

結合システムを用いた長方形型 connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n): F システムの システム信頼度算出

石川 匠*, 新里 隆†, 肖 霄*, 山本 久志*

* 首都大学東京大学院 システムデザイン研究科

† 玉川大学 工学部

Takumi Ishikawa*, Takashi Shinzato†, Xiao Xiao*, Hisashi Yamamoto*

*Graduate School of System Design, Tokyo Metropolitan University

†College of Engineering, Tamagawa University

1 はじめに

現代社会のシステムは大規模化・複雑化が進んでおり、これらのシステムの中には、我々の生活に直結する重要な社会インフラとして機能しているものも存在する。それらのシステムの重要性が高まるにつれて、システムの設計・運用を安定的に行うために、機能要求を遂行できているかを正確に評価する必要性も高まっている。システムの信頼性評価を行う信頼性工学において重要な問題の1つに、システムを構成するコンポーネントの信頼度が与えられた場合にシステム信頼度を算出する問題がある。一般的に、システム信頼度はコンポーネントが取りうるすべての状態を列挙し、その中でシステムが稼働している状態の生起確率を総和することで求めることができる [1]。ただし、列挙する状態数はコンポーネント数に対して指数的に増大するため、実際にシステム信頼度を計算する際に、多くの計算時間を要することから、効率的な信頼度算出方法が必要となる。現在までにさまざまなシステムに対して、再帰方程式やマルコフ連鎖の考え方を利用した方法が提案されている [2] [3]。

本論文では、コンポーネントがシステム内のある一定範囲内で集中して故障した場合にシステム故障が生起するシステムモデルの1つである connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n):F システムに注目する。図1で示されるように、コンポーネントが m 行 n 列の格子状に配置され、任意の2行1列格子内のコンポーネントが故障する(2個のコンポーネントが行方向で連続故障する)か、もしくは、任意の1行2列格子内のコンポーネントが故障する(2個のコンポーネントが列方向で連続故障する)ときに、システム故障が生起するシステムである。このシステムは多数の構成素子による画像表示装置や大ホールの照明システム、フェーズド・アレイ・レーダーシステムなどの信頼度評価に適用される [4] [5]。本論文の目的として、Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n):F システムに対して、効率的な信頼度算出を行うために、比較的計算容易なサブシステムに分けるシステム分割の考え方を利用した信頼度算出方法を提案する。さらに、提案方法を用いても現実的な時間内に計算が行えない大規模なシステムに対しては、システムが安全面で保証されうる下限値によりシステムの信頼度評価を行う。

2 Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n):F システムのシステム分割を用いたシステム信頼度算出方法

本章では, Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n):F システムに対して, システム分割を用いた信頼度算出方法を提案する. なお, 本論文を通して, システム及びコンポーネントの状態は稼働または故障の2状態であり, コンポーネントの状態は独立同一分布に従うとし, コンポーネントの信頼度と故障確率は p 及び $q (= 1 - p)$ で与えられているものとする. まず, $i = 1, 2, \dots, m$ と $j = 1, 2, \dots, n$ に対して, i 行 j 列に配置されたコンポーネントをコンポーネント (i, j) と呼び, z_{ij} をコンポーネント (i, j) が稼働するときに 0, 故障するときに 1 となる 2 値変数とすると, システムの状態は $Z = (z_{ij})_{m \times n}$ で表される.

2.1 システム分割を用いた信頼度算出方法の提案

Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n):F システムの信頼度を算出する際, システムサイズが大きくなるにつれて, 多くの計算時間が必要となるため, 大規模なシステムの信頼度を算出することは困難である. そこで, システム全体を比較的容易に計算可能なサブシステムに分割し, 分割部分における同時確率を考えることでシステム信頼度を算出する方法を提案する. ここで, システム分割とは, 大規模なシステムをいくつかのサブシステムに分割し, それらのサブシステムの信頼度を求めることで, システム信頼度の関係式を求める方法である.

はじめに, 図 2 で示されるように, システムにおけるコンポーネント $(t, 1)$ を左上隅のコンポーネントとするサブシステムである connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(w,n):F システムを $Sys(t; w, n)$ と呼ぶ. また, $Sys(t; w, n)$ の信頼度を $R(t; w, n)$ とする. 次に, $j = 1, 2, \dots, n$ に対して, j 列目の状態ベクトルを $z_{w;j} = (z_{1j}, z_{2j}, \dots, z_{wj})$ とする. ここで, システムの j 列目において行方向で稼働状態であるときに 1, 故障状態であるときに 0 となる構造関

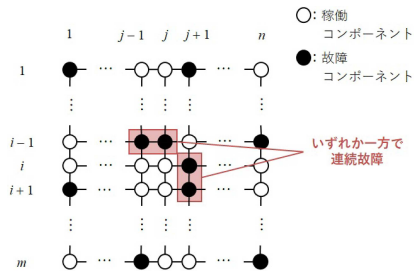


図 1 Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m,n): F システムの故障条件

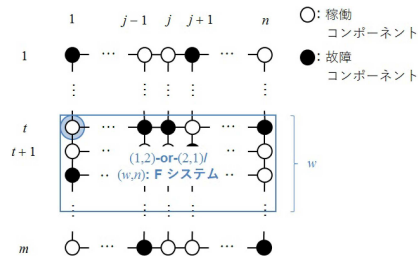


図 2 $Sys(t; w, n)$ の定義

数を $\phi_R(t; \mathbf{z}_{w;j})$, $(j-1)$ 列目から j 列目に跨って列方向で稼働状態であるときに 1, 故障状態であるときに 0 となる構造関数を $\phi_C(t; \mathbf{z}_{w;j-1}, \mathbf{z}_{w;j})$ とすると,

$$\phi_R(t; \mathbf{z}_{w;j}) = \prod_{i=t+1}^w (1 - z_{i-1,j} z_{ij}), \quad (1)$$

$$\phi_C(t; \mathbf{z}_{w;j-1}, \mathbf{z}_{w;j}) = \prod_{i=t}^w (1 - z_{i,j-1} z_{ij}), \quad (2)$$

で表される. また, $m_{t;g_w, h_w}$ を「 $(j-1)$ 列目の状態が g_w である ($z_{w;j-1} = g_w$)」の下で「 j 列目の状態が h_w であり ($z_{w;j} = h_w$), j 列目および $(j-1)$ 列目から j 列目に跨って連続故障を含まない ($\phi_R(t; \mathbf{z}_{w;j}) = 1, \phi_C(t; \mathbf{z}_{w;j-1}, \mathbf{z}_{w;j}) = 1$)」条件付き確率とすると, 次式で表される.

$$m_{t;g_w, h_w} = \phi_R(t; h_w) \phi_C(t; g_w, h_w) p^{w-\alpha(t; h_w)} q^{\alpha(t; h_w)}, \quad (3)$$

ただし, $\alpha(t; \mathbf{z}_{w;j})$ はシステムの j 列目におけるコンポーネントの故障数であり, $\alpha(t; \mathbf{z}_{w;j}) = \sum_{i=t}^w z_{ij}$ で表される. さらに, 状態 g_w と h_w を 2 進数表記から 10 進数表記に書き換え, $m_{t;g_w, h_w}$ を要素に持つ行列を

$$M_{t;w} = (m_{t;g_w, h_w})_{2^w \times 2^w}, \quad (4)$$

とすると, 行列 $M_{t;w}$ を用いて, $Sys(t; w, n)$ の信頼度 $R(t; m, n)$ は次式で与えられる.

$$R(t; w, n) = \boldsymbol{\pi}^T (M_{t;w})^n \mathbf{u}. \quad (5)$$

ただし, システムの 0 列目の状態は行方向で稼働状態であると仮定しシステムの列の状態の場合分けしたことから, 境界条件として, $\boldsymbol{\pi} = (0, \dots, 0, 1)_{2^w \times 1}$ および $\mathbf{u} = (1, \dots, 1, 1)_{2^w \times 1}$ である. 式 (3) - 式 (5) はマルコフ連鎖の考え方を利用したシステム信頼度算出方法である Nakamura et al. [3] と同様の式表現となる. ここで, システムの列の状態を場合分けしたことからそれらの状態で和をとることでシステム信頼度を求めることができるため, 行列の対角和 $\text{Tr}\{\cdot\}$ をとり対角和の交換法則を用いることで, システム信頼度 $R(t; w, n)$ は次式で与えられる.

$$R(t; w, n) = \text{Tr}\{(M_{t;w})^n U_w\}. \quad (6)$$

ただし, $U_w = \mathbf{u}\boldsymbol{\pi}^T$ である.

次に, 図 3 で示されるように, Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m, n):F システムを $Sys(1; l, n)$ と $Sys(l+1; m-l, n)$ に行方向で分割することを考える. したがって, Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m, n):F システムの信頼度 $R(m, n)$ は次式で与えられる.

$$R(m, n) = R(1; l, n) R(l+1; m-l, n) - F_l(1; m, n). \quad (7)$$

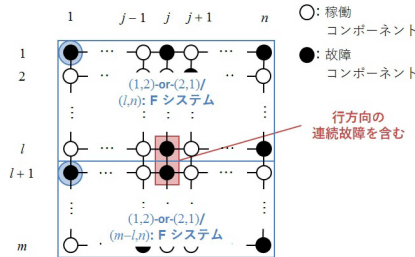


図 3 $Sys(1; l, n)$ と $Sys(l+1; m-l, n)$ による行方向でのシステム分割

ただし, $F_l(t; w, n)$ は, $Sys(t; l, n)$ と $Sys(l+t; w-l, n)$ に行方向で分割したときに, l 行目から $(l+1)$ 行目に跨って行方向で故障状態が生起するがそれ以外では生起しない確率である. よって, 式 (6) と (7) より, システム信頼度 $R(m, n)$ は,

$$R(m, n) = \text{Tr} \{ (M_{1;l})^n U_l \} \text{Tr} \{ (M_{l+1;m-l})^n U_{m-l} \} - F_l(1; m, n), \quad (8)$$

で与えられる. また, 行列の対角和の積は行列のクロネッカー積 \otimes の対角和と同値となることから, 「行列のクロネッカー積の双線型性と結合性」と「行列の積およびクロネッカー積の性質」を用いて, 式 (8) は,

$$R(m, n) = \text{Tr} \{ (M_{1;l} \otimes M_{l+1;m-l})^n (U_l \otimes U_{m-l}) \} - F_l(1; m, n), \quad (9)$$

で表される. ただし, $U_m = U_l \otimes U_{m-l}$ である.

2.2 Connected-(1, 2)-or-(2, 1)-out-of-(1, n):F システムと Connected-(1, 2)-or-(2, 1)-out-of-(m-1, n):F システムシステムに分割した場合

本節では, $l=1$ のとき, すなわち, $Sys(1; 1, n)$ と $Sys(2; m-1, n)$ に行方向で分割することを考える. このとき, システム信頼度 $R(m, n)$ は

$$R(m, n) = \text{Tr} \{ (M_{1;1} \otimes M_{2,m-1})^n (U_1 \otimes U_{m-1}) \} - F_1(1; m, n), \quad (10)$$

で与えられる.

まず, $n_{t;g_w, h_w}$ を, $Sys(t; w, n)$ において, 「 $(j-1)$ 列目の状態が g_m である」の下で「 j 列目の状態が h_m であり, j 列目において t 行目から $(t+1)$ 行目に跨って行方向で連続故障が生起するが^s ($z_{tj} z_{t+1,j} = 1$), それ以外では生起しない」条件付き確率とすると, 次式で与えられる.

$$n_{t;g_w, h_w} = (h_{w;t} h_{w;t+1} \cdot \phi_R(t+1; h_{w-1})) \phi_C(t; g_w, h_w) \cdot p^{w-\alpha(t; h_w)} q^{\alpha(t; h_w)}, \quad (11)$$

また, $n_{t;g_w, h_w}$ を要素に持つ行列を

$$N_{t;w} = (n_{t;g_w, h_w})_{2^w \times 2^w}, \quad (12)$$

とする. さらに, 式 (4) より, 行列 $M_{t;w}$ は $Sys(t; w, n)$ に対していずれの故障状態も生起しない確率を要素に持つ行列である. このことから, 行列 $M_{t;1}$ と $M_{t+1;w-1}$ のクロネッカー積は, $M_{t;1} \otimes M_{t+1;w-1} = M_{t;w} + N_{t;w}$ で表される. よって, 以下の関係式が得られる.

$$M_m = M_{1;1} \otimes M_{2,m-1} - N_{1;m}. \quad (13)$$

次に, 行列 $A_{t;w}$ を, $Sys(t; w, n)$ において, 「 $(j-1)$ 列目の状態が g_m である」の下で「 j 列目の状態が h_m であり, j 列目において t 行目のコンポーネントは故障状態であるが^s ($z_{tj} = 1$), それ以外で連続故障は生起しない」条件付き確率とすると, 次式で与えられる.

$$a_{t;g_w, h_w} = (h_{w;t} \cdot \phi_R(t; h_w)) \cdot \phi_C(t; g_w, h_w) \cdot p^{w-\alpha(t; h_w)} q^{\alpha(t; h_w)}, \quad (14)$$

また, $a_{t;g_w, h_w}$ を要素に持つ行列を

$$A_{t;w} = (a_{t;g_w, h_w})_{2^w \times 2^w}, \quad (15)$$

とする. よって, 行列 $N_{t;w}$ と $A_{t;w}$ の定義より, $A_{t;1} = N_{t;1}$ となることに注意する. さらに, 行方向の故障状態については t 行目から $(t+1)$ 行目に跨って生起するがそれ以外では生起しないことから, 行列 $N_{t;w}$ は,

$$N_{t;w} = N_{t;1} \otimes A_{t+1;w-1}, \quad (16)$$

で表される。したがって、システム信頼度 $R(m, n)$ は以下の系で得られる。

系 1

$$R(m, n) = \text{Tr} \{ (M_{1;1} \otimes M_{2;m-1} - N_{1;1} \otimes A_{2;m-1})^n (U_1 \otimes U_{m-1}) \}. \quad (17)$$

ただし、

$$A_{t;w} = N_{t;1} \otimes (M_{t+1,w-1} - A_{t+1;w-1}), \quad (18)$$

である。

計算例として、 $m = 3$ のときを考える。ここで、状態遷移確率行列 M_2 及び A_2 は、

$$\begin{aligned} M_2 &= M_1 \otimes M_1 - N_1 \otimes N_1 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & p \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & p \\ q & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & p^2 \\ 0 & 0 & pq & p^2 \\ 0 & pq & 0 & p^2 \\ 0 & pq & pq & p^2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} A_2 &= N_1 \otimes (M_1 - N_1) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \otimes \left(\begin{pmatrix} 0 & p \\ q & p \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q & 0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & pq & 0 & 0 \\ 0 & pq & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (20)$$

であることから、 M_3 は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M_3 &= M_1 \otimes M_2 - N_1 \otimes A_2 \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2q & p^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2q & 0 & p^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p^2q & p^2q & p^3 \\ 0 & 0 & 0 & p^2q & 0 & 0 & 0 & p^3 \\ 0 & 0 & pq^2 & p^2q & 0 & 0 & p^2q & p^3 \\ 0 & 0 & 0 & p^2q & 0 & p^2q & 0 & p^3 \\ 0 & 0 & pq^2 & p^2q & 0 & p^2q & p^2q & p^3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

3 数値実験における計算時間

本章では、結合システムを用いた算出方法の Connected-(1,2)-or-(2,1)-out-of-(m, n):F システムのシステム信頼度の計算時間について述べる。なお、提案した算出方法に評価を与えるための記法として計算量（オーダー）を $O(\cdot)$ とする。

まず、システム信頼度を算出するにあたって、メモリ使用量の計算量である空間計算量を考える。前章で示した状態遷移確率行列の次元が $2^m \times 2^m$ であることから、確率行列を記憶させるために必要な計算量は $O(2^{2m})$ となる。また、処理時間の計算量である時間計算量について考察する。システムの列の状態空間は 2^m 個の要素を持ち、これらの要素の状態が n 回に渡って遷移することから、計算量は $O(2^{3m} \log n)$ となる。ここで、状態遷移確率行列の計算量は、クロネッカー積を用いて算出することから、 $O(2^m \log 2^m)$ である。

次に、システム信頼度を算出する際に、システムの行数 m に対して指数オーダーであるが、列数 n に対しては対数オーダーであることがわかる。そこで、プログラムを用いてシステム信頼度を直接算出することによって、それぞれのパラメーターが計算時間に影響を与えているかを明らかにする。ここで、使用する計算環境は、Windowsのエディションが Windows 8.1 Pro、プロセッサが Intel(R) Core(TM) i7-4770 CPU @ 3.40 GHz 3.40 GHz、実装メモリが 16 GB、計算ソフトウェアが MATLAB 2017b である。また、数値実験は $p = 0.99$ として計算を行い、その結果を表 1 から 3 に示す。ここで、表 1 はシステムの形状が正方形の場合であり、システムの行数 m を固定した長方形の場合を表 2 に、列数 n を固定した長方形の場合を表 3 に示す。ただし、メモリ使用量において計算することが困難な場合には N/A と表記する。前述した計算量の理論値と同様に、これらの表に見られるように、システムの行数 m に対しては指数オーダーに、列数 n に対しては対数オーダーとなることがわかる。

以上のことより、本研究で提案した算出方法を用いて $(1, 2)\text{-or-}(2, 1)/(m, n)$: F システムのシステム信頼度を算出する際には、システムの行数 m に対しては指数オーダーに、列数 n に対しては対数オーダーとなる。ただし、提案した方法において、システムの行数 m と列数 n は対称性を持つことから、 m と n を入れ替えても同様の計算結果が得られる。よって、実際にシステム信頼度を算出する際には、大きい値を m とすることによって、効率的にシステム信頼度を算出することができる。

4 まとめと今後の課題

本研究では、 $(1, 2)\text{-or-}(2, 1)/(m, n)$: F システムにおいて、サブシステムが結合したものとみなし、システム信頼度を、マルコフ連鎖の考え方を利用して、サブシステムの状態遷移確率行列に関してクロネッカー積の漸化式で示した。また、本研究で提案した算出方法を用いて $(1, 2)\text{-or-}(2, 1)/(m, n)$: F システムのシステム信頼度を算出する際には、システムの行数 m に対しては指数オーダーに、列数 n に対しては対数オーダーとなることを示した。

今後の課題として、さらに効率よくシステム信頼度を算出するために、提案した算出方法における状態遷移確率行

表 1 計算時間とシステム信頼度-システムが正方形の場合-

m	2	4	6	8	10	12	14	16
n	2	4	6	8	10	12	14	16
Calculation time (s)	0.004	0.006	0.007	0.010	0.166	6.009	276.893	N/A
$R(m, n)$	0.9996	0.9977	0.9942	0.9891	0.9826	0.9746	0.9652	—

表 2 計算時間とシステム信頼度-システムが長方形、システムの行数を固定した場合-

m	10	10	10	10	10	10	10	10
n	10	20	30	40	50	60	70	80
Calculation time (s)	0.166	0.188	0.222	0.211	0.220	0.235	0.236	0.220
$R(m, n)$	0.9826	0.9646	0.9470	0.9296	0.9126	0.8959	0.8795	0.8634

表 3 計算時間とシステム信頼度-システムが長方形、システムの列数を固定した場合-

m	2	4	6	8	10	12	14	16
n	50	50	50	50	50	50	50	50
Calculation time (s)	0.006	0.006	0.007	0.015	0.220	8.138	322.806	N/A
$R(m, n)$	0.9856	0.9668	0.9484	0.9303	0.9126	0.8952	0.8781	—

列を，行列のスパース性を用いて行列サイズを小さくすることが挙げられる。

参考文献

- [1] E. M. El-Sayed: “Algorithm for reliability of $(1, 2)$ or $(2, 1)$ -out-of- $(n, 2)$:F systems,” Journal of the Egyptian mathematical society, vol.6, no.2, pp.169–173 (1998).
- [2] H. Yamamoto, T. Akiba, H. Nagatsuka and Y. Moriyama: “Recursive algorithm for the reliability of a connected- $(1, 2)$ -or- $(2, 1)$ -out-of- (m, n) :F lattice system,” European Journal of Operational Research, vol.188, no.3, pp. 854–864 (2008).
- [3] T. Nakamura, H. Yamamoto, T. Shinzato, T. Akiba and X. Xiao: “Reliability of a toroidal connected- $(1, 2)$ -or- $(2, 1)$ -out-of- (m, n) :F lattice system,” Proceedings of the 7th Asia-pacific international symposium on advanced reliability and maintenance modeling, pp. 399–406 (2016).
- [4] 野口恵一, 佐々木正文, 柳繁, 弓削哲史: “監視範囲を考慮したセンサシステムのシステム信頼度,” 電子情報通信学会論文誌, vol.J79-A, no.4, pp.1444–1453 (1996).
- [5] 弓削哲史, 柳繁: “2次元連続 k -out-of- n :F システムの信頼度下限値”, 電子情報通信学会技術研究報告. R, 信頼性, 104(141), pp.1–6 (2004).