数理解析研究所講究録
第2083巻 2018年 61-75

フローチャートを用いた逆命題の作成と問題づくり

南山大学大学院・理工学研究科 久間 一輝
Kazuki Kuma
Graduate School of Science and Engineering,
Nanzan University

南山大学・理工学部 佐々木克巳
Katsumi Sasaki
Faculty of Science and Engineering,
Nanzan University

要旨
本稿は，フローチャートをもとに逆命題を作成する手法を提案し，その手法の問題づくりにおける効果を例証する．

1 はじめに

本稿は，逆命題をもとにした問題づくりを扱う．先行研究では，たとえば，庄司[1]は，逆命題を，N 個の仮定と N 個の結論を入れかえて作成し，そうしてできるすべての逆命題を考察している．[1]では，対象とする仮定を適切に選択する必要性(対象としない大前提を適切に選択する必要性)も述べている．また，藤城・佐々木[2]は，入れかえの対象を，線分の長さ，角の大きさに絞ることで，効率性を意識した逆命題を作成しようとしているが，その手法が効率的であるかどうかは述べていない．本稿では，フローチャートに注目し，それをもとに逆命題を作成する手法を提案する．また，問題づくりを意識したとき，この手法には，[2]とは別の視点の複数の効果が期待されるが，それら効果を具体例をとおして示す．

以下の 2 節では，提案する手法とそれによる効果を述べる．4 節と 5 節では，それぞれ，具体的な 1 つの問題に本研究の手法を適用し，その効果を例証する．3 節は，4 節と 5 節で既知として用いる性質を挙げる．

2 提案する手法とその効果

この節では，逆命題をもとに問題を作成する 1 つの手法を示し，その手法の効果を述べる．

本研究で用いる手法は，次の手順に基づく手法である．

手順 2.1.

Step 1. フローチャートを用いて，もとの命題の証明の筋道を明らかにする．

Step 2. Step 1 の筋道から，逆命題を作る際の入れかえの対象となる仮定と結論を適切に選定し，それに基づいて逆命題をつくる．

Step 3. Step2 で選定した仮定と結論を入れかえた逆命題に対し，その証明可能性を，フローチャートから明らかにし，証明不可能であればその逆命題の反例を挙げる．

Step 4. Step 3 の逆命題が証明可能であれば，その逆命題を証明する問題の適切な日本語表現を与える．

フローチャートは，step 1, step 3 に現れており，step 1 の筋道がフローチャートで表現されていることから，step 2 でも用いられている．

本研究で主張するフローチャートの効果は次のとおりである．以後，n 個の条件 P1,…,Pn から条件 P を導く命題を P1,…,Pn⇒P と表す．

効果 2.2.

(1) 手順 2.1 step 2 における選定を，適切かつ効率的に行える．

(2) 手順 2.1 step 3 の証明可能性の判断を，効率的に行える．

(3) もとの命題の証明に用いられている各性質に対し，その性質(と対等な性質)の用いる位置を変えた証明問題の作成を目指して，効率的に手順を進められる．

(4) もとの命題の証明に用いられている各性質に対し，その性質の逆命題を用いる証明問題の作成を目指して，効率的に手順を進められる．

(5) 複数の証明方法を同時に考察できる．

上の効果の理由を以下に示す．より具体的には，4 節と 5 節の例で示す．

(1) たとえば，もとの証明問題が，P⇒Q を導く問題で，そのフローチャートが図 2.1 で与えられた場合について考える．ふつうに逆命題をとると Q⇒P であるが，フローチャートからは，もとの命題を P1,P2⇒Q としてとらえて，2 つの逆命題 Q,P2⇒P1 と P1,Q⇒P2 を考えることができる．選択肢が増えたことで，目的に応じた選択を行

いやすくなる．また，フローチャートに表現したことで，隠れていた P1 と P2 を入れかえの候補に効率的に加えることができている．

P→P1──┬→P3→. . . →Q
P→P2──┘

図 2.1. 効果 2.2(1)の理由の図

(2) 前述の 2 つの逆命題 Q,P2⇒P1 と P1,Q⇒P2 の証明可能性を考える．前者の Q,P2⇒P1 が図 2.2 のように証明できると，後者 P1,Q⇒P2 の証明は，P3,P1⇒P2 が証明可能であれば完成する．Q⇒P3 は，前者の証明を流用すればよいからである．この流用は，フローチャートをかくことによって効率的に気づくことができる．

P1←─┬←P3←. . . ←Q
P2→─┘

図 2.2. 効果 2.2(2)の理由の図

(3) P1,P2,P4⇒Q が図 2.3 のフローチャートで証明できて，P1,P2,P3 が与えられた 2 つの三角形における次の条件である場合を考える．

P1: 対応する 2 組の辺がそれぞれ等しい

P2: P1 の 2 辺の間の角が等しい

P3: P1 以外の対応する 1 組の辺が等しい

このとき，図 2.3 の証明問題は，「合同な図形に関する性質」を最初に用いる証明になり，逆命題の 1 つである P1,Q,P4⇒P2 が図 2.4 のように証明可能であれば，「合同な図形に関する性質」を最後に用いる証明になる．一方，別の逆命題 P1,P2,Q⇒P4 が図 2.5 のように証明可能であったとしても，「合同な図形に関する性質」を用いる位置は，もとの命題の証明と同じである．つまり，最初の逆命題の証明問題では，用いる位置が変わるが，第 2 の逆命題では変わらない．この事実は，フローチャートをかけば明らかであるが，フローチャートがない状態では，実際に証明してみて初めてわかることも少なくないだろう．この意味で，フローチャートが(3)の効率性を高めていることがわかる．

上の性質の位置が問題づくりに与える影響も示しておく．牧野[3]では，未完成な証明が生成されるときの「ディスコース拡張」の特徴を明らかにすることを目的に調査を行ったが，その結果から，仮定と結論の両方に注目した生徒が，仮定のみに注目した生徒よりも達成度が高いことがわかる．中学校第 2 学年では，「合同な図形に関する性質」を鍵として証明を構想することが多く，この性質を用いる位置が結論に近いほど問題は難しくなるといえる．

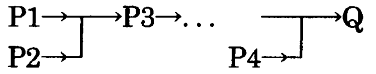

図 2.3. 効果 2.2(3)の理由の図 1

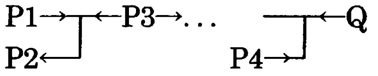

図 2.4. 効果 2.2(3)の理由の図 2

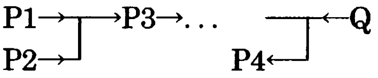

図 2.5. 効果 2.2(3)の理由の図 3

(4) P1,P2,P3 を(3)と同様に与える場合を考える．図 2.3 では，性質「対応する 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しければ，残りの 1 組の辺も等しい」を用いているが，この逆命題の 1 つである，「対応する 3 組の辺が等しければ，対応する 1 組の角が等しい」を用いる問題を作成するには，その逆命題の筋道に合わせて，図 2.3 の矢印の向きを変えて，図 2.4 の筋道となるようすればよい．つまり，P2 と Q を入れかえればよい．図 2.6 の場合も同様に考えると P6 と Q を入れかえればよい．しかし，図 2.6 の場合は，フローチャートなしに，P6 を見つけるのは困難と考える．P2 と P6 の関係は，フローチャートなしには，気づきにくいからである．

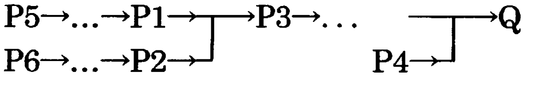

図 2.6. 効果 2.2(4)の理由の図

(5) 証明方法毎のフローチャートに共通部分がある場合には，その共通部分を逆にたどれるかを，一度に考察することができる．

3　既知として用いる性質

この節では，次の 4 節以降で既知として用いる性質を挙げる．まず，中学校第 3 学年までに学ぶ図形の性質は既知とする．たとえば，次は既知となる．

性質 3.1(SSS). 2 つの三角形は，3 組の辺がそれぞれ等しいとき合同である．

性質 3.2(SAS). 2 つの三角形は，2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいとき合同である．

性質 3.3(ASA). 2 つの三角形は，1 組の辺とその両端の角がそれぞれ等しいとき合同である.

加えて，次の性質も既知として用いる．性質 3.6 は性質 3.5 の証明に用いる.

性質 3.4(SAA). 2 つの三角形は，1 組の辺と対応する 2 組の角がそれぞれ等しいとき，合同である(図 3.1 参照).

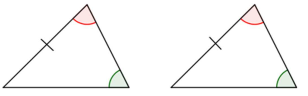

図 3.1. 性質 3.4 の図形

性質 3.5(SSA). 2 つの三角形は，対応する 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しく，その 2 組の辺のうち，その 1 組の角の対辺が隣辺より長いとき，合同である(図 3.2 参照).

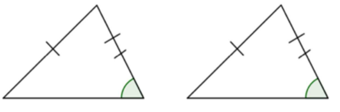

図 3.2. 性質 3.5 の図形

性質 3.6(SSA). 2 つの三角形は，対応する 2 組の辺とその間にない 1 組の角がそれぞれ等しく，その間にない残り 1 組の角が鋭角同士または鈍角同士であるとき，合同である.

性質 3.7. 図 3.3 において，点 E は AD と BC の交点である．このとき，以下がいえる.

(1) $\angle EBA = \alpha, \angle EAB = \angle ECD \Rightarrow \angle EDC = \alpha$

(2) $\angle EBA = \angle EDC = \alpha \Rightarrow \angle EAB = \angle ECD$

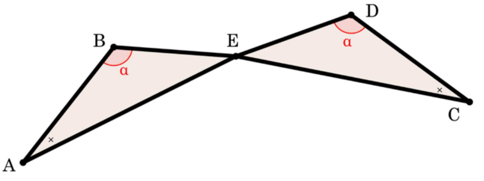

図 3.3. 性質 3.7 の図形

4　具体例 1

この節では，次の問題 4.1 に対して，2 節で提案した手法を適用し，効果 2.2 を確認する．問題 4.1 は，間宮・山腰[4]から抽出した問題である．

問題 4.1. 図 4.1 のように，AB=AC,AB>BC である二等辺三角形 ABC がある．頂点 C を中心として,辺 BC が辺 AC と重なるまで△ABC を回転させて作った三角形を△DEC とする.また,頂点 B と点 E を結んだ線分 BE の延長線上に点 F をとる．このとき,∠AEF=∠DEF であることを証明しなさい.

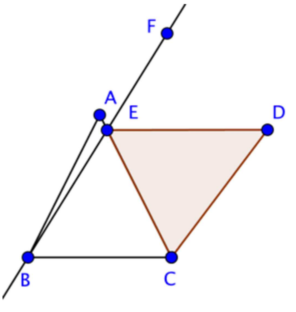

図 4.1. 対象とする問題の図[4]

まず，手順 2.1 の step 1，すなわち，フローチャートを用いて，証明の筋道を明らかにする．そのために，条件を整理すると，次の A1,⋯,A5 が仮定で，G が結論となる．

A1. AB=AC

A2. △ABC≡△DEC

A3. AB > BC

A4. E は直線 AC 上にある.

A5. D は直線 AC に関して B と反対側にある.

G. ∠AEF=∠DEF

本研究では，図 4.1 の位置関係は大前提と考える(つまり，A3, A4, A5 を大前提と考える). すると，問題 4.1 で対象とする命題は

(命題 4.1) A1, A2⇒ G

となる．このフローチャートを図 4.2 に示す.

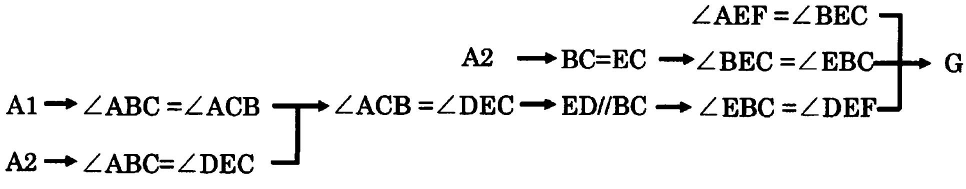

図 4.2. 命題 4.1 のフローチャート 1

次に，手順 2.1 の step 2，すなわち，図 4.2 の筋道から，逆命題を作る際の入れかえの対象となる仮定と結論を適切に選定し，それに基づいて逆命題をつくる．図 4.2 から，入れかえの対象となる条件の候補は，A1, A2, G である．ここで，図 4.2 から，A1 と G を入れかえた逆命題は，成り立つことが推測できるが，A2 と G を入れかえた逆命題は，成り立ちそうにないことが推測できる．図 4.2 では，A2 から 2 つの条件

A2-1. ∠ABC=∠DEC

A2-2. BC=EC

を導いているが，この 2 条件から A2 は導かれないからである．したがって，証明問題を作ることを考えるのであれば，A2 でなく，A2-1, A2-2 を入れかえの対象とした方がよい．このことから本研究では，A1, A2-1, A2-2, G を入れかえの対象とする．A2-1, A2-2 を仮定としてフローチャートをかきなおすと図 4.3 のようになる.

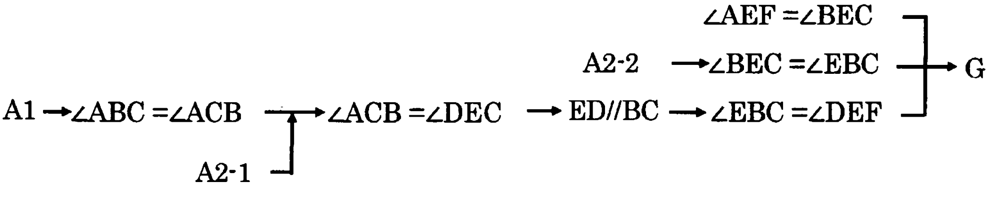

図 4.3. 命題 4.1 のフローチャート 2

結果として，逆命題は次の 3 つとなる.

(逆命題 4.1) A2-1, A2-2, G ⇒ A1

(逆命題 4.2) A2-1, A2-2, G ⇒ A2-1

(逆命題 4.3) A1, A2-1 ,G ⇒ A2-2

ここで，効果 2.2 を確認する.

・図 4.2 より，A2 を，A2-1 と A2-2 に分解し，入れかえの対象となる条件を適切に選定できた．また，後述するが，できた逆命題は証明可能である．このことからも選定の適切性がいえる(効果 2.2(1)).

手順 2.1 の step 3, すなわち, (逆命題 4.1), (逆命題 4.2), (逆命題 4.3)の証明可能性を，フローチャートから明らかにし，証明不可能であればその逆命題の反例を挙げる.

その証明可能性は，図 4.3 の各矢印の逆が成立すればいえる($\left.\begin{matrix}P\\Q\end{matrix}\right]\to R$ のような矢印の逆は， $\left.\begin{matrix}P\\R\end{matrix}\right]\to Q$ と $\left.\begin{matrix}Q\\R\end{matrix}\right]\to P$ と考える)．結果，どの矢印に対してもすべての逆が成立するので，3 つの逆命題はすべて証明可能であり，それらを示すフローチャートは以下のとおりである.

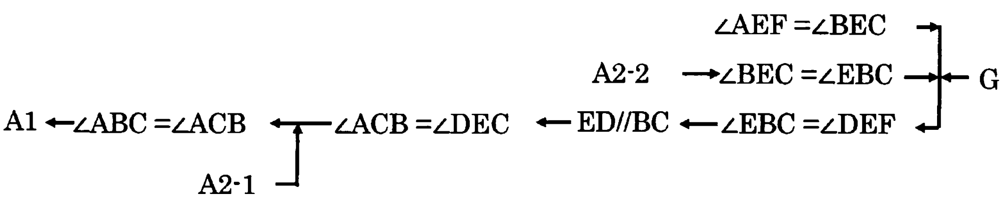

図 4.4. (逆命題 4.1)のフローチャート

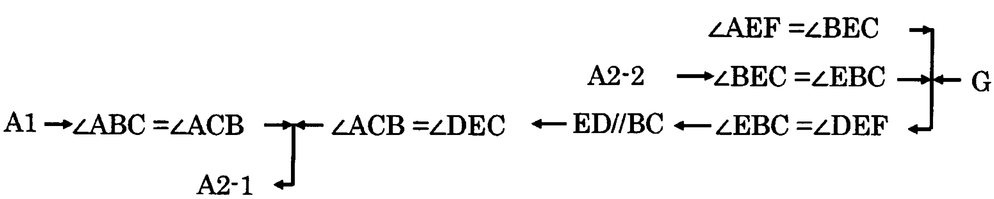

図 4.5. (逆命題 4.2)のフローチャート

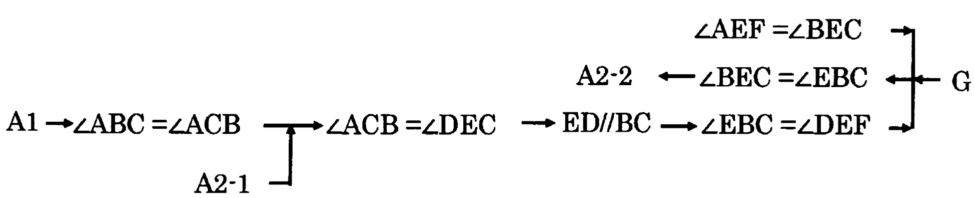

図 4.6. (逆命題 4.3)のフローチャート

ここで，効果 2.2 を確認する．

・図 4.3 の各矢印の逆を考察することで，証明可能性の判断を効率的に行うことができた(効果 2.2(2))

最後に，手順 2.1 の step 4，すなわち，この節の 3 つの逆命題を証明する問題の適切な日本語表現を与える．具体的には，以下のとおりである．

問題 4.2. 図 4.1 のように, AB>BC である三角形 ABC がある．また, 辺 AC 上に BC=CE となる点 E をとり，頂点 B と点 E を結んだ線分 BE の延長線上に点 F をとる．さらに，∠AEF=∠DEF となる点 D をとる．∠ABC=∠DEC のとき，AB=AC であることを証明しなさい．

問題 4.3. 図 4.1 のように，AB=AC,AB>BC である二等辺三角形 ABC がある．また，辺 AC 上に BC=CE となる点 E をとり，頂点 B と点 E を結んだ線分 BE の延長線上に点 F をとる．さらに，∠AEF=∠DEF となる点 D をとる．このとき，∠ABC=∠DEC であることを証明しなさい．

問題 4.4. 図 4.1 のように，AB=AC,AB>BC である二等辺三角形 ABC がある．また，辺 AC 上に点 E をとり，頂点 B と点 E を結んだ線分 BE の延長線上に点 F をとる．さらに，∠AEF=∠DEF となる点 D をとる．∠ABC=∠DEC のとき，BC=EC であることを証明しなさい．

上のように，問題が作成できたことから効果 2.2 の根拠づけが強まると考える．なお，問題 4.2 と問題 4.4 は∠ABC=∠DEC をみたす保証がないことから，問題としては，不自然さが残る形になっている．

5　具体例 2

この節では，次の問題 5.1 に対して，2 節で提案した手法を適用し，効果 2.2 を確認する．問題 5.1 は，間宮・山腰[4]から抽出した問題を一般化したものである．

問題 5.1. AB=AE である二等辺三角形 ABE と AC=AD である二等辺三角形 ACD があり，AB>AD, ∠BAE=∠CAD である. DB と CE の交点を F とし，$\overrightarrow{DB}$ と $\overrightarrow{CE}$ のなす

角を α とする．このとき，∠BAE=∠CAD= α を証明しなさい(∠BAE(=∠CAD)が約 90°のときの図は図 5.1.1 のとおりである).

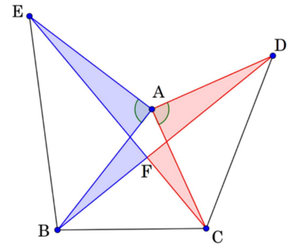

図 5.1. 対象とする問題の図[4]

まず，手順 2.1 の step 1，すなわち，フローチャートを用いて，証明の筋道を明らかにする．そのために，条件を整理すると，次の A0,⋯,A4 が仮定で，G1 と G2 が結論となる．

A0. $\overrightarrow{DB}$ と $\overrightarrow{CE}$ のなす角は α である

A1. AB=AE

A2. AC=AD

A3. ∠BAE=∠CAD

A4. AB > AD

G1. ∠BAE= α

G2. ∠CAD= α

本研究では，各フローチャートにおける記号⋈は，性質 3.7 を用いることを示している．また，A4 を大前提と考える．すると，問題 5.1 で対象とする命題は

(命題 5.1) A0, A1, A2, A3 ⇒ G1&G2

となる．このフローチャートを図 5.2 に示す．

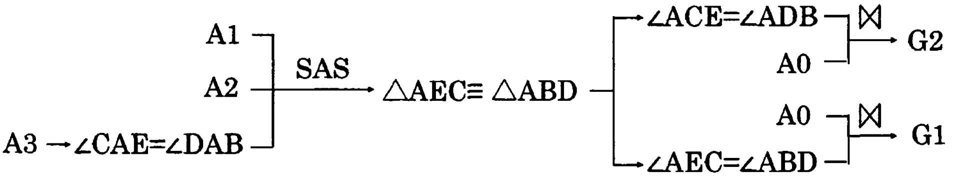

図 5.2. 命題 5.1 のフローチャート

次に，手順 2.1 の step 2，すなわち，図 4.2 の筋道から，逆命題を作る際の入れかえの対象となる仮定と結論を適切に選定し，それに基づいて逆命題をつくる．図 5.2 から，入れかえの対象となる条件の候補は，A0, A1, A2, A3, G1, G2 である．ここで，図 5.2 より，A0 と G1 の入れかえた逆命題および A0 と G2 の入れかえた逆命題は，もとの命題とほぼ同じ手順で証明可能とわかるので，以降の対象から外す．

結果として，逆命題は次の 6 つである．

(逆命題 5.1) A2, A3, G2 ⇒ A1&G1

(逆命題 5.2) A2, A3, G1 ⇒ A1&G2

(逆命題 5.3) A1, A3, G2 ⇒ A2&G1

(逆命題 5.4) A1, A3, G1 ⇒ A2&G2

(逆命題 5.5) A1, A2, G2 ⇒ A3&G1

(逆命題 5.6) A1, A2, G1 ⇒ A3&G2

ここで，効果 2.2 を確認する．

・図 5.2 より，A0 と G1 の入れかえた逆命題および A0 と G2 の入れかえた逆命題は，命題 5.1 とほぼ同じ手順で証明可能とわかる(効果 2.2(2))．

手順 2.1 の step 3，すなわち，上の 6 つの逆命題の証明可能性を，フローチャートから明らかにし，証明不可能であればその逆命題の反例を挙げる．

ここで，(逆命題 5.6)は証明不可であり,それ以外は証明可能である．それらを示すフローチャートおよび反例は以下のとおりである．(逆命題 5.1), (逆命題 5.3)は，仮定に A3 と G2 があるので，G1 が導かれるのは明らかである．よって，そのフローチャートは省略する．(逆命題 5.2), (逆命題 5.4)についても同様である．また，(逆命題 5.5)のフローチャートは，性質 3.5(SSA)を用いるときに A4 を用いているが，そのことを明記している．

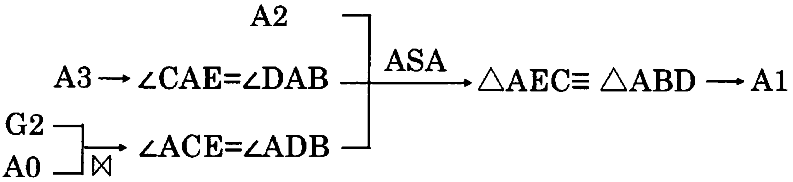

図 5.3. 逆命題 5.1 のフローチャート 1

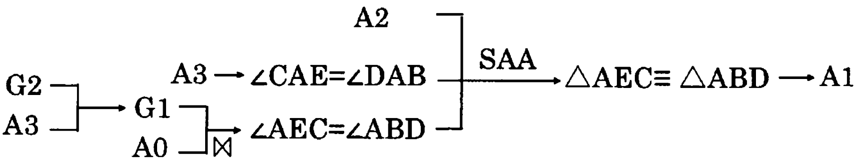

図 5.4. 逆命題 5.1 のフローチャート 2

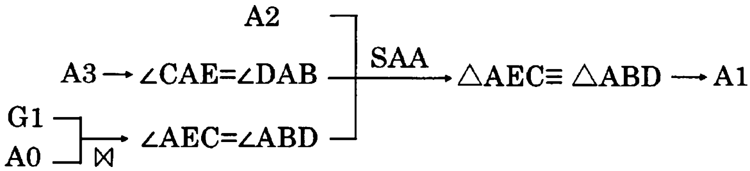

図 5.5. 逆命題 5.2 のフローチャート 1

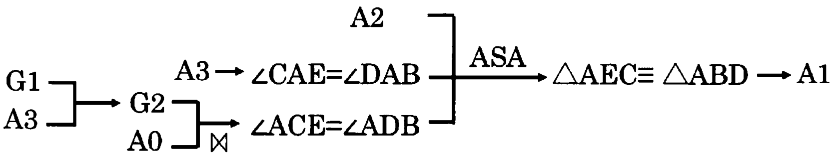

図 5.6. 逆命題 5.2 のフローチャート 2

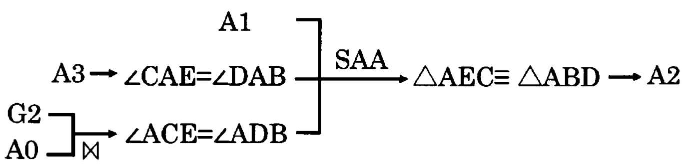

図 5.7. 逆命題 5.3 のフローチャート 1

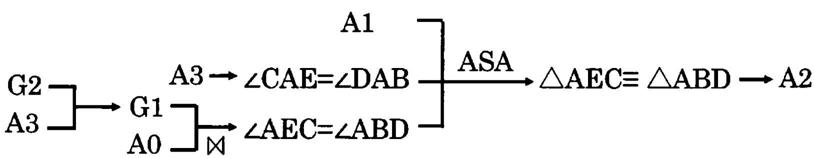

図 5.8. 逆命題 5.3 のフローチャート 2

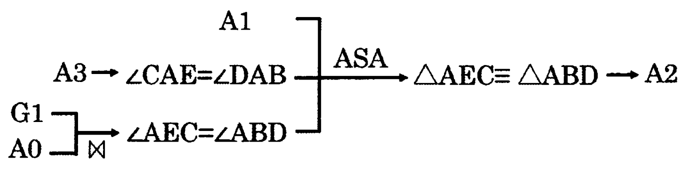

図 5.9. 逆命題 5.4 のフローチャート 1

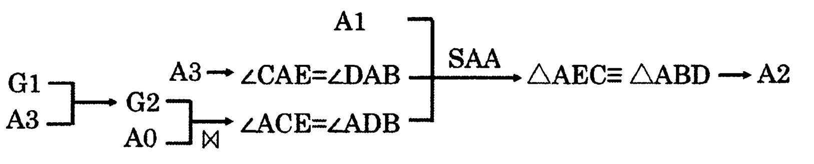

図 5.10. 逆命題 5.4 のフローチャート 2

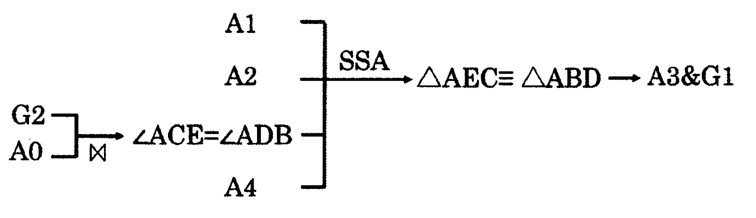

図 5.11. 逆命題 5.5 のフローチャート

(逆命題 5.6)は反例が 1 つある．具体的には，図 5.12 に示す．

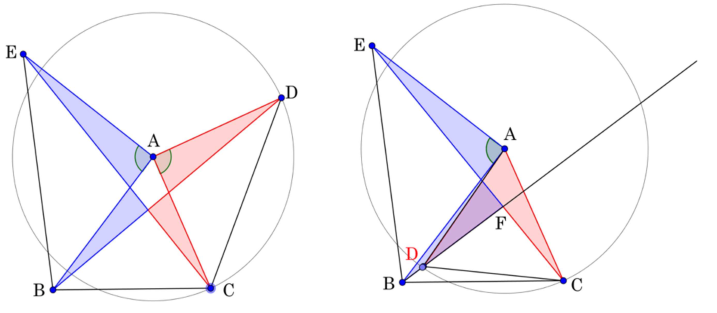

図 5.12. 図 5.1 (左)とその反例(右)

ここで，効果 2.2 を確認する．

・図 5.2 の各矢印の逆を考察することで，証明可能性の判断を効率的に行うことができた(効果 2.2(2))．

・図 5.2 より，合同条件を後半に用いる問題を作りたいときは，A1,A2,A3 のいずれかを導く逆命題を作ればよいとわかる(この問題では 5 つすべてが該当する)(効果 2.2(3))．

・図 5.2 より，SAA を用いる問題を作りたいときは，A2,A3,G1 から A1，または A1,A3,G2 から A2 を導く逆命題を作ればよいとわかる．同様に，ASA,SSA を用いる問題を作りたいときの条件もわかる(効果 2.2(4))．

・図 5.3 と図 5.4 など，複数の解法を同時に考察することができている(効果 2.2(5))．

最後に，手順 2.1 の step 4，すなわち，(逆命題 5.6)以外の 5 つの逆命題を証明する問題の適切な日本語表現を与える．具体的には，(逆命題 5.1), (逆命題 5.3), (逆命題 5.5)に対する日本語表現を与える．(逆命題 5.2), (逆命題 5.4)はそれぞれ(逆命題 5.1), (逆命題 5.3)と同様になるからである．

問題 5.2. 図 5.1 のように，△ABE と AC=AD である二等辺三角形 ACD があり，BD と CE の交点を F とする．∠BFE = ∠BAE = ∠CAD のとき，AB=AE を証明しなさい．

問題 5.3. 図 5.1 のように，△ACD と AB=AE である二等辺三角形 ABE があり，BD と CE の交点を F とする．∠BFE = ∠BAE = ∠CAD のとき，AC=AD を証明しなさい．

問題 5.4. 図 5.1 のように，AB=AE である二等辺三角形 ABE と AC=AD である二等辺三角形 ACD があり，BD と CE の交点を F とする．∠BFE=∠CAD のとき，∠BAE=∠CAD であることを証明しなさい．

上のように，問題が作成できたことから，効果 2.2 の根拠づけが強まると考える．Step3 で述べたとおり，問題 5.2, 問題 5.3, 問題 5.4 は，それぞれ ASA, SAA, SSA を用いる証明問題である．

参考文献

[1] 庄司貞夫，「中等教育数学科における図形の論証指導に関する研究」，第 41 回数学教育論文発表会論文集，日本数学教育学会, 2008, pp. 531-536.

[2] 藤城佳高, 佐々木克巳, 「成立しない逆命題から成立する同値命題を作る考え方とその考察」, 南山大学大学院理工学研究科システム数理専攻 2015 年度修士論文, 2016.
[3] 牧野智彦, 「未完成な証明の生成過程での「ディスコースの拡張」の特徴：ペアによる図形の証明問題の解決過程の分析を通して」, 日本数学教育学会誌第 99 巻数学教育学論究臨時増刊, 日本数学教育学会, 2017, pp. 49-56
[4] 間宮勝己, 山腰政喜, 『最高水準特進問題集 数学中学 2 年』. 文英堂, 東京, 2012.