数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 73-76

2次元平面上の重み付き準算術平均と効用関数

北九州市立大学 経済学部 吉田祐治
Yuji Yoshida
Faculty of Economics and Business Administration,
University of Kitakyushu

1. はじめに

Yoshida [5] は2次元平面上の重み付き準算術平均を導入している. このでは、 2次元平面上の重み付き準算術平均の観点から 2つの効用関数について risk averse/risk neutral/risk loving 満たすべき条件を議論する.

2. 2次元平面上の重み付き準算術平均

$\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$ とし、 定義域 D を $\mathbb{R}^2$ の空でない開部分集合とし、 $\mathcal{R}(D)$ を D の閉凸部分集合の族とする. $\mathcal{L}$ は C^2 級関数 $f:D\mapsto\mathbb{R}$ の族で $f_x>0$ と $f_y>0$ を満たすとし、 $\mathcal{W}$ は 連続関数 $w:D\mapsto(0,\infty)$ の族とする. 開部分領域 $R\in\mathcal{R}(D)$ 上で、 $f\in\mathcal{L}$ を効用関数とし $w\in\mathcal{W}$ を重みとする準算術平均を領域 R の部分集合 $M_w^f(R)$ で与える:

$$M_w^f(R)=\left\{(\tilde{x},\tilde{y})\in R \mid f(\tilde{x},\tilde{y})\iint_R w(x,y)\,dx\,dy=\iint_R f(x,y)w(x,y)\,dx\,dy\right\}.$$

明らかに, $M_w^f(R)\neq\emptyset$ である.

定義 1. ($\mathbb{R}^2$ 上の半順序 $\preceq$).

(i) $(\underline{x},\underline{y}),(\overline{x},\overline{y})(\in\mathbb{R}^2)$ について, $(\underline{x},\underline{y})\preceq(\overline{x},\overline{y}) \iff \underline{x}\leq\overline{x}$ かつ $\underline{y}\leq\overline{y}$.

(ii) $(\underline{x},\underline{y}),(\overline{x},\overline{y})(\in\mathbb{R}^2)$ について, $(\underline{x},\underline{y})\prec(\overline{x},\overline{y}) \iff (\underline{x},\underline{y})\preceq(\overline{x},\overline{y})$ かつ $(\underline{x},\underline{y})\neq(\overline{x},\overline{y})$.

(iii) $A,B(\subset\mathbb{R}^2)$ について, $A\preceq B \iff$ (a) かつ (b):

(a) $(\underline{x},\underline{y})\in A$ について, $\exists\,(\overline{x},\overline{y})\in B:\ (\underline{x},\underline{y})\preceq(\overline{x},\overline{y})$.

(b) $(\overline{x},\overline{y})\in B$ について, $\exists\,(\underline{x},\underline{y})\in A:\ (\underline{x},\underline{y})\preceq(\overline{x},\overline{y})$.

$w\in\mathcal{W}$ を重み関数とする開部分領域 $R\in\mathcal{R}(D)$ 上の点 $(\overline{x}_R,\overline{y}_R)$ を次のように与える:

$$\overline{x}_R=\iint_R x\,w(x,y)\,dx\,dy\Big/\iint_R w(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\overline{y}_R=\iint_R y\,w(x,y)\,dx\,dy\Big/\iint_R w(x,y)\,dx\,dy.$$

ここでは, $(\overline{x}_R, \overline{y}_R)$ を不変リスク中立点という ([5]). 2次元平面 $\mathbb{R}^2$ を次のように分割する.

$$R_{w,-}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x,y) \prec (\overline{x}_R, \overline{y}_R)\},$$

$$R_{w,+}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\overline{x}_R, \overline{y}_R) \prec (x,y)\}.$$

$R_{w,-}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)}$ は risk averse 点であり、$R_{w,+}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)}$ は risk loving 点である. さらに、$R_{w}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)} = R_{w,-}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)} \cup R_{w,+}^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)} \cup \{(\overline{x}_R, \overline{y}_R)\}$ とおく.

定義 2. 効用関数 $f \in \mathcal{L}$ と領域 $R \in \mathcal{R}(D)$ について、次のように定義する.

(i) 効用関数 f が R 上で risk neutral であるとは、 すべての重み関数 w について

$$f(\overline{x}_R, \overline{y}_R) \iint_R w(x,y)\,dx\,dy = \iint_R f(x,y)w(x,y)\,dx\,dy.$$

(ii) 効用関数 f が R 上で risk averse であるとは、 すべての重み関数 w について

$$f(\overline{x}_R, \overline{y}_R) \iint_R w(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_R f(x,y)w(x,y)\,dx\,dy.$$

(iii) 効用関数 f が R 上で risk loving であるとは、 すべての重み関数 w について

$$f(\overline{x}_R, \overline{y}_R) \iint_R w(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_R f(x,y)w(x,y)\,dx\,dy.$$

定義 3. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について、f が g よりも risk averse とは、 すべての重み関数 w とすべての凸閉領域 $R \in \mathcal{R}(D)$ について 次の式が成り立つときとする.

$$M_w^f(R) \cap R_w^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)} \preceq M_w^g(R) \cap R_w^{(\overline{x}_R,\overline{y}_R)}.$$

定理 1. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について、f が g よりも risk averse ならば すべての正の数 h, k と 実数 $r \in [-1, 1,]$ について D 上で

$$\frac{h^2 f_{xx} + 2rhk f_{xy} + k^2 f_{yy}}{h f_x + k f_y} \leq \frac{h^2 g_{xx} + 2rhk g_{xy} + k^2 g_{yy}}{h g_x + k g_y}$$

が成り立つ.

系 1. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について、f が g よりも risk averse ならば すべての正の数 h, k と 実数 $r \in [-1, 1,]$ について D 上で

$$\frac{f_{xx}}{f_x} \leq \frac{g_{xx}}{g_x} \quad かつ \quad \frac{f_{yy}}{f_y} \leq \frac{g_{yy}}{g_y}$$

が成り立つ.

3. 十分条件

効用関数 $f \in \mathcal{L}$ について, ヘッセ行列を

$$H^f(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in D \tag{3.1}$$

とおく.

命題 1. D 上の効用関数 $f, g \in \mathcal{L}$ について、(i) と (ii) が成り立つ.

(i) 行列

$$\frac{1}{f_x(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{g_x(x,y)} H^g(x,y) \text{ と } \frac{1}{f_y(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{g_y(x,y)} H^g(x,y)$$

がすべての $(x,y) \in D$ について negative semi-definite である $\Longleftrightarrow$ すべての $(x,y) \in D$ とすべての正の数 h,k について

$$\frac{1}{hf_x(x,y) + kf_y(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{hg_x(x,y) + kg_y(x,y)} H^g(x,y)$$

が negative semi-definite である.

(ii) 行列

$$\frac{1}{f_x(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{g_x(x,y)} H^g(x,y) \text{ と } \frac{1}{f_y(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{g_y(x,y)} H^g(x,y)$$

がすべての $(x,y) \in D$ について negative semi-definite ならば、すべての正の数 h,k と 実数 $r \in [-1,1,]$ について D 上で

$$\frac{h^2 f_{xx} + 2rhkf_{xy} + k^2 f_{yy}}{hf_x + kf_y} \leq \frac{h^2 g_{xx} + 2rhkg_{xy} + k^2 g_{yy}}{hg_x + kg_y}$$

が成り立つ.

定理 2. $f, g \in \mathcal{L}$ を D 上の 2 次の効用関数とする. 行列

$$\frac{1}{f_x(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{g_x(x,y)} H^g(x,y) \text{ と } \frac{1}{f_y(x,y)} H^f(x,y) - \frac{1}{g_y(x,y)} H^g(x,y)$$

がすべての $(x,y) \in D$ について negative semi-definite ならば、f が g よりも risk averse である.

例 1. (2 次の効用関数) 定義域 $D = (-0.5, 1.5)^2$ の領域 $R = [0,1]^2$ で重みを $w = 1$ とすると、不変リスク中立点は $(\overline{x}_R, \overline{y}_R) = (0.5, 0.5)$ であり、$R_{w,-}^{(\overline{x}_R, \overline{y}_R)} = [0, 0.5]^2 \setminus \{(0.5, 0.5)\}$、$R_{w,+}^{(\overline{x}_R, \overline{y}_R)} = [0.5, 1]^2 \setminus \{(0.5, 0.5)\}$. 2 次の効用関数 $f(x,y) = -2x^2 - 2y^2 + 2xy + 8x + 8y$ と

$g(x,y) = -x^2 - y^2 + xy + 5x + 5y$ について、R 上で $f_x > 0$, $f_y > 0$, $g_x > 0$, $g_y > 0$ であることがわかる. また、行列

$$\frac{1}{f_x(x,y)}H^f(x,y) - \frac{1}{g_x(x,y)}H^g(x,y) = \frac{1}{-4x+2y+8}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{-2x+y+5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{f_y(x,y)}H^f(x,y) - \frac{1}{g_y(x,y)}H^g(x,y) = \frac{1}{2x-4y+8}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} - \frac{1}{x-2y+5}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

はすべての $(x,y) \in D$ について negative definite であるから、定理2より f が g よりも risk averse である.

References

[1] K.J.Arrow, *Essays in the Theory of Risk-Bearing* (Markham, Chicago, 1971).

[2] G.Gollier, *The Economics of Risk and Time* (MIT Publishers, 2001).

[3] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means and conditional expectations, in: V.Torra, Y.Narukawa and M.Daumas, eds., *Modeling Decisions for Artificial Intelligence - MDAI 2010* Lecture Notes in Artificial Intelligence 6408 (Springer, Oct., 2010), 31-42.

[4] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means and a risk index for stochastic environments, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems (IJUFKS)*, **16, suppl.** (2011) 1-16.

[5] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means on two-dimensional regions and their applications, in: V.Torra and Y.Narukawa, eds., *Modeling Decisions for Artificial Intelligence - MDAI 2015* Lecture Notes in Artificial Intelligence 9321 (Springer, Sept., 2015), 42-53.

[6] Y.Yoshida, Weighted quasi-arithmetic means on two-dimensional regions: An independent case, in: V.Torra and Y.Narukawa, eds., *Modeling Decisions for Artificial Intelligence - MDAI 2016* Lecture Notes in Artificial Intelligence 9880 (Springer, Sept., 2016), 82-93.