数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 1-7

アメリカンモンテカルロとマルチレベルモンテカルロ法
Grant *et al.* (1996) の価格付けアルゴリズムのマルチレベル化

乾 仁
早稲田大学ビジネス・ファイナンス研究センター
Hitoshi Inui
Institute for Business and Finance, Waseda University

1 はじめに

オプションの価格付け手法には色々な方法があるが，その中の 1 つにモンテカルロ法がある．ファイナンスにおけるモンテカルロ法の利用は Hess & Quigley [8]，Hertz [7] による企業のリスク分析に始まったと言われている（Wagle [11]）が，1970 年代になってオプションの価格付けにモンテカルロ法を適用する最初期の研究（Boyle [1]）が発表された．オプションは権利行使のタイミングの観点で分類すると，ヨーロピアン型とアメリカン型に分けられるが，Boyle [1] はモンテカルロ法によるヨーロピアンオプションの価格付けを提案し，基本的な分散減少法について検証した．ヨーロピアンオプションの買い手は満期日に限り権利行使可能だが，アメリカンオプションの買い手は満期日を含む満期日までの任意の日に権利行使可能である．[*1] これは，アメリカンオプションの価格付けでは，各時点で権利行使するか否かを判定する必要があることを意味する．そのため，アメリカンオプションの価格付けはヨーロピアンオプションの価格付けよりも複雑であり，モンテカルロ法の適用は困難と考えられていたようである（Tilley [10]，Fu *et al.* [4]）．

しかし，Tilley [10] がアメリカンオプションを価格付けするためのバンドリングアルゴリズムを提案し，その後数多くの手法が提案されてきた．例えば，確率ツリー法（Broadie & Glasserman [2]），確率メッシュ法（Broadie & Glasserman [3]），最小二乗モンテカルロ法（Longstaff & Schwartz [9]），Grant *et al.* [6] のダイナミックプログラミング（Dynamic Programming, DP）などがある．

ところで，モンテカルロ法でオプションを価格付けする場合，オプションの原資産のサンプルパスを生成する必要がある．原資産 S の従う確率微分方程式を

$$dS_t = \mu\left(S_t, t\right) dt + \sigma\left(S_t, t\right) dW_t, \qquad 0 \leq t < T, \tag{1}$$

[*1] その他に権利行使可能なタイミングの観点で，ヨーロピアン型とアメリカン型の中間の性質をもつバミューダ型がある．あらかじめ決められた複数の日に権利行使可能なオプションをバミューダ型のオプションという．

とする．ここで，$S_t \in \mathbb{R}^m$ で，$S_0 = s$ は所与のものとする．オプションの満期 $T < \infty$，$W_t \in \mathbb{R}^d$ は標準ブラウン運動，ドリフト $\mu : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$，ボラティリティ $\sigma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m\times d}$ である．

標準的なモンテカルロ（standard Monte Carlo，SMC）法の枠組みでは，サンプルパス生成の際に，あらかじめ設定した 1 種類の時間幅 Δt を使用する．仮に $D = M^L$（M，L はともに正の整数）で，$\Delta t = T/D$ とする．このとき，例えば次の (2) のような (1) の離散化式（Euler スキームによる離散化式）を用いてサンプルパスを生成する．

$$\widehat{S}_{t_{n+1}} - \widehat{S}_{t_n} = \mu\left(\widehat{S}_{t_n}, t_n\right)\Delta t + \sigma\left(\widehat{S}_{t_n}, t_n\right)\Delta W_{t_n}, \quad n = 0, 1, \ldots, D-1. \tag{2}$$

P を原資産 S に依存し，現在時点まで割り引いたオプションのペイオフを計算する関数，$\widehat{P}$ を時間幅 Δt による P の離散化近似とする．標準的なモンテカルロ法はオプション価格 $\mathrm{E}[P]$ のを近似的な量である $\mathrm{E}[\widehat{P}]$ を次の (3) で計算するシミュレーション手法である．

$$Y = N^{-1}\sum_{i=1}^{N} \widehat{P}^i, \tag{3}$$

ここで，N はサンプルパスの本数である．

一方，Giles [5] が提案したマルチレベルモンテカルロ（multilevel Monte Carlo，MLMC）法は 2 種類以上の時間幅のサンプルパスを生成する．つまり，$L+1$ 種類の時間幅 $h_\ell = T/M^\ell, \ell = 0, 1, \ldots, L$ による (1) の離散化式でサンプルパスを生成する．ここで ℓ はレベルを意味し，最大レベル，最小レベルは L，0 である．h_L，h_0 は各々，最も緻密なサンプルパス，最も粗いサンプルパスの生成に使用する．MLMC 法の目的は，SMC 法に対する計算コストの削減であるが，それは MLMC 法の分散減少効果により達成される．MLMC 法はモンテカルロ法の新しい枠組みとみなせて，数多くの研究が発表されている．上述のアメリカンオプションを価格付けするための手法群を MLMC 法の枠組みで構成することもできる．そこで，本稿ではこれをマルチレベル化と呼ぶことにして，Grant *et al.* [6] の価格付けアルゴリズムをマルチレベル化することを試みる．

本稿の構成は以下の通りである．第 2 章では MLMC 法を簡潔に紹介し，第 3 章ではマルチレベル化した Grant *et al.* [6] の価格付けアルゴリズムを述べる．第 4 章では，Grant *et al.* [6] の価格付けアルゴリズムをマルチレベル化して実装した場合と SMC 法の枠組みの下で実装した場合のパフォーマンスを，分散の大小の観点で比較する．最後に，今後の研究の方向性について述べる．

2 マルチレベルモンテカルロ（MLMC）法

MLMC 法を用いる場合，オプション価格 $\mathrm{E}[P]$ の近似的な量である $\mathrm{E}[\widehat{P}_L]$ を計算する．

$$\mathrm{E}[\widehat{P}_L] = \mathrm{E}[\widehat{P}_0] + \sum_{\ell=1}^{L} \mathrm{E}[\widehat{P}_\ell - \widehat{P}_{\ell-1}], \tag{4}$$

が成立する．各 P_ℓ は時間幅 h_ℓ による P の離散化近似である．そして，$\mathrm{E}[\widehat{P}_L]$ を次式で計算する．

$$\widehat{Y} = \sum_{\ell=0}^{L} \widehat{Y}_\ell, \tag{5}$$

ここで

$$\widehat{Y}_\ell = \begin{cases} N_0^{-1} \sum_{i=1}^{N_0} \widehat{P}_0^i, & (\ell = 0), \\ N_\ell^{-1} \sum_{i=1}^{N_\ell} (\widehat{P}_\ell^i - \widehat{P}_{\ell-1}^i), & (\ell = 1, 2, \ldots, L), \end{cases} \tag{6}$$

である．N_ℓ はサンプルパスの本数である．尚，実装において Giles [5] で述べられているように，$\widehat{P}_\ell^i$ を計算するために生成した乱数を $\widehat{P}_{\ell-1}^i$ の計算にも使用する．

3 Grant et al. (1996) の価格付けアルゴリズムとマルチレベル化

アメリカンプットオプションを価格付けするためのアルゴリズムを述べる．

3.1 SMC 法の枠組みにおける価格付けアルゴリズム

Grant *et al.* [6] によるアメリカンプットオプションの価格付けでは DP を利用する．大きく分けて次の 2 つのステップに分けられるが，ステップ A1 は，マルチレベル化して実装する場合と SMC 法の枠組みで実装する場合に共通するので，詳細な説明は省略する（Grant et al. [6] を参照のこと）．

A1 権利行使境界 $S^* = \{S_{t_0}^*, S_{t_1}^*, \ldots, S_{t_D}^*\}$ を計算する．
※アメリカンオプションの価格付けにおいて，あらかじめ設定されている権利行使価格を K とすると，$S_{t_D}^* = S_T^* = K$ である．

A2 オプション価格 Y を計算する．
- (2) を使用して N 本 のサンプルパス $\{\widehat{S}_{t_0}^i, \widehat{S}_{t_1}^i, \ldots, \widehat{S}_{t_D}^i\}, i = 1, 2, \ldots, N$ を生成する。
- 各サンプルパスに対して，権利行使時点 $\tau_i \equiv \min_{t_1 \le t \le t_D}\{t : \widehat{S}_t^i \le S_t^*\}$ をみつける．τ_i がオプションの満期までに存在しない場合は $\tau_i = t_D (= T)$ とする．
- 次式でオプション価格を計算する．[*2]

$$Y = N^{-1} \sum_{i=1}^{N} \exp(-r\tau_i) \max\left(S_\tau^* - \widehat{S}_\tau^i, 0\right). \tag{7}$$

3.2 MLMC 法の枠組みにおける価格付けアルゴリズム（マルチレベル化）

Grant *et al.* [6] の価格付けアルゴリズムのマルチレベル化では，3.1 のステップ A2 を次のステップ B2 に変更する．また，サンプルパスの本数 $N_0, N_1, \ldots, N_L$ は所与のものとする．簡単の

[*2] (7) は (3) において，$\widehat{P}^i = \exp(-r\tau_i)\max\left(S_\tau^* - \widehat{S}_\tau^i, 0\right)$ とした数式である．

ため $M=2$（このとき $D=M^L=2^L$ である）としてアルゴリズムを記述する．

B1 3.1 のステップ A1 を実行する．

B2 オプション価格 $\widehat{Y}$ を計算する．

- $\widehat{Y}_0$ の計算
  - (1) を $h_0 = T/2^0 = T$ で離散化した数式を使用して，N_0 本 のサンプルパス $\{\widehat{S}^i_{t_0}, \widehat{S}^i_{t_D}\}, i=1,2,\ldots,N_0$ を生成する。
  - 各サンプルパスに対して，$\tau_i = t_D(=T)$ とする．
  - 次式で $\widehat{Y}_0$ を計算する．

$$\widehat{Y}_0 = N_0^{-1}\sum_{i=1}^{N_0}\exp(-r\tau_i)\max\left(S^*_\tau - \widehat{S}^i_\tau, 0\right).$$

- $\widehat{Y}_1$ の計算
  - (1) を $h_1 = T/2$ で離散化した数式を使用して，N_1 本 のサンプルパス $\{\widehat{S}^{f,i}_{t_0}, \widehat{S}^{f,i}_{t_{D/2}}, \widehat{S}^{f,i}_{t_D}\}, i=1,2,\ldots,N_1$ を生成する。
  - (1) を $h_0 = T/2^0 = T$ で離散化した数式を使用して，N_1 本 のサンプルパス $\{\widehat{S}^{c,i}_{t_0}, \widehat{S}^{c,i}_{t_D}\}, i=1,2,\ldots,N_1$ を生成する。ただし，乱数は新たに生成せず，N_1 本のレベル 1 のサンプルパス生成に使用したものを用いる．
  - 各サンプルパスに対して，権利行使時点 $\tau_{f,i} \equiv \min_{t\in\{t_{D/2},t_D\}}\{t : \widehat{S}^{f,i}_t \le S^*_t\}$ をみつける．また，$\tau_{c,i} = t_D(=T)$ とする．尚，$\tau_{f,i}$ がオプションの満期までに存在しない場合は $\tau_{f,i} = t_D$ とする．
  - 次式で $\widehat{Y}_1$ を計算する．

$$\widehat{Y}_1 = N_1^{-1}\sum_{i=1}^{N_1}\left(e^{-r\tau_{f,i}}\max\left(S^*_{\tau_{f,i}} - \widehat{S}^{f,i}_{\tau_{f,i}}, 0\right) - e^{-r\tau_{c,i}}\max\left(S^*_{\tau_{c,i}} - \widehat{S}^{c,i}_{\tau_{c,i}}, 0\right)\right).$$

- $\widehat{Y}_2$ の計算
  - (1) を $h_2 = T/4$ で離散化した数式を使用して，N_2 本 のサンプルパス $\{\widehat{S}^{f,i}_{t_0}, \widehat{S}^{f,i}_{t_{D/4}}, \widehat{S}^{f,i}_{t_{D/2}}, \widehat{S}^{f,i}_{t_{3D/4}}, \widehat{S}^{f,i}_{t_D}\}, i=1,2,\ldots,N_2$ を生成する。
  - (1) を $h_1 = T/2$ で離散化した数式を使用して，N_2 本のサンプルパス $\{\widehat{S}^{c,i}_{t_0}, \widehat{S}^{c,i}_{t_{D/2}}, \widehat{S}^{c,i}_{t_D}\}, i=1,2,\ldots,N_2$ を生成する。ただし，乱数は新たに生成せず，N_2 本のレベル 2 のサンプルパス生成に使用したものを用いる．
  - 各サンプルパスに対して，権利行使時点 $\tau_{f,i} \equiv \min_{t\in\{t_{D/4},t_{D/2},t_D\}}\{t : \widehat{S}^{f,i}_t \le S^*_t\}$，$\tau_{c,i} \equiv \min_{t\in\{t_{D/2},t_D\}}\{t : \widehat{S}^{c,i}_t \le S^*_t\}$ をみつける．$\tau_{f,i}$，$\tau_{c,i}$ がオプションの満期までに存在しない場合は $\tau_{f,i} = t_D(=T)$，$\tau_{c,i} = t_D$ とする．
  - 次式で $\widehat{Y}_2$ を計算する．

$$\widehat{Y}_2 = N_2^{-1}\sum_{i=1}^{N_2}\left(e^{-r\tau_{f,i}}\max\left(S^*_{\tau_{f,i}} - \widehat{S}^{f,i}_{\tau_{f,i}}, 0\right) - e^{-r\tau_{c,i}}\max\left(S^*_{\tau_{c,i}} - \widehat{S}^{c,i}_{\tau_{c,i}}, 0\right)\right).$$

$\vdots$ $\vdots$

- $\widehat{Y}_L$ の計算
  - (1) を $h_L = T/2^L$ で離散化した数式を使用して，N_L 本のサンプルパス $\{\widehat{S}^{f,i}_{t_0}, \widehat{S}^{f,i}_{t_1}, \widehat{S}^{f,i}_{t_2}, \dots, \widehat{S}^{f,i}_{t_D}\}, i = 1, 2, \dots, N_L$ を生成する．
  - (1) を $h_{L-1} = T/2^{L-1}$ で離散化した数式を使用して，N_L 本のサンプルパス $\{\widehat{S}^{c,i}_{t_0}, \widehat{S}^{c,i}_{t_2}, \widehat{S}^{c,i}_{t_4}, \dots, \widehat{S}^{c,i}_{t_D}\}, i = 1, 2, \dots, N_L$ を生成する．ただし，乱数は新たに生成せず，N_L 本のレベル L のサンプルパス生成に使用したものを用いる．
  - 各サンプルパスに対して，権利行使時点 $\tau_{f,i} \equiv \min_{t \in \{t_1, t_2, \dots, t_D\}}\{t : \widehat{S}^{f,i}_t \leq S^*_t\}$, $\tau_{c,i} \equiv \min_{t \in \{t_2, t_4, \dots, t_D\}}\{t : \widehat{S}^{c,i}_t \leq S^*_t\}$ をみつける．$\tau_{f,i}$，$\tau_{c,i}$ がオプションの満期までに存在しない場合は $\tau_{f,i} = t_D (= T)$，$\tau_{c,i} = t_D$ とする．
  - 次式で $\widehat{Y}_L$ を計算する．

$$\widehat{Y}_L = N_L^{-1} \sum_{i=1}^{N_L} \left(e^{-r\tau_{f,i}} \max\left(S^*_{\tau_{f,i}} - \widehat{S}^{f,i}_{\tau_{f,i}}, 0\right) - e^{-r\tau_{c,i}} \max\left(S^*_{\tau_{c,i}} - \widehat{S}^{c,i}_{\tau_{c,i}}, 0\right)\right).$$

- $\widehat{Y}$ の計算
  - 既に計算した $\widehat{Y}_0, \widehat{Y}_1, \dots, \widehat{Y}_L$ を (5) に代入することにより，$\widehat{Y}$ を計算する．

4 数値実験

4.1 準備

マルチレベル化して実装する場合，SMC 法の枠組みで実装する場合の Grant *et al.* [6] の価格付けアルゴリズムを，各々 MLMC-DP，SMC-DP と呼ぶことにする．原資産の挙動を表現する確率微分方程式は，簡単のためドリフト（金利），ボラティリティを定数 r，定数 v として

$$dS_t = rS_t dt + vS_t dW_t, \qquad 0 \leq t < T, \tag{8}$$

を仮定する．入力情報を，最大レベル $L = 4$，金利 $r = 0.06$，ボラティリティ $v = 0.4$，原資産の初期価格 $S_0 = 40$，権利行使価格 $K = 40$，オプションの満期 $T = 1$，SMC-DP サンプルパスの本数 $N = 10{,}000$ と設定し，分散の大小比較を行う．MLMC-DP のサンプルパス $N_0, N_1, \dots, N_L$ は，以下の数式で計算コスト $C = 160{,}000$ として推定した結果に基づき，$N_0 = 35{,}234$，$N_1 = 12{,}928$，$N_2 = 6{,}757$，$N_3 = 3{,}843$，$N_4 = 2{,}571$ と設定した．

$$N_\ell = \left\lceil \frac{C\sqrt{V_\ell h_\ell}}{\sum_{\ell=0}^{L} T\sqrt{V_\ell / h_\ell}} \right\rceil \tag{9}$$

ここで，$\lceil x \rceil$ は $y \geq x$ を満たす最小の正の整数 y を意味する記号とする．V_ℓ は $\ell = 0$ のときは $\widehat{P}_0$，それ以外のときは $\widehat{P}_\ell - \widehat{P}_{\ell-1}$ のシングル・サンプルの分散である．なお，本稿で提案したアルゴリズムではオプション価格の計算時に MLMC-DP，SMC-DP ともに必ず満期時点までサンプルパスを生成するため，計算コスト $C = 2^4 \cdot 10{,}000 = 160{,}000$ として推定した．

4.2 結果比較

表 1 のように，MLMC-DP，SMC-DP を比較するとマルチレベル化による分散減少効果は確認されず，MLMC-DP の分散は SMC-DP の分散に対して 2.8 倍近くに増大した．$\mathrm{E}[\widehat{P}_\ell - \widehat{P}_{\ell-1}]$

	MLMC-DP	SMC-DP
オプション価格	5.2	5.3
分散	6.7E-03	3.0E-03

表 1　MLMC-DP と SMC-DP の比較

を近似的に計算する際に $\widehat{P}_\ell$，$\widehat{P}_{\ell-1}$ を各々 N_ℓ 個のサンプルで推定する．そのサンプルの相関係数を計算すると表 2 のようになった．そこで，相関係数を 1 に近づけることができれば MLMC-DP

$\widehat{P}_\ell$	$\widehat{P}_0$	$\widehat{P}_1$	$\widehat{P}_2$	$\widehat{P}_3$	$\widehat{P}_4$
$\widehat{P}_{\ell-1}$	-	$\widehat{P}_0$	$\widehat{P}_1$	$\widehat{P}_2$	$\widehat{P}_3$
相関	-	0.85	0.90	0.91	0.93

表 2　相関係数の比較

の分散は減少するという仮説を立てた．$\widehat{P}_{\ell-1}$ を推定する際に生成するサンプルパスをブラウン橋で補間すると，相関係数が 1 に接近し，表 3 のような結果を得た．このとき表 4 のように，

$\widehat{P}_\ell$	$\widehat{P}_0$	$\widehat{P}_1$	$\widehat{P}_2$	$\widehat{P}_3$	$\widehat{P}_4$
$\widehat{P}_{\ell-1}$	-	$\widehat{P}_0$	$\widehat{P}_1$	$\widehat{P}_2$	$\widehat{P}_3$
相関	-	0.99	0.98	0.98	0.97

表 3　相関係数の比較（ブラウン橋による補間有り）

MLMC-DP の分散は SMC-DP と同程度まで減少した．

	MLMC-DP & ブラウン橋	MLMC-DP	SMC-DP
オプション価格	5.2	5.2	5.3
分散	3.0E-03	8.2E-03	3.0E-03

表 4　MLMC-DP & ブラウン橋と SMC-DP の比較

5　まとめ

Grant *et al.* [6] の DP をマルチレベル化するとかえって分散が増大した．(6) における $\widehat{P}^i_{\ell-1}$ を計算する際に，時間幅 $h_{\ell-1}$ による (1) の離散化式で生成したサンプルパスにブラウン橋を適用

し補間することで一定の効果は得られたが，MLMC-DP の分散は SMC-DP と同等程度までしか改善しなかった．よって，SMC-DP のマルチレベル化は効果的ではないと考えられる．本稿では扱わないが，アメリカンオプションを価格付けするための他の手法をマルチレベル化し，分散減少効果の観点でマルチレベル化が効果的な手法と効果的ではない手法の分類をすすめている．今後，それらの結果をとりまとめて公開することを課題としたい．

6　謝辞

本研究は科研費（課題番号：17K18182）の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Boyle, P.P., “OPTIONS: A MONTE CARLO APPROACH,” *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, 1977, pp. 323-338.

[2] Broadie, M. and P. Glasserman, “Pricing American-Style Securities Using Simulation,” *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 27, No. 8-9, 1997, pp. 1323-1352.

[3] Broadie, M. and P. Glasserman, “A Stochastic Mesh Method for Pricing High-Dimensional American Options,” *The Journal of Computational Finance*, Vol. 7, No. 4, 2004, pp. 35-72.

[4] Fu, M.C., S.B. Laprise, and D.B. Madan, Y. Su, and R. Wu, “Pricing American Options: A Comparison of Monte Carlo Simulation Approaches,” *Journal of Computational Finance*, Vol. 4, No. 3, 2001, pp. 39-88.

[5] Giles, M. B., “Multilevel Monte Carlo path simulation,” *Operations Research*, 56 (3), 2008, pp. 607-617.

[6] Grant, D., G. Vora, and D. Weeks, “Simulation and the Early-Exercise Option Problem,” *journal of Financial Engineering*, Vol. 5, No. 3, 1996, pp. 211-227.

[7] Hertz, D.B., “Risk analysis in capital investment,” *Harv. Bus. Rev.*, Vol. 42, No. 1, 1964, pp. 95-106.

[8] Hess, S.W. and H. A. Quigley, “Analysis of risk in ivestments using Monte Carlo techniques,” *Chem. Eng. Prog. Symp. Ser.*, No. 42, 1963, pp. 55-63.

[9] Longstaff, F.A. and E.S. Schwartz, “Valuing American options by simulation: A simple least squares approach,” *Review of Financial Studies* Vol. 14, 2001, pp. 113-147.

[10] Tilley, J.A., “Valuing American Options in a Path Simulation Model,” *Transactions of the Society of Actuaries*, Vol. 45, 1993, pp. 83-104.

[11] Wagle, B., “A Statistical Analysis of Risk in Capital investment Projects,” *Operational Research Quarterly*, Vol. 18, No. 1, 1968, pp. 13-33.