（ 続紙　1 ）

京都大学	博士（理　学）	氏名	佐野　薫
論文題目	Growth rate of height functions associated with ample divisors and its applications		

（論文内容の要旨）

代数多様体の有理点は数論における基本的な研究対象である．有理点の数論的な複雑さを測る量として，有理点集合上に定義される高さ関数がある．高さ関数の性質を調べることで，代数多様体の有理点の性質や分布を調べることができる．例えばアーベル多様体上の有理点のなす群が有限生成であるという Mordell-Weil の定理は，高さ関数の性質を用いて証明される．しかし，古典的に研究されているアーベル多様体の場合を除くと，代数多様体上の高さ関数の性質については，まだ分かっていないことも多い．

川口-Silverman は，高さ関数の増大度を表す不変量として算術次数を導入した．これは次のように定義される．X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上定義された射影的な代数多様体とし，$f\colon X \dashrightarrow X$ を自己有理写像とする．$P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ を X の有理点とし，$f^n(P)$ が全ての n で定義されているものとする．H を X 上の豊富な因子とし，H に伴う高さ関数を $h_H\colon X(\overline{\mathbb{Q}}) \to \mathbb{R}$ とおく．極限

$$\alpha_f(P) := \lim_{n\to\infty} (\max\{1,\, h_H(f^n(P))\})^{1/n}$$

が存在するとき，$\alpha_f(P)$ を P の f に関する算術次数という．

算術次数について，川口-Silverman は次の予想を提出した（川口-Silverman 予想）．

- 軌道 $\{f^n(P)\}_n$ が定義される任意の有理点 $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し，算術次数 $\alpha_f(P)$ は収束する．
- 軌道 $\{f^n(P)\}_n$ が Zariski 稠密であれば，算術次数 $\alpha_f(P)$ は (第一) 力学系次数と一致する．

この予想は，有理点の数論的な複雑さから定義される算術次数が，位相的な不変量である力学系次数と一致するというものであり，数論的力学系の研究において重要である．川口-Silverman により，この予想は，X がアーベル多様体の場合，X が代数的トーラスで f が自己準同型の場合，X が滑らかな代数曲面で f が自己同型の場合，f が自己射で X のピカール数が 1 の場合等に証明されていた．しかし，X が 2 次元以上で f が自己同型でない自己有理写像の場合は，川口-Silverman 予想が成り立つ例はほとんど知られていなかった．

佐野氏は，代数多様体の自己射と高さ関数の性質を詳細に研究することで，X が滑らかな曲面で f が自己全射の場合（柴田氏，松澤氏との共同研究）や，X が準アーベル多様体で f が自己全射の場合（松澤氏との共同研究）等について，川口-Silverman 予想を解決した．

X が滑らかな曲面で f が自己全射の場合の証明の概略は，以下の通りである．曲面の分類理論（Enriques-小平の分類）を用いて，個々の場合について個別に証明する．積多様体の自己射について佐野氏が以前に得ていた結果を用いることで，多くの場合に既知の結果に帰着できることが分かる．X が楕円曲線上の $\mathbb{P}^1$ 束の場合が非自明である．$\mathbb{P}^1$ 束を $\pi\colon X \to C$ とおく．この場合，f を適当なベキ f^n で置き換えることで，f が π と可換であると仮定してよい．したがって，f は楕円曲線の自己全射 $f_C\colon C \to C$ を誘導すると仮定してよい．ここで，f の力学系次数と f_C の力学系次数を比較する．前者の方が大きい場合は，C を有限エタール被覆で取り替えることで積多様体の場合に帰着できる．そうでない場合は，楕円曲線の自己全射 f_C に関する川口-Silverman 予想に帰着できる．このようにして，すべての場合において，川口-Silverman 予想が成り立つことが証明される．

X が準アーベル多様体で f が自己全射の場合は，次のように証明する．X は完全列 $1 \to T \to X \to A \to 0$ を持つ．ここで T は代数的トーラス，A はアーベル多様体である．f はこの完全列を保つことが証明できるので，$f_T\colon T \to T$ および $f_A\colon A \to A$ という自己全射が誘導される．f_T と f_A は群構造について準同型であるとしてよい．このとき，f_T および f_A の最小多項式を因数分解して考察することで，f_T および f_A の算術次数として現れる量が完全に決定できる．この結果を用いて，f の算術次数が具体的に計算できる．さらに，f の力学系次数についても，f_T と f_A の力学系次数を用いて具体的に計算することができる．これらの結果をあわせることで，すでに知られていた代数的トーラスとアーベル多様体の場合に帰着することで，準アーベル多様体に対する川口-Silverman 予想が解決される．

関連する結果として，佐野氏は，滑らかな代数多様体の自己全射 $f\colon X \to X$ について，軌道 $\{f^n(P)\}_n$ における有理点の高さの増大度を従来より精密に計算することで，増大度が多項式と指数関数の積に定数倍を除いて一致することを示した．応用として，有理点の 2 つの軌道の交わりについて，力学系 Mordell-Lang 型の定理を証明した．これは，2 つのエタールな自己全射 $f, g\colon X \to X$ と有理点 $P, Q \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し，$f^m(P), g^n(Q)$ の高さの増大度に関する仮定の下で，

$$S_{f,g}(P,Q) = \{(m,n) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0} \mid f^m(P) = g^n(Q)\}$$

が 2 次元の等差数列の有限和に表せるという結果である．この結果は，Bell-Ghioca-Tucker により知られていたエタールな自己全射に対する力学系 Mordell-Lang 予想に，高さ関数の増大度の議論を組み合わせることで証明される．

これ以外にも，佐野氏は，代数多様体上の高さ関数について，いくつかの結果を得ている．いずれも数論的力学系の研究に本質的に貢献する重要なものである．

以上が本論文の主要結果である．

（ 続紙 3 ）

（論文審査の結果の要旨）

代数体上定義された代数多様体の有理点集合に定義される高さ関数の研究は，整数論における最も重要なテーマの一つである．アーベル多様体に対する Mordell-Weil の定理のように，高さ関数の性質を研究することで得られる数論的な結果も多い．しかし，一般の代数多様体上の高さ関数の性質については，まだ分かっていないことも多い．

高さ関数に関する重要な予想として，川口-Silverman 予想が挙げられる．この予想は，自己有理写像 $f\colon X \dashrightarrow X$ に対し，有理点 $P \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ の軌道 $\{f^n(P)\}_n$ における高さ関数の増大度から定義される算術次数 $\alpha_f(P)$ が，f の力学系次数と一致するというものである．数論的不変量と位相的不変量の一致を主張する深い予想である．

佐野氏は，本論文において，代数多様体の自己射の性質や高さ関数の性質を詳細に研究した．そして，X が滑らかな曲面で f が自己全射の場合や，X が準アーベル多様体で f が自己全射の場合等のいくつかの場合において，川口-Silverman 予想を解決した．これらの結果は，川口-Silverman 予想について従来から知られていた結果を大きく改良するものである．その証明は，自己射の構造を用いて既知の結果に帰着させるもので，代数幾何的にも数論的にも非自明である．また，証明の過程で得られた結果の中には 3 次元以上の代数多様体について適用可能なものも含まれており，今後もさらなる進展が期待される．

また，佐野氏は，高さ関数の増大度を従来より精密に評価することで，高さ関数の増大度が，定数倍を除いて，多項式部分と指数関数部分の積に書けることを証明した．応用として，2 つのエタールな自己全射 $f, g\colon X \to X$ と有理点の組 $P, Q \in X(\overline{\mathbb{Q}})$ に対し，$f^m(P), g^n(Q)$ の高さの増大度に関する仮定の下で，力学系 Mordell-Lang 型の定理を証明した．これは，2 つの軌道 $\{f^m(P)\}_m$ と $\{g^n(Q)\}_n$ が交わるような整数の組 (m, n) が 2 次元の等差数列の有限和で表せるという結果である．

このように，佐野氏は，代数多様体上の高さ関数について，いくつもの非自明な結果を得ている．これらの結果は，高さ関数の深い数論的性質を反映していると考えられる．今後の数論的力学系の研究においても重要な役割を果たすことが期待される．

よって，本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める．また，論文内容とそれに関連した事項について平成 31 年 1 月 9 日に試問を行った結果，全調査委員の一致で合格と認めた．

要旨公開可能日：　　　　年　　　月