博士学位論文要約
題目：Spectral spread and non-autonomous Hamiltonian diffeomorphisms
(spectral spread と自励的ではないハミルトン微分同相写像について)

杉本　佳弘

1　背景

任意の滑らかな（閉）多様体 M に対して、$\mathrm{Diff}_0(M)$ をその微分同相写像群 $\mathrm{Diff}(M)$ のなかで恒等写像を含む連結成分とする。その 1-パラメーター部分群 $f:\mathbb{R}\to\mathrm{Diff}_0(M)$ は、次のようにあるベクトル場の flow で表現される。すなわち、ベクトル場 $X\in\Gamma(TM)$ が存在して、

$$f(t)=\exp(tX)$$

となる（ここで、$\exp:\Gamma(TM)\to\mathrm{Diff}_0(M)$ はベクトル場の時間 1 の flow）。陰関数定理のような事を考えると、以下のような疑問を考えるのは自然なことである。

疑問 1 $\mathcal{U}\subset\Gamma(TM)$ を零切断の十分小さい開近傍だとすると、

$$\exp:\mathcal{U}\longrightarrow\mathrm{Diff}_0(M)$$

は恒等写像 $Id\in\mathrm{Diff}_0(M)$ の開近傍への一対一対応を与えるか？

しかし、Milnor が指摘したように、これは成り立たない。そこで、次に考えられるのは以下の疑問である。

疑問 2 時間によらない（*autonomous* な）ベクトル場の *flow* で表現できる微分同相写像の集合 $\mathrm{Aut}(M)=\exp(\Gamma(TM))$ の $\mathrm{Diff}_0(M)$ 内での補集合はどれくらい大きな部分集合か？

これを symplectic 幾何の文脈に変換すると、多様体 M を symplectic 多様体 (M,ω) に変え、$\mathrm{Diff}_0(M)$ を Hamilton 微分同相写像群 $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ に変え

て似たような疑問を考えることになる。正確な statement は次節で述べるが、$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ の中で autonomous ではない元の成す部分集合の大きさを評価したい。

2 主結果

Symplectic 多様体 (M,ω) の上の $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$-周期的な関数 $H \in C^\infty(S^1 \times M)$ に対して、S^1-周期的な Hamilton ベクトル場 X_H が定義される。このベクトル場の生成する flow を H が生成する Hamilton 微分同相写像といい、ϕ_H と書くことにする。このような Hamilton 微分同相写像の集合が $\mathrm{Ham}(M,\omega)$ である。

$$\mathrm{Ham}(M,\omega) = \{\phi_H \in \mathrm{Diff}(M) \mid H \in C^\infty(S^1 \times M)\}$$

この中で、時刻 $t \in S^1$ によらない Hamilton 関数で生成される部分集合を autonomous な Hamilton 微分同相写像の集合といい、$\mathrm{Aut}(M,\omega)$ で表す。

$$\mathrm{Aut}(M,\omega) = \{\phi_H \in \mathrm{Diff}(M) \mid H \in C^\infty(M)\}$$

$\mathrm{Aut}(M,\omega) \subset \mathrm{Ham}(M,\omega)$ の補集合の大きさを評価するために、$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ に位相を入れる。Hamilton 関数 $H \in C^\infty(S^1 \times M)$ の Hofer ノルムを

$$||H|| = \int_0^1 \max_{x\in M} H(t,x) - \min_{x \in M} H(t,x) dt$$

で定義し、Hamilton 微分同相写像 $\phi \in \mathrm{Ham}(M,\omega)$ の Hofer ノルムを

$$||\phi|| = \inf\{||H|| \ |\phi_H = \phi,\ H \in C^\infty(S^1 \times M)\}$$

とする。そして、$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ 上の Hofer 距離を

$$\rho(\phi,\psi) = ||\phi\psi^{-1}||$$

で定義する。この Hofer 距離は両側不変な距離を定めることが知られているので、$\mathrm{Ham}(M,\omega)$ に自然に位相が入る。主結果は以下のとおりである。

定理 1 *1.* (M,ω) を閉 *symplectic* 多様体とする。このとき、$\mathrm{Aut}(M,\omega) \subset \mathrm{Ham}(M,\omega)$ の補集合は C^∞-位相で稠密である。また、部分集合 $W \subset \mathrm{Ham}(M,\omega)$ で以下の性質を満たすものが存在する。

- $W \cap \mathrm{Aut}(M,\omega) = \emptyset$
- W は C^0-位相で稠密 *(*C^∞ ではない*)*
- W は *Hofer* 位相で開集合であり、かつ稠密

2. (M,ω) を *convex* な *symplectic* 多様体とする。このとき、部分集合 $W \subset \mathrm{Ham}(M,\omega)$ で以下の性質を満たすものが存在する。

- $W \cap \mathrm{Aut}(M, \omega) = \emptyset$
- W は C^∞-位相で稠密
- W は *Hofer* 位相で開集合であり、かつ稠密

とくに、(M, ω) が閉あるいは convex な symplectic 多様体の場合、$\mathrm{Aut}(M, \omega)$ の補集合は C^∞-位相と Hofer 位相の両方の位相に関して稠密である。