（続紙 1）

京都大学	博士（理　学）	氏名	柴田 崇広
論文題目	Ample canonical heights for endomorphisms on projective varieties		

（論文内容の要旨）

柴田氏な，主要論文において，$\overline{\mathbb{Q}}$ 上の代数多様体の射に関する標準的高さ関数を構成し，その応用として代数多様体の自己射に関する代数点の様々な性質を導いた．

多変数の代数方程式の代数的数解を求める研究は，古来よりなされ，現在でも代数幾何，数論幾何の重要な一分野をなしている．代数方程式の代数的数解は，代数多様体の代数的点として捉えることが可能である．代数的点の高さは，その点の数論的な意味での「複雑さ，大きさ」を測る基本的な量である．

X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし，$f\colon X \to X$ を自己射とする．X 上の豊富な因子 H で，2 以上の整数 d が存在して，$f^*(H) \sim dH$ となるものが存在するとき，f は偏極的とよばれ，組 (X, f, H) は偏極的力学系とよばれる．1993 年に出版された論文で，Call と Silverman は偏極的な f に関して良く振る舞う高さ関数 $\hat{h}_{H,f}\colon X(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を構成し，標準的高さ $\hat{h}_f$ の理論と代数点のさまざまな性質を導いた．例えば，アーベル多様体上の Néron–Tate の標準的高さはこの範疇に入る．Call と Silverman のこの標準的高さは，偏極的力学系の数論・代数的な研究の基本をなし，今日にいたるまで非常に良く用いられている．

しかしながら，例えばアーベル多様体の一般の自己射や K3 曲面の自己同型射を考えてみれば分かるように，自己射は常に偏極的であるとは限らない．柴田氏は，偏極的とは限らない自己射について，豊富な因子に関する上界と下界の標準的高さ $\overline{h}_f, \underline{h}_f\colon X(\mathbb{Q}) \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ を構成することに成功した．さらに，柴田氏は，任意の代数体 K に対して，下界の標準的高さが 0 である K-代数的点全体のなす集合 $Z_f(K)$ は X の真の代数的部分集合に含まれるという予想をたて，その予想が正しいことを多くの場合（X が曲面のとき，X がアーベル多様体のとき，ピカール数が小さい代数多様体のとき）に確かめた．特に，この予想は，周期的な K-代数的点全体のなす集合が X の真の代数的部分集合に含まれることを導くので，多くの場合に周期的な K-代数的点全体が「小さい」ことが導かれる．なお，Call と Silverman の偏極的な場合には $Z_f(K)$ は有限集合となり，特に周期的な K-代数的点は有限個になる．また，この論文では，力学系 Mordell–Lang 予想についての応用も与えている．

（続紙 2）

（論文審査の結果の要旨）

柴田氏の主要論文は，Call と Silverman による偏極的な力学系の理論を，偏極的とは限らない射の力学系にも一般化するという優れた業績である．ひとたびなされてしまえば，標準的高さ $\overline{h}_f, \underline{h}_f$ の構成は自然に見えるが，以下で説明するように，Call と Silverman による標準的高さ $\hat{h}_f$ を単純に一般化したものではない．(実際，Call と Silverman の論文は 1993 年に出版されているにも関わらず，偏極的でない射の場合への豊富な因子に関する高さ関数の一般化は今回の柴田氏の結果まで 20 年以上もなされていなかった．)

さて，X を $\overline{\mathbb{Q}}$ 上の滑らかな射影代数多様体とし，$f\colon X \to X$ を自己射とする．f の (第 1) 力学的次数を δ_f で表すことにする．以下では，$\delta_f > 1$ のものを考える．H は X 上の豊富な因子とし，H に付随する対数的 Weil 高さ関数 h_H を一つ固定する．Call と Silverman の偏極的な場合には（$f^*H \sim dH$），$\delta_f = d$ であり，X 上の代数的点 x の標準的高さ $\hat{h}_f(x)$ は，$\hat{h}_f(x) = \lim_{n\to\infty} \delta_f^{-n} h_H(f^n(x))$ と定義される（ここで，f^n は f を n 回合成した射を表す）．しかしながら，f が偏極的とは限らない場合には，そのままでは極限 $\lim_{n\to\infty} \delta_f^{-n} h_H(f^n(x))$ は一般には存在しない．柴田氏は，この困難を克服するために，射 f によって決まるある適当な整数 $\ell \geq 0$ を用いて，上界と下界の標準的高さ

$$\overline{h}_f(x) = \limsup_{n\to\infty} n^{-\ell} \delta_f^{-n} h_H(f^n(x)), \quad \underline{h}_f(x) = \liminf_{n\to\infty} n^{-\ell} \delta_f^{-n} h_H(f^n(x)),$$

を導入した．すなわち，標準的高さを力学的次数 δ_f を用いて $n^{-\ell}$ でひねることで構成したわけである．（Call と Silverman の偏極的な場合は，$\delta_f = d$ で $\ell = 0$ である）．さらに，柴田氏は，このように構成した標準的高さが自然で良いものであること，すなわち，周期的な代数的点や力学系 Mordell–Lang 予想など，射 f に関する数論的な性質を調べるのに有用であることを示した．

Call と Silverman の標準的高さが偏極的力学系の数論・代数的な研究で有用であるように，柴田氏が構成した射に関する豊富な標準的高さは，偏極的とは限らない射の力学系の数論・代数的な研究で有用なものになることが期待される．

主要論文は，標準的高さの構成と射の数論的な性質を証明するために，代数的点の高さの理論，代数多様体の一般の理論から，代数曲面，アーベル多様体，カラビ・ヤウ多様体（Lazić–小木曽–Peternell の最近の結果）などの個別の理論などを用いている．主要論文から，柴田氏の発想の豊かさ（独創性）と代数幾何と数論に関する高い数学的技量が見てとれる．以上のことから本論文は、博士（理学）の学位論文として十分なものと判断した．

要旨公開可能日：　　　年　　月