1102 非線形周期系の定常現象

京都大学工学部　上田 睦亮

1. はじめに　線形回路における定常振動は，回路を記述する線形微分方程式の定常解として定義されているが，非線形回路における定常振動の体系づけは現在なお確立されていない。ここでは，正弦波電圧の印加された非線形インダクタンスをもつ直列共振回路にみられる，最も一般的な型と考えられる定常振動の実例を紹介し，この回路における定常振動の分類試案を提供する。

2. 微分可能な力学系　非線形インダクタンスの電流磁束特性が3次曲線で表わされる場合を考えれば，系の状態は次の Duffing 方程式で記述される。

$$\frac{dx}{dt}=x, \qquad \frac{dy}{dt}=-ky-x^3+B\cos t$$

$t=0$ のとき，xy 平面上の任意の点 $P_0(x_0, y_0)$ を通る上式の解を $x=x(t, x_0, y_0)$, $y=y(t, x_0, y_0)$ とし，$p_1(x_1, y_1)$ を $x_1=x(2\pi, x_0, y_0)$, $y_1=y(2\pi, x_0, y_0)$ と定めれば，平面 $\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 微分同相写像

$$f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$p_0 \longmapsto p_0$$

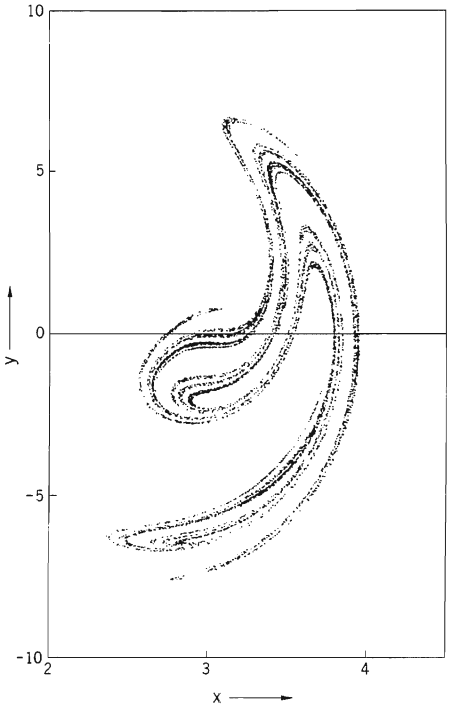
すなわち，$\mathbb{R}^2$ 上の C^∞ 級離散力学系が定義される。系に持続する定常状態は，写像 f の漸近安定性をもつ不変閉集合，すなわちアトラクターで表わされる。

3. 不規則遷移振動　アトラクターの構造によっては，対応する物理系には確率統計的な性質を示す非周期振動が持続する。第1図はパラメータを $k=0.1$, $B=12.0$ とした系における定常振動の軌道を観測したものであり，第2図は対応する微分同相写像の不動点 ${}^1D^1$, ${}^1I^1$, ${}^2I^1$ および ${}^1D^1$ の不安定および安定多様体 $W^u({}^1D^1)$, $W^s({}^1D^1)$ を描いたものである。不安定多様体（図中太線）を図に示した以上に延長すれば，第1図の軌道の概形に近ずく。

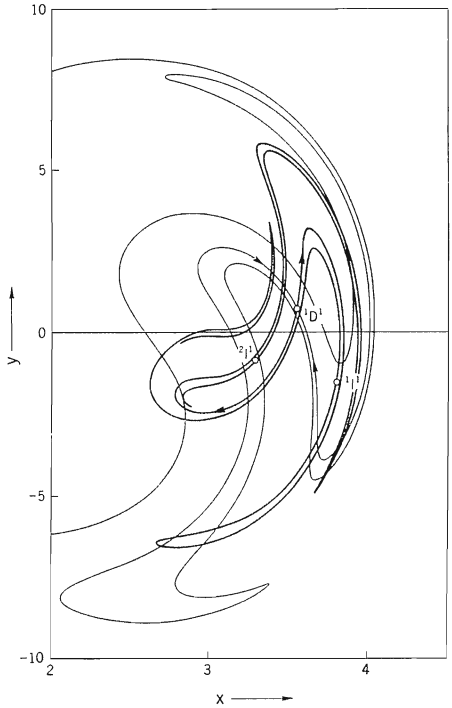
以上の結果は次のように整理される。(1) 非周期的な定常振動は，系に作用する擾乱や系の摂動の影響を受け，観測毎に異なる軌道を描く。つまり，確率統計的な性質を表わしている。(2) 非周期的な定常振動を表わすアトラクター M は鞍点 ${}^1D^1$ の不安定多様体の閉包，すなわち $M=\overline{W^u({}^1D^1)}$ と考えられる。さらに，実験的には M の軌道は正ポアッソン安定であるとみなされる。(3) 鞍点 ${}^1D^1$ の安定，不安定多様体 $W^s({}^1D^1)$, $W^u({}^1D^1)$ は互に交差し，ホモクリニックサイクルを構成している。しかも，大部分の交点では横断的に交わっているが，第2図の（2.8, −2.0）付近に見られるように，$W^s({}^1D^1)$, $W^u({}^1D^1)$ を図示した以上に延長すれば，横断的に交わらない接点の現われうる事が予想される。(4) ホモクリニック点の存在は，M が無数の周期軌道を含むことを示している。実験的には各周期軌道は漸近安定性をもたない，すなわち，M の中に沈点は存在しないとみなされる。これはたとえ沈点が存在しても，その吸引領域は狭く，系に作用する擾乱や系の摂動の影響でおおわれることを意味している。以上のことから，この型の振動を不規則遷移振

第19回自動制御連合講演会（昭和51年11月21日・22日・23日）

動と呼んだ。



第1図



第2図

上に挙げた型の振動に対して，アトラクターの分解や構造安定性，アトラクターの軌道にみられる疑回帰性等の問題が派生するが，何れも未解決である。

4. 定常振動の分類　損失のある非線形インダクタンスをもつ直列共振回路に発生する定常振動は，実測されるアトラクターの構造により下記の表のように分類される。非線形振動論においては，表中第1および第2項の基本調波および分数調波振動は，それらの振動が高調波成分を顕著に含むときは，それぞれ高調波および高調波的分数調波振動と呼ばれているが，ここではこれらの点に言及しない。

	実測されるアトラクター	定常振動
1	不動点	基本調波振動
2	周期軌道	分数調波振動
3	正ポアッソン安定で無数の周期軌道を含む不変コンパクト集合	不規則遷移振動

参考文献

白岩：力学系の理論（昭49），岩波．

上田，他：信学論，56-A，218（昭48-4）．