

ただし，ここで $\Delta(\mathfrak{l})$ および $\Delta(\mathfrak{u})$ はそれぞれ

$$\Delta(\mathfrak{l}) := \{\beta \in \Delta : \langle \lambda, \beta \rangle = 0\}, \quad \Delta(\mathfrak{u}) := \{\beta \in \Delta : \langle \lambda, \beta \rangle > 0\}$$

である．このとき $\Delta(\mathfrak{l})$ は $\mathfrak{l}$ の ($\mathfrak{h}$ に関する) ルート系であり，$\Delta^+(\mathfrak{l}) := \Delta(\mathfrak{l}) \cap \Delta^+$ は $\Delta(\mathfrak{l})$ の正ルート系を成す．また $\mathfrak{l}$ のワイル群を $W(\mathfrak{l})$ で表し，$\{\sigma_\beta : \beta \in \Pi \setminus \{\alpha\}\}$ で生成される W の部分群と同一視する．

全ての $\beta \in \Delta(\mathfrak{l})$ に対して $(\mu, \beta) \neq 0$ となる $\mu \in \mathfrak{h}^*$ を $\Delta(\mathfrak{l})$-*regular* と呼び，そうでないとき $\Delta(\mathfrak{l})$-*singular* と呼ぶこととする．Δ^+, $\Delta^+(\mathfrak{l})$, $\Delta(\mathfrak{u})$ の全てのルートの和の 2 分の 1 倍を順に ρ, $\rho(\mathfrak{l})$, $\rho(\mathfrak{u})$ で表す．なお $\rho(\mathfrak{u})$ は λ の定数倍になる．($2\rho(\mathfrak{u})$ が $\mathfrak{l}$ の 1 次元表現 $\wedge^{\dim(\mathfrak{u})}\mathfrak{u}$ のウェイトであることから，$\mathfrak{l}$ の全てのルートに対して直交していることより従う．)

$\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ を $\mathfrak{h}^*$ から $\mathbb{Z}$ への関数全体からなる加法群とする．$f \in \mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ に対して $\mathrm{supp}(f)$ を $\mathrm{supp}(f) = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* : f(\lambda) \neq 0\}$ と定義する．$\mathbb{Z}^{\mathfrak{h}^*}$ の元 f のうち $\mathrm{supp}(f)$ が有限個の集合 $\nu_i - Q^+$ の和集合に含まれているもの全体の集合を $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ で表す．ただしここで各 ν_i は $\mathfrak{h}^*$ の元であり，また Q^+ は $\sum_{\beta \in \Pi} n_\beta \beta$ ($n_\beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) で表される $\mathfrak{h}^*$ の元全体の集合を表す．なお $\mathbb{Z}\langle\mathfrak{h}^*\rangle$ には [9, (5.65)] のように積構造を入れる．

以下極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ を 1 つ固定し，$\mathfrak{p}$ に付随した (スカラー型とは限らない) 一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(\Lambda)$ を定義する．上記のように $\Delta(\mathfrak{l})$ に属していない単純ルート，すなわち $\mathfrak{p}$ に対応する単純ルートを α と表し，またその基本ウェイトを λ で表す．$\Lambda - \rho$ を $\Delta^+(\mathfrak{l})$ に対し dominant integral であるようなウェイトとし，$F_{\Lambda-\rho}$ を最高ウェイト $\Lambda - \rho$ を持つ $\mathfrak{l}$ の既約有限次元表現とする．また $\mathfrak{u}$ を自明に作用させることにより $F_{\Lambda-\rho}$ を $\mathfrak{p}$ の表現とみなす．このとき一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(\Lambda)$ を次のように定義する．

$$M_{\mathfrak{p}}(\Lambda) := \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{p})}{\otimes} F_{\Lambda-\rho}.$$

$\Lambda - \rho$ が $\Delta(\mathfrak{l})$ の全てのルートと直交しているとき，$F_{\Lambda-\rho}$ は 1 次元になる．このとき $F_{\Lambda-\rho}$ を $\mathbb{C}_{\Lambda-\rho}$ と書き，$M_{\mathfrak{p}}(\Lambda) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} \mathbb{C}_{\Lambda-\rho}$ はスカラー型一般 Verma 加群と呼ばれる．本稿ではこのスカラー型一般 Varma 加群の可約性を分類する．分類の意味についてより詳しく述べるために複素パラメータ $t \in \mathbb{C}$ を用いたスカラー型一般 Verma 加群の parametrization について次に述べる．

$F_{\Lambda-\rho}$ が 1 次元の場合，放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ が極大であることよりウェイト Λ は複素数 $t \in \mathbb{C}$ を用いて次のように表される．

$$\Lambda = t\lambda + \rho(\mathfrak{l}) = (t - c)\lambda + \rho.$$

ただし，ここで c は $\rho(\mathfrak{u}) = c\lambda$ となる有理数を表す．(実際，$c = \langle \rho(\mathfrak{u}), \alpha \rangle$ であるため，$c \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$ が従う．) したがって，

$$\Lambda_t := (t-c)\lambda + \rho$$

とすると，極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ に付随したスカラー型一般 Verma 加群は

$$M_{\mathfrak{p}}(\Lambda_t) = \mathcal{U}(\mathfrak{g}) \underset{\mathcal{U}(\mathfrak{p})}{\otimes} \mathbb{C}_{(t-c)\lambda} \tag{2.2}$$

と表される．記号の簡略化のため今後 $M_{\mathfrak{p}}(\Lambda_t)$ を単に $M_{\mathfrak{p}}(t)$ と書くこととし，また $M_{\mathfrak{p}}(t)$ が可約となる複素パラメータ $t \in \mathbb{C}$ のことを「可約点」と呼ぶこととする．

2.2 既約性および Jantzen の既約性判定

スカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ の可約点 $t \in \mathbb{C}$ の分類は主に次の 2 段階 (a), (b) で行う．

(a) 可約性判定アルゴリズムで調べる必要のある複素パラメータを有限個まで絞り込む．

(b) (a) で絞り込んだ有限個のパラメータ $t \in \mathbb{C}$ に対し，可約性判定アルゴリズムを施す．

本項では手始めに複素パラメータ $t \in \mathbb{C}$ を有限個まで絞り込む際に重要となる事実をいくつか紹介する．まず次の補題より $t \in \mathbb{R}_{>0}$ だけを考えれば良いことがわかる．

補題 1 ([5, Lemma 1.4]) $M_{\mathfrak{p}}(t)$ が可約であれば，$t \in \mathbb{R}_{>0}$.

次の命題 2 はスカラー型とは限らない一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(\Lambda)$ に対して成り立つ．(放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ も極大でなくて良い．)

命題 2 $\Lambda - \rho$ が $\Delta^+(\mathfrak{l})$ に対して dominant integral であるとする．もし全ての $\beta \in \Delta(\mathfrak{u})$ に対して，$\langle \Lambda, \beta \rangle \notin \mathbb{Z}_{>0}$ であるならば，$M_{\mathfrak{p}}(\Lambda)$ は既約となる．もし Λ が regular であれば，その逆も成り立つ．

命題 2 の主張はよく知られており，例えば [6, Theorem 9.12] を参照されたい．また命題 2 より次の系 3 が従う．

系 3 ([5, Lemma 1.15]) $t \geq c$ とする．このとき $M_{\mathfrak{p}}(t)$ が可約である必要十分条件は，ある $\beta \in \Delta(\mathfrak{u})$ に対して

$$\langle (t-c)\lambda + \rho, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$$

が成り立つことである．

一般 Verma 加群が既約である必要十分条件は 1970 年代に Jantzen によって得られてお

り，一般に「Jantzen の既約性判定 (Jantzen's criterion)」と呼ばれる ([7])[*4]．我々の可約性判定アルゴリズムは主にこの既約性判定を用いる．そこで次にこの Jantzen の既約性判定を紹介する．

まず $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して $Y(\Lambda) \in \mathbb{Z}\langle \mathfrak{h}^* \rangle$ を以下のように定義する．

$$Y(\Lambda) := D^{-1} \sum_{w \in W(\mathfrak{l})} (-1)^{\ell(w)} e^{w\Lambda}. \tag{2.3}$$

ただし，ここで $\ell(w)$ は $w \in W(\mathfrak{l})$ の長さであり，e^{μ} は μ で値 1 を取り，それ以外では値 0 を取る $\mathfrak{h}^*$ 上の関数である．また D はワイル分母 $D = e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$ を表す．

次の命題については [10, Corollary A.1.5] および [12, Corollary 2.2.10] を参照されたい．

命題 4　次の主張が成り立つ．

(1) $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ がある $\beta \in \Delta(\mathfrak{l})$ に対して $(\Lambda, \beta) = 0$ であるならば，$Y(\Lambda) = 0$ となる．逆に，もし全ての $\beta \in \Delta(\mathfrak{l})$ に対して $\langle \Lambda, \beta \rangle \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ であるならば，$Y(\Lambda) \neq 0$ となる．

(2) $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ および $w \in W(\mathfrak{l})$ に対して，$Y(w\Lambda) = (-1)^{\ell(w)} Y(\Lambda)$ が成り立つ．

定義 5　$\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して集合 S_Λ を

$$S_\Lambda := \{\beta \in \Delta(\mathfrak{u}) : \langle \Lambda, \beta \rangle \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

と定義する．特に $\Lambda = \Lambda_t := (t - c)\lambda + \rho$ のときは，単に $S_t = S_{\Lambda_t}$ と書く．

[12, Theorem 2.2.11] で用いられているスカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ に対する Jantzen の既約性判定を紹介する．一般の場合については [7, Satz 3] もしくは [6, Theorem 9.13] などを参照されたい．

定理 6 ([7, Satz 3])　放物型部分代数 $\mathfrak{p}$ を極大放物型部分代数とする．このときスカラー型一般 Verma 加群 $M_{\mathfrak{p}}(t)$ が既約である必要十分条件は $S_t = \emptyset$ もしくは

$$\sum_{\beta \in S_t} Y(\sigma_\beta(\Lambda_t)) = 0 \tag{2.4}$$

が成り立つことである．

Jantzen の既約性判定から次の可約性に関する主張が成り立つ．([2], [10, Proposition A.2.4] などを参照されたい．)

命題 7 ([5, Proposition 1.11])　次の条件 (a), (b) を満たす $\gamma \in S_t$ が存在するならば，$M_{\mathfrak{p}}(t)$ は可約となる．

[*4] 最近，大島–山崎によって Jantzen の既約性判定がリースーパー代数の場合に一般化された ([13])．

(a) $Y(\sigma_\gamma(\Lambda_t)) \neq 0$.
(b) 全ての $\beta \in S_t \setminus \{\gamma\}$ および長さが奇数の $w \in W(\mathfrak{l})$ に対して，$\sigma_\gamma(\Lambda_t) \neq w\sigma_\beta(\Lambda_t)$.

2.3 可約性におけるいくつかの補題

これから可約性におけるいくつかの補題を紹介する．これらの補題は後に複素パラメータ $t \in \mathbb{C}$ を有限個まで絞り込む際に用いる．

まず集合 Red を $M_\mathfrak{p}(t)$ の可約点全体からなる集合とする．すなわち，

$$\mathsf{Red} := \{t \in \mathbb{C} : M_\mathfrak{p}(t) \text{ は可約 }\}.$$

特に補題 1 より，

$$\mathsf{Red} = \{t \in \mathbb{R}_{>0} : M_\mathfrak{p}(t) \text{ は可約 }\}. \tag{2.5}$$

また正数 $q \in \mathbb{R}_{>0}$ に対して，Red(q) を次のように定義する．

$$\mathsf{Red}(q) := \{t \in q + \mathbb{Z}_{\geq 0} : M_\mathfrak{p}(t) \text{ は可約 }\}. \tag{2.6}$$

このとき次の 2 つの主張が成り立つ．

補題 8 ([5, Lemma 1.15]) Red$(q) \neq \emptyset$ である必要十分条件はある $\beta \in \Delta(\mathfrak{u})$ に対し，

$$\langle (q-c)\lambda + \rho\,, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$$

が成り立つことである．

補題 9 ([5, Lemma 1.16]) Red$(q_j) \neq \emptyset$ となる有限個の有理数 $q_1, q_2, \ldots, q_\ell \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ が存在し，以下の等式を満たす．

$$\mathsf{Red} = \bigcup_{j=1}^{\ell} \mathsf{Red}(q_j).$$

補題 8 は系 3 より従う．また補題 9 は命題 2 から導かれる．特に $M_\mathfrak{p}(t)$ が可約であれば，ある $\beta \in \Delta(\mathfrak{u})$ および $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在し，t が

$$t = \frac{k - \langle \rho\,, \beta \rangle}{\langle \lambda\,, \beta \rangle} + c \tag{2.7}$$

の形を取ることより従う．

3 可約性判定アルゴリズム

本節ではこれより可約性判定アルゴリズムについて解説する．まず Red$(q_j) \neq \emptyset$ であり，等式 Red $= \bigcup_{j=1}^{\ell}$ Red(q_j) を満たす有限個の有理数 $q_1, \ldots, q_\ell \in \mathbb{Q} \cap (0,1]$ を見つける．こ

れらの有理数は補題 8 および式 (2.7) より容易に見つけることができる．(詳しくは以下の項 4.2 を参照されたい．) 系 3 より，$t \in q_j + \mathbb{Z}$ に対して，$t \geq c$ であれば $M_\mathfrak{p}(t)$ は常に可約であることがわかる．したがって，$\mathsf{Red}(q_j)$ を決定するには $t \in (q_j + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap (0, c)$ のみ調べれば良い．ここで $(q_j + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap (0, c)$ は有限集合であることに注意されたい．

次に $t \in (q_j + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap (0, c)$ を 1 つ固定し，以下の可約性判定アルゴリズムを用いて，$M_\mathfrak{p}(t)$ が可約かどうかを判定する．まず

$$R_{t,0} := \{\beta \in S_t : Y(\sigma_\beta(\Lambda_t)) \neq 0\}$$

とおく．この集合は命題 4 を用いて決定できる．

可約性判定アルゴリズム

Step 1. もし $R_{t,0} = \emptyset$ であるならば，$M_\mathfrak{p}(t)$ は既約であり，終了．そうでなければ Step 2 に進む．

Step 2. もし $R_{t,0} \neq \emptyset$ であるならば，$\beta \in R_{t,0}$ を 1 つ取る．

(i) もし $\delta \in R_{t,0} \setminus \{\beta\}$ となるルート δ および長さが奇数の $w \in W(\mathfrak{l})$ で $w\sigma_\delta(\Lambda_t) = \sigma_\beta(\Lambda_t)$ を満たすものがなければ，$M_\mathfrak{p}(t)$ は可約となる．

(ii) もし上記の δ, w が存在した場合は，そのルート $\delta \in R_{t,0} \setminus \{\beta\} \neq \emptyset$ を取り $R_{t,1} := R_{t,0} \setminus \{\beta, \delta\}$ とおく．$R_{t,0}$ を $R_{t,1}$ に変えて Step 1 に戻る．

この手順により，集合 $R_{t,k}$ の有限列が与えられる．もしある $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$R_{t,k} = \emptyset$ となるならば，$M_\mathfrak{p}(t)$ は既約となり，そうでなければ $M_\mathfrak{p}(t)$ は可約となる．

この可約性判定アルゴリズムが有効であることは特に命題 7 より従う．なおこのアルゴリズムの Step 2 (i) を行うにはある程度の計算を要する．そこで Step 2 (i) を行う前に S_t を $R_{t,k}$ として命題 7 の系である以下の系 10 の条件をチェックすると良い．

系 10 ([5, Corollary 1.12]) 以下の条件 (a), (b) を満たす $\gamma \in S_t$ が存在するならば，$M_\mathfrak{p}(t)$ は可約となる．

(a) $Y(\sigma_\gamma(\Lambda_t)) \neq 0$.

(b) 全ての $\beta \in S_t \setminus \{\gamma\}$ に対して，$\langle \lambda, \gamma \rangle (\Lambda_t, \gamma) \neq \langle \lambda, \beta \rangle (\Lambda_t, \beta)$.

系 10 の条件 (b) はワイル群の元を求める必要がないため Step 2 (i) を行うよりも計算量が少なくて済む．また例外型において，F_4 型以外では全ての可約点が系 10 で与えられた．(ただし既約な $t \in (q_j + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap (0, c)$ については Jantzen の既約性判定または命題 2 を用いる必要がある．) F_4 型で系 10 で決定できなかった可約点は単純ルート α_1 に対応する極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}_1$ の $t = 1$ そして単純ルート α_4 に対応する極大放物型部分代数 $\mathfrak{p}_4$ の $t = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ のみである．(ここで単純ルートの順番はブルバキ [1] に従う．)

注意 11 [5] ではリー環 $\mathfrak{g}$ が例外型の時に可約性判定アルゴリズムを用いたが，古典型の場合は特にそれを用いることなく，命題 7 や系 10 を直接用いて可約点を分類した．

4 Simplification trick

さて前節で系 10 を用いれば計算量が減ると述べたが，それでも実際に系 10 を手で計算するのは特に E 型において非常に tedious な計算を要する．そこで [5] では Maple を用いて計算を実行することで全ての可約点を決定した．一方，[11] でリー環 $\mathfrak{g}$ が ADE 型のときに系 10 での計算をある程度簡単にする方法「simplification trick」を与えた．この最後の節ではその simplification trick について解説する．

4.1 Simplification trick

以下 $\mathfrak{g}$ を ADE 型とする．その他の記号は項 2.1 で定めたものをそのまま使う．ルート $\beta \in \Delta$ に対して $\mathrm{ht}(\beta)$ をその高さとする．すなわち，もし $\beta = \sum_{\delta\in\Pi} n_\delta \delta$ であるならば，$\mathrm{ht}(\beta) = \sum_{\delta\in\Pi} n_\delta$ である．特に Δ が simply-laced であることより，$\langle \rho\,, \beta\rangle = \mathrm{ht}(\beta)$ が成り立つ[*5]．

さて $\Delta(\mathfrak{u}) = \{\beta \in \Delta : \langle \lambda\,, \beta\rangle > 0\}$ より，$\Delta(\mathfrak{u})$ は $\Delta(\mathfrak{u}) = \bigcup_{j\in 1+\mathbb{Z}_{\geq 0}} \Delta(j)$ と表される．ただし，ここで $\Delta(j)$ を $\Delta(j) := \{\beta \in \Delta : \langle \lambda\,, \beta\rangle = j\}$ と定義する．次に各 $j \in 1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対してルート $\gamma_j \in \Delta(j)$ を $\Delta(j)$ 内で最大の高さを持つルートとする．すなわち全ての $\beta \in \Delta(j)$ に対して $\mathrm{ht}(\gamma_j) \geq \mathrm{ht}(\beta)$ を満たすようなルートとする．$\mathfrak{p}$ が極大放物型部分代数であることから，そのような γ_j は一意に存在することに注意されたい．

各 $j \in 1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $S_t(j) := S_t \cap \Delta(j)$ とおく．このとき $\Lambda_t = (t-c)\lambda + \rho$ より $\beta \in S_t(j)$ に対して
$$\langle \Lambda_t\,, \beta\rangle = (t-c)j + \mathrm{ht}(\beta)$$
が成り立つ．特に定義 5 より $S_t(j)$ は
$$S_t(j) = \{\beta \in \Delta(j) : (t-c)j + \mathrm{ht}(\beta) \in \mathbb{Z}_{>0}\} \tag{4.1}$$
で与えられる．また式 (4.1) より，$S_t(j) \neq \emptyset$ である必要十分条件は $\gamma_j \in S_t(j)$ である．さて $\mathrm{ht}(\mathfrak{l})$ を
$$\mathrm{ht}(\mathfrak{l}) := \max\{\mathrm{ht}(\beta) : \beta \in \Delta^+(\mathfrak{l})\}$$
と定める．このとき次の主張が成り立つ．

[*5] [5] と [11] では記号 $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ の用法が違うことに注意されたい．ウェイト $\mu \in \mathfrak{h}^*$，ルート $\beta \in \Delta$ に対して，[5] の $\langle \mu\,, \beta\rangle$ は [11] の $\langle \mu\,, \beta^\vee\rangle$ に対応する．ただし，ここで $\beta^\vee$ は β のコルートを表す．

命題 12 (simplification trick [11, Proposition 14]) 与えられた $t_0 \in \mathbb{C}$ に対し $j_1 < \cdots < j_r$ を $S_{t_0} = \bigcup_{k=1}^{r} S_{t_0}(j_k)$，各 j_k に対して $S_{t_0}(j_k) \neq \emptyset$，をみたすようにとる．このとき以下の条件 (a), (b) が満たされるならば，$M_{\mathfrak{p}}(t)$ は全ての $t \in t_0 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して可約となる．

(a) $\langle \Lambda_t , \gamma_{j_r} \rangle > \mathrm{ht}(\mathfrak{l})$.

(b) 全ての $k = 1, \ldots, r-1$ に対して，$\langle \Lambda_t , \gamma_{j_r} \rangle \geq \langle \Lambda_t , \gamma_{j_k} \rangle$.

命題 12 の条件で条件 (b) は等号付き不等号だが，条件 (a) は単純な不等号であることに注意されたい．

4.2 Simplification trick の例

最後に [11] より simplification trick を用いた簡単な例を紹介する．$\mathfrak{g}$ を E_7 型とし，$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u}$ を単純ルート α_3 に対応する極大放物型部分代数とする．(ただし前節同様，単純ルートの順番はブルバキ [1] に従う．) また単純ルート α_3 の基本ウェイトを λ_3 と書く．このとき $\Delta(\mathfrak{u}) = \bigcup_{j=1}^{3} \Delta(j)$ となり，また $\rho(\mathfrak{u}) = c_3\lambda_3$ となる定数 c_3 は $c_3 = 11/2$ で与えられる．さらに直接の考察より，各高さ $\mathrm{ht}(\gamma_j)$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{l})$ はそれぞれ $\mathrm{ht}(\gamma_3) = 17$, $\mathrm{ht}(\gamma_2) = 15$, $\mathrm{ht}(\gamma_1) = 10$, $\mathrm{ht}(\mathfrak{l}) = 5$ となる．

もし $M_{\mathfrak{p}}(t)$ が可約であれば補題 1 より $t \in \mathbb{R}_{>0}$ であり，また式 (2.7) より，あるルート $\beta_0 \in \Delta(\mathfrak{u})$ および $k \in \mathbb{Z}_{>0}$ が存在して以下の等式を満たす．

$$t = \frac{k - \langle \rho , \beta_0 \rangle}{\langle \lambda_3 , \beta_0 \rangle} + c_3.$$

特に $\langle \lambda_3 , \beta_0 \rangle \in \{1, 2, 3\}$ であり，また $c_3 = 11/2$ であることから，$t \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{>0}$ となる．したがって $t \in \frac{1}{6}\mathbb{Z}_{>0}$ に対してのみ $M_{\mathfrak{p}}(t)$ の可約性を調べれば良い．

簡単な考察より $S_t \neq \emptyset$ である必要十分条件は

$$t \in (\tfrac{1}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cup (\tfrac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cup (\tfrac{5}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cup (1 + \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

であることが分かる．またそのときの S_t は次で与えられる．

- $t \in \frac{1}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $S_t = S_t(3)$.
- $t \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $S_t = \bigcup_{k=1}^{3} S_t(k)$.
- $t \in \frac{5}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $S_t = S_t(3)$.
- $t \in 1 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$: $S_t = S_t(2)$.

ここでは簡単のため $t \in \frac{1}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のときのみ解説する．他のケースについても同様の議論を用いることができる．このときは $S_t = S_t(3)$ であるため，命題 12 の条件 (b) をチェックする必要がないことに注意されたい．

主張: $t \in \frac{1}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して，$M_{\mathfrak{p}}(t)$ が可約である必要十分条件は $t \in \frac{7}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ である．

$m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とし，$t = \frac{1}{6} + m$ と書く．このとき $\langle \Lambda_t, \gamma_3 \rangle = 3(t - c_3) + \mathrm{ht}(\gamma_3)$ より，

$$\langle \Lambda_t, \gamma_3 \rangle = 3(t - 11/2) + 17 = 3m + 1.$$

したがって $m \geq 2$ ならば $\langle \Lambda_t, \gamma_3 \rangle > 5 = \mathrm{ht}(\mathfrak{l})$ となるため，命題 12 より $t \in \frac{1}{6} + 2 + \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $M_{\mathfrak{p}}(t)$ は可約となる．よって $t = \frac{7}{6}$ および $t = \frac{1}{6}$ のみ個別にチェックすれば良い．

1) $t = \frac{7}{6}$: この場合，$\Lambda_{\frac{7}{6}}$ は regular となる．したがって命題 2 より $M_{\mathfrak{p}}(\frac{7}{6})$ は可約となる．

2) $t = \frac{1}{6}$: このとき $S_{\frac{1}{6}} = \{\gamma_3\}$ であるが, 単純ルート $\alpha_1 \in \Delta(\mathfrak{l})$ に対して $\langle \sigma_{\gamma_3}(\Lambda_{\frac{1}{6}}), \alpha_1 \rangle = 0$ であるため，命題 4 より集合 $R_{\frac{1}{6},0}$ は $R_{\frac{1}{6},0} = \emptyset$ となる．したがって可約性判定アルゴリズム Step 1 より $M_{\mathfrak{p}}(\frac{1}{6})$ は既約になる．

同様の議論より $M_{\mathfrak{p}}(t)$ の可約点は

$$t \in (\tfrac{7}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cup (\tfrac{3}{2} + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cup (\tfrac{5}{6} + \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cup (1 + \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

であることが示される．

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algébres de Lie, chapitres 4, 5 et 6*, Hermann, Paris, 1968, 288 pp.

[2] T. Enright and J.A. Wolf, *Continuation of unitary derived functor modules out of the canonical chamber*, Mém. Soc. Math. France (N.S.) **15** (1984), 139–156.

[3] A. Gyoja, *Highest weight modules and b-functions of semi-invariants*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 3, 353–400.

[4] H. He, *On the reducibility of scalar generalized Verma modules of abelian type*, Algebr. Represent. Theory **19** (2016), no. 1, 147–170.

[5] H. He, T. Kubo, and R. Zierau, *On the reducibility of scalar generalized Verma modules associated to maximal parabolic subalgebras*, to appear in Kyoto J. Math, available at https://sites.google.com/site/toskubo00/c-publications2.

[6] J.E. Humphreys, *Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$*, Grad. Stud. Math, vol. 94, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008. xvi+289 pp.

[7] J.C. Jantzen, *Kontravariante formen auf induzierten darstellungen halbeinfacher Lie-Algebren*, Math. Ann. **226** (1977), no. 1, 53–65.

[8] A. Kamita, *The b-function for prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type and universal generalized Verma modules*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **41** (2005), no. 2, 471–495.

[9] A.W. Knapp, *Lie groups beyond an introduction, 2nd ed.*, Progr. Math., vol. 140, Birkhäuser, Boston, MA, 2002, xviii+812 pp.

[10] T. Kubo, *Conformally invariant systems of differential operators associated to two-step nilpotent maximal parabolics of non-Heisenberg type*, ProQuest LLC, Ann Arbor, MI, 2012, Thesis (Ph.D.)–Oklahoma State University.

[11] T. Kubo, *On reducibility criterions for scalar generalized Verma modules associated to maximal parabolic subalgebras*, Lie Theory and Its Applications in Physics (V. Dobrev (ed.), Springer Proc. Math. & Stat. vol. 191, Springer, Tokyo, 2016, 465–473.

[12] H. Matumoto, *The homomorphisms between scalar generalized Verma modules associated to maximal parabolic subalgebras*, Duke Math. J. **131** (2006), no. 1, 75–119.

[13] Y. Oshima and M Yamazaki, *Determinant formula for parabolic Verma modules of Lie superalgebras*, arXiv:1603.06705 (preprint).

[14] S. Suga, *Highest weight modules associated with classical irreducible regular prehomogeneous vector spaces of commutative parabolic type*, Osaka J. Math. **28** (1991), no. 2, 323–346.

[15] D.A. Vogan, Jr., *Unitarizability of certain series of representations*, Ann. of Math. **120** (1984), no. 1, 141–187.

[16] A. Wachi, *Contravariant forms on generalized Verma modules*, Hiroshima Math. J. **29** (1999), no. 1, 193–225.

[17] N. Wallach, *On the unitarizability of derived functor modules*, Invent. Math. **78** (1984), no. 1, 131–141.