数理解析研究所講究録
第2078巻 2018年 263-267

一般的価値関数と一定の下落率を伴う２人タイミングゲーム

大阪府立大学大学院 工学研究科 北條　仁志 (Hitoshi Hohjo)
Graduate School of Engineering, Osaka Prefecture University

1　はじめに

無限ゲームの一種であるタイミングゲームは、1950 年代から精力的に研究されている。古典的成果は Karlin [3] や Dresher [1] を参照するとよい。これらのモデルでは、プレイヤーの価値関数が連続であると仮定され、各プレイヤーがより大きな利得を獲得するような Nash 平衡戦略について議論された。後に各プレイヤーの価値関数が連続である二人タイミングゲームにおいては Nash 平衡の存在性が証明された。1980 年前後には Sakaguchi[5] や Teraoka[9] らによって盛んに研究され、それらのサーベイが Saito ら [4] によって与えられている。

連続な価値関数に対しては Nash 平衡解を容易に導くことができる。しかしながら、不連続点をもつ関数に対しては特殊な問題を除き、それぞれに与えられた問題を解くことで解決しなければならないのが現状である。

本稿では、プレイヤーへの価値関数が一般型で与えられる関数に対して一定の下落率を仮定した二人サイレントゲームにおける混合 Nash 平衡の存在性を示す。本モデルの戦略の形状における特徴は、プレイヤー数、価値関数、下落率、情報様式、および同時行動時における利得設定により影響されることがこれまでの研究により明確化されている。その説明を含め、２節では売り出しのタイミングゲームに関する文献のサーベイを与える。３節では、本モデルを説明し、解析により得られた結果を述べる。最後に４節にて結言と今後の課題を与える。

2　Literature

本研究課題である売り出しのタイミングゲームについては京都大学数理解析研究所での共同研究集会においても数多くの研究発表がなされてきた。その始まりは 2003 年 11 月発表の寺岡・北條 [13]（講究録は翌年に発刊）にさかのぼる。彼らは時間につれて価値が増加し、後手プレイヤーは価値が一定率だけ割り引かれる二人タイミングゲームを提案し、サイレントバージョンとノイジーバージョンでのナッシュ平衡を導いた。このモデルでは、プレイヤーが同時に行動したときに得られる利得は折半すると仮定した。時刻 0 での価値が時刻 1 での割り引かれた値より小さい場合について言及し、サイレントゲームでは時刻 $(a, 1)$ 上での密度関数と時刻 1 での mass から構成される混合戦略による対称的な平衡を導出した。ここで、定数 a は価値関数と割引率から導かれる実数である。また、ノイジーゲームでは、混合戦略による平衡の導出には至っておらず、その存在性については未解決問題のままである。その代わりとして短時間上で一様分布に従う行動をとる対称的な $\epsilon-$ 平衡を導出している。寺岡・北條 [14] では [13] 以外の条件下における問題の求解に取り組んだ。サイレントゲームでは非対象的な平衡の存在を示している点が興味深い。割引後の価値が非常に小さい場合にはサイレントおよびノイジーゲームのいずれにおいても $(0, 0)$ が平衡となることが示された。寺岡・北條 [15] では [13] のモデルを N 人に拡張し、プレイヤーによって生産物が売りに出される度に価値が一定率割り引かれるモデルを提案した。２人ゲームと同様に仮定されたモデルであるが、その解は [13] で導かれた混合戦略の形状とは明らかに異なっている。寺岡・北條 [16] では、同時決定の場合には割引前の価値を採用した N 人ノイジーゲームが展開された。割引が少

ない場合にはその時刻までに行動したプレイヤーの人数に依存して自身の行動時刻を決定する条件付き純戦略による平衡の存在が示されている。寺岡・北條 [17] では、N 人サイレントゲームについての結果を得ている。その後、価値関数の一般化について考察するために、寺岡・北條 [18] は単峰型価値関数をもつ二人サイレントゲームを提案した。寺岡・北條 [19] では同時の利得設定を割引後の価値としてサイレントおよびノイジーゲームを扱った。これ以降の研究では、同時決定における利得は割引後の価値を適用するモデルに焦点を絞っている。単峰型価値関数については N 人サイレントゲームと3人ノイジーゲームが寺岡・北條 [20] および寺岡・林 [12] でも展開されている。これらほとんどのモデルにおいては密度関数のみで構成される混合戦略による対称的な平衡解が導出されている。北條 [22] では価値関数の一般化に向けて双峰型価値関数をもつ2人サイレントゲームとノイジーゲームの解析を行っている。

割引率が一定であるモデル以外にも、様々な仮定の下での売り出しタイミングゲームが提案されている。北條 [21] は価値関数の割引率が一定であるという仮定をより一般化したモデルを提案し、先手の決定に依存した割引率をもつ二人サイレントゲームについて言及した。寺岡 [11] はそのモデルを N 人に拡張している。さらに Hohjo [2] では、後手プレイヤーの価値関数が有限個のシナリオによって確率的に与えられた二人サイレントゲームおよびノイジーゲームにおける Nash 平衡について言及された。いずれのモデルにおいてもサイレントゲームでは混合戦略による平衡解の導出に成功しているものの、ノイジーゲームでは $\epsilon-$ 平衡解の導出に留まっている。

3 タイミングゲーム

3.1 モデル

プレイヤー1、2と呼ぶ寡占状態にある二人のプレイヤーがある生産物を同一市場上で販売する1期間問題を考える。プレイヤーの市場占有率は半分ずつで、競合状態にある。計画期間を $[0,1]$ で表し、次の期には新しい収穫があるため、各プレイヤーはこの期間中の任意の時刻 t に売りに出さなければならない。売り出しは各プレイヤーとも一度限りである。プレイヤーへの利得関数はどのプレイヤーも生産物を売りに出していない限り、区間 $[0,1]$ 上で定義された一般的価値関数 $v(t)$ で与えられている。いずれかのプレイヤーが生産物を売り出すと、市場での商品価値は $rv(t)$ へと不連続的に下落する。ここで、r は $0<r<1$ を満たす実数である。例えば、相手プレイヤーより先に時刻 τ_1 に生産物を売り出すと、そのプレイヤーは利得 $v(\tau_1)$ を得ることができる。その後、他方のプレイヤーが生産物を時刻 τ_2 $(0 \le \tau_1 < \tau_2 \le 1)$ に販売すると、そのプレイヤーは割引された価値 $rv(\tau_2)$ を利得として得る。プレイヤーは価値関数 $v(t)$ や下落率 r に関して既知であり、関数 $v(t)$ は $[0,1]$ 上で連続で、$(0,1)$ 上で微分可能であり、$\lim_{t\to+0} v'(t)>0$ であると仮定する。

各プレイヤーの目的は価値関数の値と相手の売り出し時刻を考慮して、自分の利得が大きくなるタイミングを決定することである。我々はこのゲームについて Nash 平衡を求める。

3.2 定式化

我々はこの問題を単位正方形 $[0,1]\times[0,1]$ 上で定義された2人非0和ゲームとして定式化する。$M_i(x,y)$ をプレイヤー1が純戦略 $x\in[0,1]$ を、プレイヤー2が純戦略 $y\in[0,1]$ を用いたときのプレイヤー $i, i=1,2$ の利得関数とする。また、プレイヤー1や2が混合戦略 (*cdfs*) $F(x), G(y)$ を用

いたときのプレイヤー i への期待利得を以下のように定義する：

$$M_i(x,G)=\int_0^1 M_i(x,y)dG(y);\quad M_i(F,y)=\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)$$

$$M_i(F,G)=\int_0^1\int_0^1 M_i(x,y)dF(x)dG(y)$$

本稿で扱うサイレントゲームでは、プレイヤーが任意の時刻に行動したとしても相手のプレイヤーにその情報は伝達しない。すなわち、両プレイヤーとも相手が既に売りに出したのか、まだ出してないのか分からず、自分が売りに出したときに初めて生産物の価値を知ることが出来る。従って、プレイヤー１が時刻 x に行動し、プレイヤー２が時刻 y に行動したときのプレイヤー１への利得 $M_1(x,y)$ およびプレイヤー２への利得 $M_2(x,y)$ はそれぞれ

$$M_1(x,y)=\begin{cases} v(x), & 0\le x<y \\ rv(x), & y\le x\le 1\end{cases};\qquad M_2(x,y)=\begin{cases} v(y), & 0\le y<x \\ rv(y), & x\le y\le 1\end{cases}$$

によって与えられる。

3.3 平衡解

m, M を $0<M\le 1$ を満たす価値関数 $v(t)$ の最小点および最大点とする。$v(m)\le rv(M)$ の場合を考える。各プレイヤーは純戦略 M を選ぶと割引された価値の中で最大である $rv(M)$ を得ることができるが、戦略対 (M,M) は平衡ではないことが簡単にわかる。なぜなら、１人のプレイヤーが時刻 M から少しでも早く行動すれば $rv(M)$ より大きな利得を得ることができるからである。しかし、プレイヤーがこの戦略を選択すると利得 $rv(M)$ を確保することができるため、期待利得が $rv(M)$ 以上となる戦略に限定して混合戦略のクラスにおける平衡戦略について探究する。

我々はこの問題に対して次のような結果を得た。定理の証明は北條 [22] のサイレントゲームにおける結果と同様にして得られる。

定理． $v(m)\le rv(M)$ と仮定する。a_1 を $v'(a_1)>0$ を満たす方程式 $v(a_1)=rv(M)$ の最小の根とする。$m_i,\ i=1,\dots,k$ を $a_i<m_i$ を満たす最小の極大点とする。ここで、k は $m_k=M$ を満たす添え字の番号である。$a_i,\ i=2,\dots,k$ を $v'(a_i)>0$ および $m_{i-1}<a_i$ を満たす方程式 $v(a_i)=v(m_{i-1})$ の最小の根とする。今、次のような混合戦略 $F(t)$ を考える。

$$F(t)=\begin{cases} 0, & 0\le t\le a_1 \\ \frac{1}{1-r}\left[1-\frac{v(a_1)}{v(t)}\right], & a_1<t\le m_1 \\ \frac{1}{1-r}\left[1-\frac{\prod_{i=1}^{j} v(a_i)}{\prod_{i=1}^{j} v(m_i)}\right], & m_j<t\le a_{j+1}, j=1,\dots,k-1 \\ \frac{1}{1-r}\left[1-\frac{\prod_{i=1}^{j} v(a_i)}{\prod_{i=1}^{j-1} v(m_i)v(t)}\right], & a_j<t\le m_j, j=2,\dots,k \\ 1, & m_k<t\le 1\end{cases}$$

このとき、混合戦略の組 (F,F) は１つのナッシュ平衡点を構成する。この戦略に対応するプレイヤー１、２の期待利得は

$$v_i=M_i(F,F)=rv(M),\quad i=1,2 \tag{1}$$

となる。

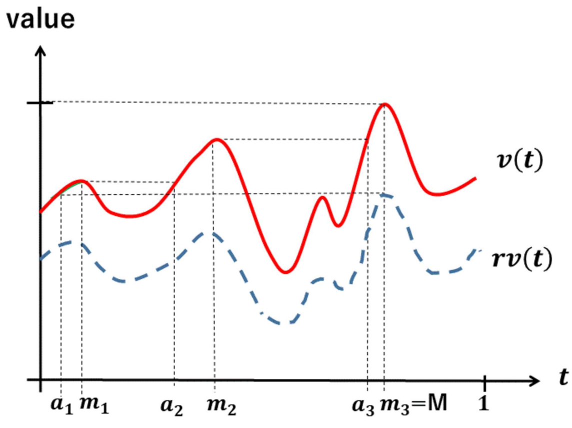

図 1: 価値関数

4 結言

本稿では、時刻 0 において価値関数が増加から始まるような一般的価値関数による一定下落率をもつ２人サイレントタイミングゲームを提案し、価値関数の最小値が最大値の割り引かれた値より小さいもしくは等しい場合についての Nash 平衡対について議論した。時刻 0 以外で最大値をもつ一般的価値関数に対して一組の平衡解を導くことにより、本モデルに対する平衡点の存在性を示した。時刻 0 において価値関数が減少から始まる場合には、時刻 0 を選ぶ可能性が残されているため、本結果として得られた混合戦略の形に時刻 0 での mass を加えるような新たな混合戦略について考える必要がある。また、本モデルのサイレントゲームにおいて価値の割引が非常に大きい場合やノイジーゲーム、サイレント・ノイジーゲームなどの解析も興味深く、今後の課題とする。

参考文献

[1] Dreshcr,M., Gamcs of Strategy: Theory and Applications, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Ncw Jcrsey, 1954.

[2] Hohjo,H., A Timing Game with Uncertain Value Function to the Follower, Proceedings of the 8th International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis, Hirosaki, Japan, 119-130 (2013).

[3] Karlin,S., Mathematical Method and Theory in Games, Programming, and Economics, Vol.2, Addison-Wesley, Massachusetts, 1959.

[4] Saito,Y., T.Dohi, Stochastic Marksmanship Contest Games with Random Termination - Survey and Applications, Journal of the Operations Research Society of Japan, 58(3), 223-246 (2015).

[5] Sakaguchi,M., Marksmanship contests-nonzero sum game of timing, Mathematica Japonica, 22, 585-596 (1978).

[6] Teraoka,Y., H.Hohjo, Two person games of timing on sale, Proceedings of International Workshop on Recent Advances in Stochastic Operations Research, Canmore, 281-288 (2005 Aug).

[7] Teraoka,Y., H.Hohjo, Two person games on sale in which the price fluctuates with time, Scientiae Mathematicae Japonicae, 69 (1), 101-109 (2009).

[8] Teraoka,Y., N person silent games on sale in which the price is a unimodal function with time, Scientiae Mathematicae Japonicae, 70, 461-466 (2009).

[9] Teraoka,Y., A two-person game of timing with random termination, Journal of Optimization Theory and Applicaitons, 40(3), 379-396 (1983).

[10] 寺岡, 無限ゲームをめぐって, 京都大学数理解析研究所講究録 1559,163-176(2007).

[11] 寺岡, 割引率が経過時間に依存する売り出しの n 人タイミングゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1734, 244-250 (2011).

[12] 寺岡, 林, 3人売り出しのタイミング・ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1589, 130-136 (2008).

[13] 寺岡, 北條, 売り出しのタイミングゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1373, 59-64 (2004).

[14] 寺岡, 北條, 売り出しのタイミング・ゲームと Nash 平衡, 京都大学数理解析研究所講究録 1383, 1-8 (2004).

[15] 寺岡, 北條, N 人売り出しのタイミング・ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1457, 163-170 (2004).

[16] 寺岡, 北條, N 人売り出しのノイジー・ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1477, 174-177 (2006).

[17] 寺岡, 北條, N-Person Game of Timing on Sale - Silent Case, 京都大学数理解析研究所講究録 1504, 105-109 (2006).

[18] 寺岡, 北條, 価値が変動する2人売り出しのサイレント・ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1526, 96-101 (2006).

[19] 寺岡, 北條, 価値が変動する2人売り出しのノイジー・ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1548, 138-145 (2007).

[20] 寺岡, 北條, N 人売り出しのサイレント・ゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 1559, 50-55 (2007).

[21] 北條, 時刻に依存した割引率をもつ2人売り出しサイレント・ゲーム, 国際数理科学協会 2009 年度年会「確率モデルと最適化」部会, 神戸大学, Aug 12 (2009).

[22] 北條, 一定下落率を伴う双峰型関数上での二人タイミングゲーム, 京都大学数理解析研究所講究録 2044, 13-23 (2017).