数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 257-262

順序距離空間における不動点定理

Fixed Point Theorems in Partially Ordered Metric Spaces

豊田昌史 ‡　渡辺俊一 *
Masashi Toyoda　Toshikazu Watanabe

‡ 東邦大学理学部 274-8510 千葉県船橋市三山 2-2-1
Faculty of Science, Toho University, 2-2-1 Miyama, Funabashi-shi, Chiba, 274-8510, Japan
* 東京情報大学総合情報学部 265-8501 千葉県千葉市若葉区御成台 4-1
Department of Informatics, Faculty of Informatics, Tokyo University of Information Sciences, 4-1 Onaridai, Wakaba-ku, Chiba, 265-8501, Japan

1 はじめに

次は, 距離空間における不動点定理である. (距離空間における不動点定理については [3] を参照されたい.)

定理 1 (縮小写像の不動点定理). (X,d) を完備距離空間とする. T を X から X への写像で, $0\leq r<1$ をみたすある r が存在して, 任意の $x,y\in X$ に対して

$$d(Tx,Ty)\leq rd(x,y) \tag{1}$$

が成り立つとする. このとき T はただひとつの不動点をもつ.

不動点をもつが定理 1 の仮定をみたさない T に, どのようなものがあるのか? 次がある.

例 2. $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像 T を

$$T(x,y)=(x,2x)\quad ((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

で定める. 不動点は $\{(x,2x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ である. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して, 距離 d を

$$d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}$$

で定める. このとき, 定理 1 の不等式は成り立たない. 実際, $|y_1-y_2|<|x_1-x_2|$ かつ $x_1\neq x_2$ となるような $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ に対して $d(T(x_1,y_1),T(x_2,y_2))=d((x_1,2x_1),(x_2,2x_2))=2|x_1-x_2|$, $d((x_1,y_1),(x_2,y_2))=\max\{|x_1-x_2|,|y_1-y_2|\}=|x_1-x_2|$ より

$$d(T(x_1,y_1),T(x_2,y_2))\leq rd((x_1,y_1),(x_2,y_2))$$

をみたすような $r\in[0,1)$ は存在しない.

例 2 の T は任意の x, y に対して不等式 (1) が成り立たない. しかし, 制限した x, y に対しては不等式 (1) が成り立つようにできる. 実際, $\mathbb{R}^2$ 上に順序 $\leq$ を

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2,\ y_1 \leq y_2,\ |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2|$$

で定める ([4, Example 6]). $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ のとき

$$\begin{aligned} d(T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)) &= d((x_1, 2x_1), (x_2, 2x_2)) = |x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2}|y_1 - y_2| \\ &\leq \frac{1}{2}\max\{|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\} = \frac{1}{2}d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \end{aligned}$$

となる. このように, 順序をみたす x, y に制限すれば不等式 (1) が成り立つようにできる.

距離空間に, さらに順序を仮定した空間での不動点定理を考えたい. (X, d) を距離空間とする. X に次をみたす順序 $\leq$ をいれる. (I) $x \in X$ ならば $x \leq x$ である. (II) $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$ である. (III) $x, y, z \in X$ に対して $x \leq y$ かつ $y \leq z$ ならば $x \leq z$ である. このとき $(X, d, \leq)$ を順序距離空間とよぶ. 距離空間が完備であるとき $(X, d, \leq)$ を順序完備距離空間とよぶ. 本稿は, 順序距離空間における不動点定理を扱った論文 [5] および [6] を解説する. 特に, 不動点の一意性について解説する. 例 2 の順序距離空間 $(\mathbb{R}^2, d, \leq)$ における T は不動点 $\{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ をもつがただひとつではない. どのような条件を仮定すれば, 不動点はただひとつとなるであろうか?

2 順序距離空間における Caccioppoli の不動点定理

次は, 距離区間における不動点定理である.

定理 3 (Caccioppoli の不動点定理). (X, d) を完備距離空間とする. T を X から X への写像で, ある非負実数列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ が存在して, 任意の $x, y \in X$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(T^n x, T^n y) \leq r_n d(x, y) \tag{2}$$

が成り立つとする. このとき T はただひとつの不動点定理をもつ.

定理 3 の写像 T は, 定理 1 の写像 T の漸近的 (asymptotic) な場合である. $0 \leq r < 1$ に対して $r_n = r^n$ $(n \in \mathbb{N})$ とするならば, 定理 1 の T は (2) をみたす.

論文 [6] で次の順序距離空間における不動点定理を示した.

定理 4 ([6]). $(X, d, \leq)$ を順序完備距離空間とする. T を X から X への連続写像とする. T は単調非減少とする. すなわち, $x \leq y$ に対して $Tx \leq Ty$ が成り立つ. ある非負実数列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ が存在して $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ であり, 任意の $x \leq y$ をみたす $x, y \in X$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$d(T^n x, T^n y) \leq r_n d(x, y) \tag{3}$$

が成り立つとする. ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ.

例 2 は, 定理 4 の条件をみたす. 実際, T は単調非減少である. $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ とする. このとき

$$T(x_1, y_1) = (x_1, 2x_1) \leq (x_2, 2x_2) = T(x_2, y_2)$$

である. また, $(0,0) = T(0,0)$ である. したがって, 定理 4 より T は不動点をもつ.

不動点の一意性に関して, 次が成り立つ.

定理 5 ([6]). 定理 4 にさらに次を仮定する.

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対してある } z \in X \text{ が存在して } x, y \text{ と比較可能とする.} \tag{4}$$

このとき T の不動点はただひとつである.

$z \leq x$ または $z \geq x$ が成り立つとき, z は x と比較可能であるという. (4) をみたさない場合, 不動点は複数存在する可能性がある. 次の例がある ([4, Example 1]).

例 6 ([4]). $\mathbb{R}^2$ の部分集合 X を $X = \{(1,0), (0,1)\}$ とする. X の要素 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ に対して

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2,\ y_1 \leq y_2$$

と $\leq$ を定める. X の要素 $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ に対して

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

と d を定める. このとき $(X, d, \leq)$ は順序完備距離空間である. X の要素 $(x, y) \in X$ に対して

$$T(x, y) = (x, y)$$

とすると, T は X から X への連続で単調非減少な写像である. $0 \leq r < 1$ とする. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X$ に対して, $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ ならば

$$d(T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)) \leq rd((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

が成り立つ. $(1,0) \leq T(1,0) = (1,0)$ である. $r_n = r^n$ $(n \in \mathbb{N})$ とするならば T は不等式 (3) をみたすので不動点をもつ. 実際, $(1,0)$, $(0,1)$ のふたつが T の不動点である. 一方, X は (4) をみたさない.

3 順序距離空間における Kannan の不動点定理

次は距離空間における不動点定理である.

定理 7 (Kannan の不動点定理). (X, d) を完備距離空間とする. T を X から X への写像で, $0 \leq r < \frac{1}{2}$ をみたすある r が存在して, 任意の $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, Tx) + rd(y, Ty)$$

が成り立つとする. このとき T はただひとつの不動点をもつ.

論文 [5] で, 次の順序距離空間における不動点定理を示した.

定理 8 ([5])**.** $(X, d, \leq)$ を順序完備距離空間とする. T を X から X への連続で単調非減少な写像とする. $0 \leq r < \frac{1}{2}$ をみたすある r が存在して, 任意の $x \leq y$ となる $x, y \in X$ に対して

$$d(Tx, Ty) \leq rd(x, Tx) + rd(y, Ty) \tag{5}$$

が成り立つとする. ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ.

T が連続とは限らない場合も次が成り立つと論文 [5] で示した.

定理 9 ([5])**.** $(X, d, \leq)$ を順序完備距離空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \leq x$ が成り立つとする. T を X から X への単調非減少な写像とする. $0 \leq r < \frac{1}{2}$ をみたすある r が存在して, 任意の $x \leq y$ となる $x, y \in X$ に対して (5) が成り立つとする. ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ.

不動点の一意性に関して, 論文 [5] で次を示した.

定理 10 ([5])**.** 定理 8 または定理 9 にさらに次を仮定する.

$$\text{任意の } x, y \in X \text{ に対してある } z \in X \text{ が存在して } x, y \text{ と比較可能で } z \leq Tz \text{ をみたす.} \tag{6}$$

このとき T の不動点はただひとつである.

その後の研究で, 定理 10 の (6) は弱められるとわかった. 実際, (6) は (4) に置き換えても同じ結論が得られる ([1]).

完全を期するため, 条件 (4) を用いた定理を証明する. (5) の漸近的な場合

$$d(T^n x, T^n y) \leq r_n d(x, Tx) + r_n d(y, Ty). \tag{7}$$

に対して, 不動点の存在と一意性を示す. ここで $r_n \in [0, \infty)$, $n \in \mathbb{N}$ である.

定理 11. $(X, d, \leq)$ を順序完備距離空間とする. T を X から X への連続で単調非減少な写像とする. ある非負実数列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ が存在して $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ かつ $r_1 < 1$ であり, 任意の $x \leq y$ をみたす $x, y \in X$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (7) が成り立つとする. ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \leq Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ. さらに (4) を仮定するならば, T の不動点はただひとつである.

証明. $x_0 \leq Tx_0$ より

$$d(T^2 x_0, Tx_0) \leq r_1 d(T^2 x_0, Tx_0) + r_1 d(Tx_0, x_0)$$

が成り立つ. さらに

$$d(T^2 x_0, Tx_0) \leq \frac{r_1}{1 - r_1} d(Tx_0, x_0)$$

が成り立つ. また, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) &\le r_n d(T^2 x_0, Tx_0) + r_n d(Tx_0, x_0) \\ &\le \frac{r_n r_1}{1-r_1} d(Tx_0, x_0) + r_n d(Tx_0, x_0) \\ &= \frac{r_n}{1-r_1} d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

が成り立つ. $m > n$ に対して

$$\begin{aligned} &d(T^m x_0, T^n x_0) \\ &\quad \le d(T^m x_0, T^{m-1}x_0) + d(T^{m-1}x_0, T^{m-2}x_0) + \cdots + d(T^{n+1}x_0, T^n x_0) \\ &\quad \le \frac{r_{m-1}}{1-r_1} d(Tx_0, x_0) + \frac{r_{m-2}}{1-r_1} d(Tx_0, x_0) + \cdots + \frac{r_n}{1-r_1} d(Tx_0, x_0) \\ &\quad \le \frac{1}{1-r_1} \sum_{i=n}^{\infty} r_i d(Tx_0, x_0) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって $m, n \to \infty$ のとき $d(T^m x_0, T^n x_0) \to 0$ が成り立つ. X は完備なので, ある $p \in X$ が存在して $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = p$ である. T は連続なので $T(T^n x_0) \to Tp$ である. $T^n x_0 \to p$ なので $Tp = p$ を得る.

次に T の不動点の一意性を示す. $q \in X$ が T の他の不動点とする. もし $p \le q$ ならば

$$d(p,q) = d(T^n p, T^n q) \le r_n d(Tp, p) + r_n d(Tq, q)$$

が任意の $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ. $n \to \infty$ のとき $r_n \to 0$ なので $p = q$ である. p が q と比較可能でないとする. このとき, ある $z \in X$ が存在して z は p, q と比較可能である. $p \le z$ かつ $q \le z$ とする. このとき

$$\begin{aligned} d(p,q) &= d(T^n p, T^n q) \\ &\le d(T^n p, T^n z) + d(T^n z, T^n q) \\ &\le r_n(d(Tz, z) + d(Tp, p)) + r_n(d(Tz, z) + d(Tq, q)) \\ &= 2r_n d(Tz, z) + r_n(d(Tp, p) + d(Tq, q)) \end{aligned}$$

である. $n \to \infty$ として, $d(p,q) = 0$ を得る. したがって T の不動点はただひとつである. □

T が連続とは限らない場合も, 次が示せる.

定理 12. $(X, d, \le)$ を順序完備距離空間とする. X の点列 $\{x_n\}$ が x に収束するならば, 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \le x$ が成り立つとする. T を X から X への単調非減少な写像とする. ある非負実数列 $r_1, r_2, r_3, \ldots$ が存在して $\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty$ かつ $r_1 < 1$ であり, 任意の $x \le y$ をみたす $x, y \in X$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (7) が成り立つとする. ある $x_0 \in X$ が存在して $x_0 \le Tx_0$ をみたすとする. このとき T は不動点をもつ. さらに (4) を仮定するならば, T の不動点はただひとつである.

証明. 定理 11 のようにして, ある $p \in X$ が存在して $\lim_{n\to\infty} T^n x_0 = p$ となる. $x_0 \leq Tx_0$ および T が単調非減少であるから

$$x_0 \leq Tx_0 \leq T^2 x_0 \leq \cdots \leq T^n x_0 \leq T^{n+1} x_0 \leq \cdots$$

を得る. $T^n x_0 \to p$ なので, $T^n x_0 \leq p$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して成り立つ. したがって

$$d(Tp, T^{n+1}x_0) \leq r_1 d(Tp, p) + r_1 d(T^{n+1}x_0, T^n x_0)$$

が成り立つ. $n \to \infty$ として

$$d(Tp, p) \leq r_1 d(p, Tp)$$

を得る. $0 \leq r_1 < 1$ より, $d(Tp, p) \leq 0$ である したがって $Tp = p$ である. 定理 11 のようにして, p は一意の不動点と示せる. □

定理 7 とその漸近版の定理との関係は知られている ([2]). 定理 11 や定理 12 と, 定理 8 や 9 との関係は, これからの検討課題である.

参考文献

[1] S. Chandok, M. S. Khan and T. D. Narang, *Fixed point theorem in partially ordered metric spaces for generalized contraction mappings*, Azerbaijan Journal of Mathematics, **5**(2005), 89–96.

[2] H. Dasgupta, S. Chakrabarti and S. Bandyopadhaya, *On Caccioppoli-Kannan type fixed point principle in generalized metric spaces*, International Mathematical Forum, **8**(2013), 1001–1006.

[3] W. A. Kirk, *Contraction mappings and extensions*, Handbook of metric fixed point theory, 1–34, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2001.

[4] J J. Nieto and R. R. López, *Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations*, Order, **22**(2005), 223–239.

[5] M. Toyoda and T. Watanabe, *Kannan mapping theorems in partially ordered sets*, 京都大学数理解析研究所講究録, 1923 (2014), 99–104.

[6] M. Toyoda and T. Watanabe, *Caccioppoli's fixed point theorem in the setting of metric spaces with a partial order*, to appear in the proceedings of the fifth Asian conference on Nonlinear Analysis and Optimization.