(続紙 1)

京都大学	博 士 (理 学)	氏名	杉本 佳弘
論文題目	Spectral spread and non-autonomous Hamiltonian diffeomorphisms （Spectral spreadと自励的ではないハミルトン微分同相写像について）		

（論文内容の要旨）

この論文では、シンプレクティック多様体のハミルトン微分同相写像が generic には自励的なハミルトン流の時刻１写像としては表せないことについて論じている。微分多様体の微分同相写像群を無限次元 Lie 群とみるとき、無限小微分同相写像すなわちベクトル場全体が対応する Lie 環である。閉多様体の場合には、ベクトル場の積分により、ベクトル場のなす Lie 環から微分同相写像群に指数写像が定まるが、それは０の近傍から恒等写像の近傍への全射にならないことが古くから知られている。このことは、Banach 空間では逆関数定理、陰関数定理が有限次元同様成り立つのに対し、Frechet 空間では一般に成り立たないことを示す例になっている。閉シンプレクティック多様体（M,ω）のハミルトン微分同相写像の場合には、Albers-Frauenfelder や Polterovich-Shelukhin による先行研究がある。特に、Polterovich-Shelukhin は、シンプレクティック形式の de Rham コホモロジー類［ω］及び 第１ Chern 類 $c_1(M)$ を球面的な２次ホモロジー類で測った値が常に消えるという条件の下で、非自励的なハミルトン微分同相写像からなる部分集合でハミルトン微分同相写像群の C^∞-位相および Hofer 位相について開かつ稠密なものが存在することを示している。彼らは、ハミルトン微分同相写像の iteration の Floer ホモロジーの作用汎関数の値による filtration を用いて定義される spectral spread という量を導入し、自励的なハミルトン微分同相写像に対しては spectral spread は０になることを示した。つまり、spectral spread が０でなければ非自励的であることがわかる。この条件を調べるために、Polterovich-Shelukhin は Ginzburg と彼の共同研究者による Conley 予想に関する結果を使った。Conley は、平行移動不変はトーラス上のハミルトン微分同相写像は iteration を続けると、いくらでも新しい不動点（元のハミルトン微分同相写像の周期点）が現れることを予想した。この予想は、Hingston, Ginzburg たちにより、より広いクラスのシンプレクティック多様体に対して成立することが証明されているが、トーリック多様体のような身近な例でも Conley 予想の主張が成り立たないものがある。一方、Polterovich-Shelukhin が得た結果が、Conley 予想を満たす多様体に対してしか成り立たないというのは不自然に思われる。

杉本氏は本論文において、Conley 予想の結論を用いないで、従って、「［ω］ 及び $c_1(M)$ を球面的な２次ホモロジー類で測った値が常に消える」という条件を外して一般の閉シンプレクティック多様体に対して、非自励的なハミルトン微分同相写像からなる部分集合で C^∞-位相について開かつ稠密なもの、Hofer 位相とC^0-位相について開かつ稠密なものがそれぞれ存在することを証明した。Polterovich-Shelukhin の結果では、C^∞-位相、Hofer 位相のどちらについても開かつ稠密な部分集合の存在が示されているので、多少弱い主張ではあるが、対象とする閉シンプレクティック多様体には制限をつけていないことは大きな進展である。また、凸なエンドを持つ開シンプレクティック多様体に対して Polterovich-Shelukhin の主張を示している。

（続紙　２　）

（論文審査の結果の要旨）

シンプレクティック多様体の非自励的ハミルトン微分同相写像に関する杉本佳弘氏の研究は先行研究の議論では扱うことのできなかった一般の閉シンプレクティック多様体に結果を拡張するものである。公開講演では、問題の背景に始まり、主結果を述べるための準備、証明で使われる道具と証明を遂行するためのステップを簡潔に説明した。

ハミルトン微分同相写像群は無限次元であるが、Hofer 距離という両側不変距離が存在することが知られている。（この距離に関する位相を Hofer 位相と呼ぶ。）ハミルトン微分同相写像の Floer 複体には、作用汎関数を用いて filtration が入り、実数 a < b に対して、作用汎関数の値が [a,b] に属する不動点（ハミルトン流の周期解と 1 対 1 に対応）を生成系とする複体（action window [a,b] の複体と呼ぶことにする）が得られる。(元の Floer 複体の subquotient 複体) ハミルトン微分同相写像 φ が別のハミルトン微分同相写像 ψ の k 回 iteration とすると、φ の不動点集合には巡回群 $\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$ が作用する。不動点に対応する周期解については、パラメータ付けを 1/k 回転ずらすことに対応する。[a,b] がどのくらいの幅であれば、この作用が action window [a,b] の複体に恒等的ではなく作用するかを測るのが spectral spread である。この量は、Hofer 距離について Lipschitz になる。

Polterovich-Shelukhin は Conley 予想の結論を用いて、generic なハミルトン微分同相写の spectral spread は 0 にならないことを示し、このことから非自励的なハミルトン微分同相写像が豊富にあることを証明した。Iteration を繰り返して新たな周期点が現れる状況を見つければ、彼らの議論を参考に generic にはハミルトン微分同相写像は非自励的であることを示すことができる。Iteration を続けると、出発点にいくらでも近い点に写像されることから、その周りでハミルトン微分同相写像を適切に摂動して、そうして得られるハミルトン微分同相写像は非自励的である。杉本氏はこの構成をどの位相に関して小さい摂動でできるかを精密な議論ののちに実現した。

質疑応答では、非自励的ハミルトン微分同相写像の具体例や、非自励的ハミルトン流の時刻 t 写像の spectral spread は t とともにどのような挙動をするのか、Conley 予想の結論が成り立たない具体例などの質問が出た。すぐに答えられない質問もあったが、考察済みのことには的確な返答をしていた。

因みに、本論文は、Manuscripta Mathematica への掲載が決定している。（すでに online 版は journal の homepage に載っている。）

よって、本論文は博士（理学）の学位論文として価値あるものと認める。また、平成31年1月18日、論文内容とそれに関連した事項について試問を行った結果、合格と認めた。

要旨公表可能日：　即日