

ヨシムラ折り剛体折紙の変形機構を拡張した展開型骨組構造の開発

DESIGN OF DEPLOYABLE BAR STRUCTURE DEVELOPED FROM YOSHIMURA-PATTERN RIGID-ORIGAMI

津田勢太 ——— * 1 中原嘉之 ——— * 2
大崎 純 ——— * 3

Seita TSUDA ——— * 1 Yoshiyuki NAKAHARA — * 2
Makoto OHSAKI ——— * 3

キーワード：
展開構造, リンク機構, 剛体折紙, 移動式シェルター

Keywords:
Deployable structure, Link mechanism, Rigid origami, Mobile shelter

We develop a new type of deployable bar structure that simulates the folding process of rigid origami called Yoshimura-pattern. Since Yoshimura-pattern origami has multi-DOFs (degrees-of-freedom), it can be folded symmetrically and asymmetrically with respect to parallel valley fold-lines. In our proposal, additional revolute joints are assigned to restrict asymmetric motion of the mechanism and reduce DOFs. To confirm the deployability, we evaluate the DOFs of the mechanisms in various states using singular value decomposition of equilibrium matrix. The size of bars and the offset of joints are rigorously considered. Small-scale physical models are also assembled to confirm the deployability.

1. はじめに

展開構造は小さく折り畳まれた状態から形態変化する構造であり、通常、部材同士が低次対偶（ヒンジ接合など）で接合されたリンク機構¹⁾として設計される。展開構造は、宇宙空間における折畳みアンテナ²⁾、開閉式屋根、コンパクトに収納できるシェルター³⁾などに利用される。機構が多自由度（例えば、VGT 構造⁴⁾）の場合は、複数のアクチュエーターを組み込むことによって運動と形態を制御し、様々な形態に変化させることができる。移動式シェルターのような応急用途の建築構造をリンク機構として設計する場合には、軽量で運搬しやすく、容易に組み立てられるよう 1 自由度機構であることが望ましい。

展開構造には 1 自由度のシザーズ機構⁵⁾が一般的に利用されており、小さく折り畳まれた形態から大きく開いた形態まで、特定の展開経路により変形する。シザーズ機構は展開過程において節点間距離が変化するため、屋根・壁などの仕上材は、構造体の展開後に取り付けられるか、柔軟に曲がる材料（膜など）を展開前に一体化しておくことが必要になる。

剛体折紙（折線を除く平面部は弾性変形を必要とせずに折れるパターン）を展開構造の機構として利用する提案も注目されている^{6,7)}。剛性の高いパネルを連続丁番で接合することにより大型の展開構造を実現できる。パネルは構造体であると同時に仕上材としても利用できるため、展開後に仕上材を取り付ける労力を省略できる。しかし、ある程度のスパンを有する構造を作る場合、パネルの重量が増大して運搬性や展開性が低下するため、移動式シェルターよりも、アクチュエーターを備えた常設型の構造（開閉式屋根など）に適している。

移動式シェルター内部の快適な居住環境を確保するための仕上材には、断熱性能の低い膜材よりも、断熱性能の高いパネルが望ましい。

運搬や展開作業を考えると軽量化できる骨組構造（例えば、シザーズ機構）が望ましく、また、断熱性能の高い仕上材を展開前に取り付けられるものが望ましい。剛体折紙と同等の展開性能を有する骨組構造は、断熱材を組み込んだ軽量の仕上パネルを構造と一体化して展開することができるので、上記要件を満足すると考えられる。Temmerman¹⁰⁾はヨシムラ折り剛体折紙と同等の展開性能を有する多自由度の展開型骨組構造を考案し、1 自由度にするためにシザーズ機構を組み込む手法を提案した。

本稿は、ヨシムラ折り剛体折紙の展開過程を模擬する 1 自由度のラチスシェル型の展開構造を提案することを目的とする。一般的に、三角形要素（ヨシムラ折り等）による剛体折紙は多自由度となるが、四角形要素（ミウラ折り等）による剛体折紙は 1 自由度となる⁸⁾。本提案では、ヨシムラ折りの形態に、ミウラ折りの機構特性を付加した形の 1 自由度機構を設計する。機構の展開性・冗長性を判定するため、機構自由度（および、不安定モード）と不静定次数を、釣合行列の特異値分解を使った手法を用いて計算する。骨組部材の大きさやヒンジ接合の取り付け位置が展開性能に与える影響についても検討する。また、縮小模型を製作して可動性の確認を行う。

筆者らは、任意方向に回転軸を持つヒンジ接合により接合されたリンク機構を生成するための最適化手法を提案した^{11,12)}。3 次元の空間機構では、多方向に回転可能な接合として図 1(a)や(b)に示す球ジョイントやユニバーサルジョイントが利用されることがあるが、これらジョイントは簡易なものではないうえ、機構全体の自由度が大きくなる。本稿で提案する展開構造は、図 1(c), (d)に示す 1 自由度のヒンジ接合を用いる。なお、図 1(d)は、二つの部材が部材軸を共有して回転するヒンジ接合の 1 種であるが、本稿ではねじり回転接合と呼ぶ。

¹⁾ 岡山県立大学デザイン学部デザイン工学科 准教授・博士（工学）
〒719-1197 総社市窪木 111

²⁾ 岡山県立大学デザイン学部デザイン工学科 助手

³⁾ 京都大学大学院工学研究科建築学専攻 教授・博士（工学）

¹⁾ Assoc. Prof., Dept. of Design and Technology, Okayama Prefectural Univ., Dr. Eng.

²⁾ Research Assist., Dept. of Design and Technology, Okayama Prefectural Univ.

³⁾ Prof., Dept. of Architecture and Architectural Engineering, Kyoto Univ., Dr. Eng.

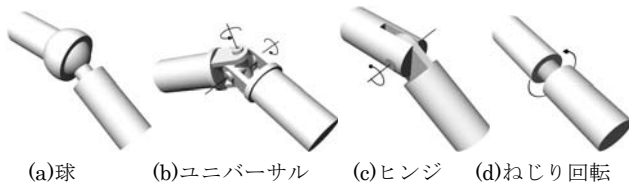


図1 ジョイントの種類

2. 展開型骨組構造の生成

2.1 剛体折紙パターン

剛体折紙の一種であるミウラ折りは、四角形要素（平行四辺形）が折線で接続されたパターンであり、図2(a)に示すように、平面から平坦に折り畳まれた形状まで平面的に変形する。1自由度機構であるが、簡易な機構自由度計算式（クッツパッハ・グルーブラー式¹⁾）では自由度が負となる過拘束メカニズムである。ミウラ折りには様々な自由度1の派生形（四角形要素）が存在する^{7,8)}。図3(a)は、20枚の四角形要素によるミウラ折り派生型（以降、ミウラ円弧折りと呼ぶ。）であり、ミウラ折りのジグザク折線が1列おきに反転したパターンである。図2(b)に示すように、平面から円筒形に変形し、平坦折りされる1自由度の剛体折紙である。

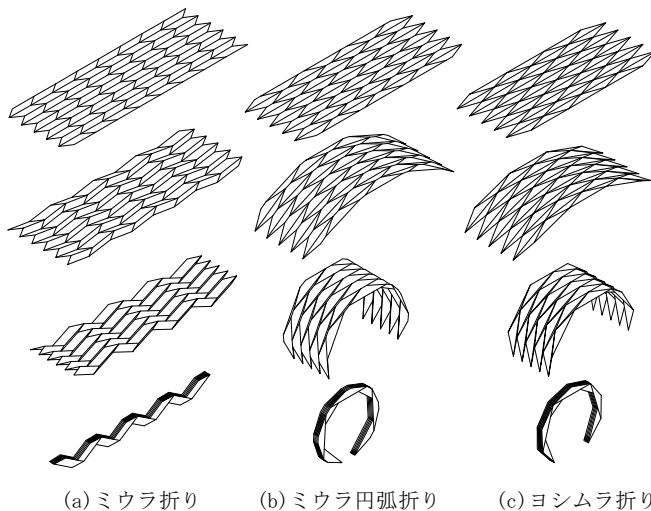


図2 剛体折紙の展開過程

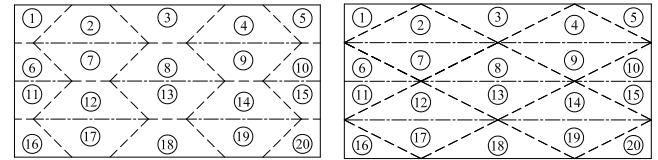
図2(c)に示すように、三角形要素で構成されるヨシムラ折りも円筒形に変形する剛体折紙である。図3(b)は、20枚のパネルによるヨシムラ折りパターンである。三角形要素で構成された剛体折紙の変形自由度 q は、

$$q = n - 3m \quad (1)$$

により算出され、一般的に多自由度となる⁸⁾。ここで、 n は折線（相対する三角形の辺）の数、 m は交点の数（外周を含まない）であり、 q には6方向の剛体変位は含まれない。図3(b)のヨシムラ折りの場合は、 $n=23$ 、 $m=4$ であるので $q=11$ となる。なお、11自由度には、隅角部の4枚の開ループ機構（パネル①、⑤、⑯、⑳）の4自由度を含む。

円筒形に折れ曲がるミウラ円弧折りは、斜め方向山折り線の角度を変えていくと、四角形要素（台形）が最終的に三角形要素となる。これはヨシムラ折りで、台形が三角形になった時点で1自由度

から多自由度に変化する。また、ミウラ折り（および、その派生形）は、冗長な拘束を含む内的不静定な機構であり、図3(a)の谷折り線部を全て切り離しても、不安定にはならず1自由度を維持する。ミウラ折りのこれら性質を利用して、ヨシムラ折りの折線部に部材を配置したラチス型の展開構造を設計する。



(a) ミウラ円弧折り

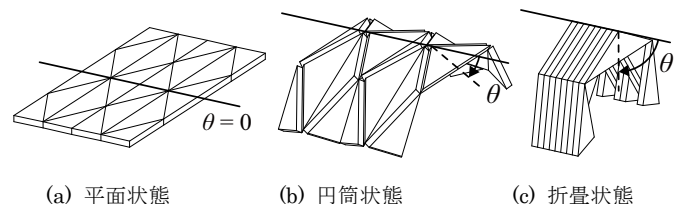
(b) ヨシムラ折り

図3 剛体折紙パターン（破線は山折り線、鎖線は谷折り線）

2.2. 厚板による剛体折紙

剛体折紙の多角形要素を剛な板とし、折線を連続丁番で接合することで、折り畳み可能なパネル構造を作成できる⁹⁾。ただし、厚みの無視できる薄い紙で成立する折紙と異なり、厚みのある板を用いると、折り畳み過程において隣接するパネル同士が衝突する。衝突を回避するためには、ヒンジ接合の回転軸を折紙の面外にオフセットして配置する手法や、厚板端部をカットする手法を用いることが必要になる⁸⁾。

ヒンジ位置をオフセットして配置する手法では、紙による理想的な折紙のジオメトリから外れることになるが、ヨシムラ折りは谷折り線でヒンジを板上面に、山折り線ではヒンジを板下面に配置することで完全に折り畳むことができる（図4）。厚みがあるため、交点（例えば、図3(b)のパネル⑦と⑯の交点）に図5に示す隙間が生じ、厚み分が折り重なって折り畳まれる（図4(c)）。



(a) 平面状態

(b) 円筒状態

(c) 折畳状態

図4 厚板によるヨシムラ折り剛体折紙の展開状態

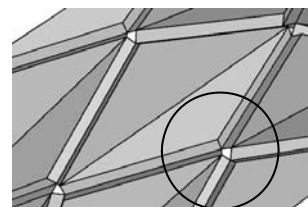


図5 厚板の場合に生じる交点の隙間

展開の進行状態を特定するための変数として、開角度 θ （ $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ ）を図4のように定義し、以降、下記の3つの展開状態における機構特性を検討する。

- 平面状態： $\theta = 0^\circ$ 度
- 円筒状態： $0 < \theta < 90^\circ$ 度
- 折畳状態： $\theta = 90^\circ$ 度

2-3. 展開型骨組構造への変換

厚板が連続丁番で接合されたヨシムラ剛体折紙を骨組構造へと変換する。図 6(a)に示すタイプ A1 機構は、三角形板要素を三角形骨組（3 本の剛な棒を剛接合した骨組）に変換し、折線に沿って配置された 2 本の棒材の両端でヒンジ接合したものである。図中の記号  はヒンジ接合を示し、その回転軸は折線方向である。12 本の棒材が集まる交点において、計 6 個のヒンジにより結合されている。Temmerman¹⁰⁾による提案は、この 6 個のヒンジ接合を一体化した特殊コネクタに、着脱可能な棒材を取り付ける形式の展開型骨組構造である。図 6(b)に示すタイプ A2 機構は、タイプ A1 で棒材両端に配置した 2 個のヒンジ接合の代わりに、棒材中央部にヒンジ接合 1 個を配置した機構であり、タイプ A1 と A2 は同じ展開性能を有する。

ヨシムラ折りやミウラ折りのような対称性を有する機構は、クッツパッハ・グループラー式による機構判定式では正確に自由度を計算することができないため、骨組の釣合行列を特異値分解する方法を用いて、機構の自由度（不安定次数）および不静定次数を計算する¹¹⁾。本節で示すタイプ A2～A5 機構（開角度 $\theta = 30$ 度のとき）について、MATLAB¹³⁾を用いて計算した結果を表 1 にまとめて示す。また、計算方法の概要を付録に示す。なお、いずれの計算モデルにおいても、6 方向の剛体変位を防ぐために、ある 1 点の 6 方向変位を固定する。また、図 6 は表記上明確にするために棒材を折線から離して描いているが、計算モデルでは棒材とヒンジ接合の大きさを無視して折線上に配置している。ヒンジ接合と棒材の位置関係を考慮した場合については 3 節で検討する。

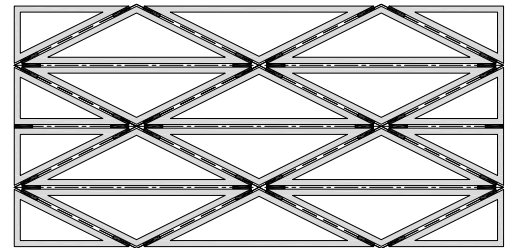
タイプ A2 は、自由度 11、不静定次数 132 であり、2-1 節で算定したヨシムラ折り剛体折紙と同じ自由度である。なお、一つの閉鎖三角形骨組（3 節点、3 部材）は不静定次数 6 である。骨組全体の不静定次数には、これらの不静定次数も含まれているので不静定次数が大きくなっている。三角形骨組を 1 個の剛体リンク要素と考えて除外すれば、タイプ A2（20 個の三角形骨組が含まれる。）の不静定次数は 12 となる。

ヨシムラ折りは多自由度であるため様々な形状に変形するが、対称性を有する円筒形状に変形させるために、変形方向を拘束するようにヒンジ接合を付加的に挿入する。タイプ A2 の各交点で、谷線を対称軸として隣り合う三角形骨組の頂点同士をつなぐヒンジ接合（回転軸は谷線方向）を追加したものが図 6(c)に示すタイプ A3 機構である。この変換によって、1 自由度の機構が得られた。タイプ A3 は、2-1 節で述べたように、ミウラ円弧折りの斜め折線角度を変えて、台形がほぼ三角形になったものと同じと考えることもでき、この観点からも 1 自由度になることが分かる。なお、1 自由度となるのは円筒状態のときであり、平面状態および折畳状態は多自由度となる特異点であり、分岐モードが発生する。分岐モードについては 3 節で検討する。

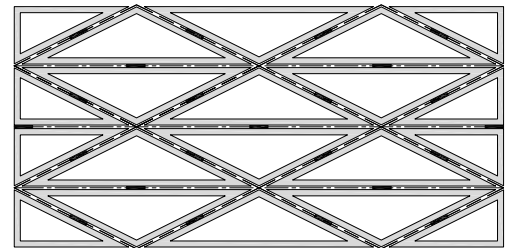
タイプ A3 は 1 自由度機構であるが、不静定次数は 162（三角形骨組を 1 剛体リンク要素と考えると 42）であり、余剰な部材が多数存在する。2-1 節で述べたように、ミウラ円弧折りには連結を除外しても 1 自由度を維持する接合部（折線）がある。タイプ A3 の谷折り線部のヒンジ接合、および、その周囲の棒材を削除したものが、図 6(d)に示すタイプ A4 機構であり、自由度 1 で、不静定次数

が 7 に減少する。

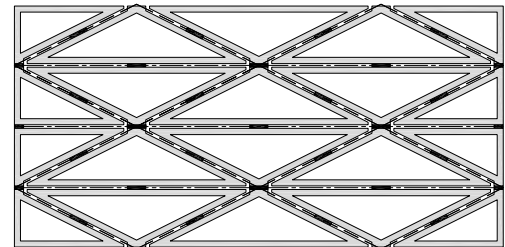
タイプ A4 は、山折線の中央で棒材が偏心して接合されているため、棒材の軸力により偏心モーメントが発生する。この偏心を避けるために、棒材を山折り線に移動し、ヒンジ接合を図 1(d)に示すねじり回転接合（記号●で表記）に変換したものが、図 6(e)に示すタイプ A5 機構であり、1 自由度である。タイプ A4 は、ヒンジ接合でつながれた部材同士が重なるため、折畳状態で無駄な隙間が生じるが、タイプ A5 はねじり回転接合によって 2 本の部材が直線で連続しているため、隙間なく折り畳むことができる。タイプ A5 を本稿の最終提案機構とし、次節でより詳細に展開性能を確認する。



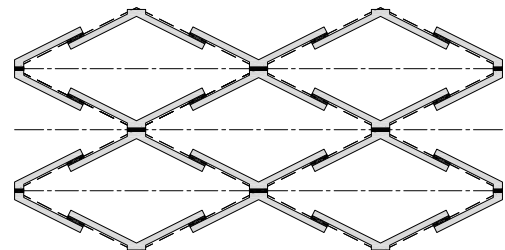
(a)タイプ A1



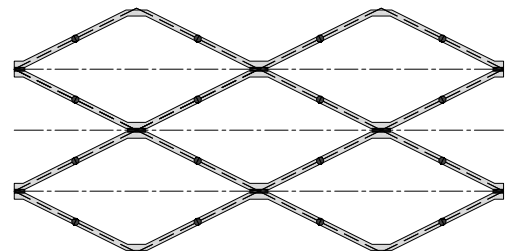
(b)タイプ A2



(c)タイプ A3



(d)タイプ A4



(e)タイプ A5

図 6 展開型骨組構造タイプ

表 1 機構の自由度と不静定次数

(括弧内は三角形骨組を 1 個のリンク要素とみなした場合の値)

機構タイプ	A2	A3	A4	A5
自由度	11	1	1	1
不静定次数	132 (12)	162 (42)	7	7

図 7 は、タイプ A2, A3, A4, A5 のヒンジ連結関係を明確にするためのトポロジーグラフを示す。数字付きの円がリンクを、実線がヒンジ接合を示す。タイプ A2, A3 においては、三角形骨組を 1 つのリンクとして示し、タイプ A4, A5 においては V 字型骨組を 1 つのリンクとして示している。なお、図 7(a) はヨシムラ折り剛体折紙機構 (図 3(b)) のトポロジーグラフ (パネルがリンクを示す。) でもある。

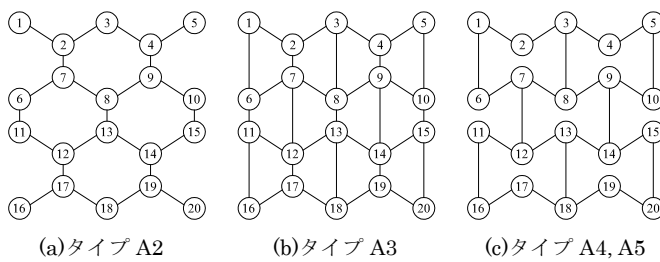


図 7 機構のトポロジーグラフ

3. 機構タイプ A5 の展開性能の確認

3.1 ヒンジ接合の位置オフセット

2-3 節では、厚みの無視できる折紙平面上に、大きさを無視した棒材とヒンジ接合を配置した骨組の計算を行った。本節では、タイプ A5 機構について、棒材の大きさとヒンジ接合の回転軸の位置が展開性能に与える影響について考察する。表 2 に典型的なケースを示す。破線は棒材の軸心、実線は棒材の外形 (厚さ D とする。), 黒丸記号は棒材軸心の端点位置を示す。白丸記号はヒンジ接合の回転軸芯を示し、厚みを無視した折紙平面から面外方向へのオフセット値を、下方向 (谷折り側) を正として h とする。

表 2 棒材の大きさとヒンジ接合の回転軸位置による展開性能

ケース	オフセット値 h	平面状態	円筒状態	折畳状態
1	0			
2	$-\frac{D}{2}$			
3	$\frac{D}{2}$			
4	$\frac{D}{2}$			

ケース 1 は、棒材軸心上に回転軸芯が配置されたものであり、厚みのない折紙と同じ幾何関係となるが、隣接棒材同士が衝突しないようにするために棒材端部をカットする必要がある。カット角度を γ とすると、全体の開角度 θ の限界値 θ_L が γ となり、展開可能範囲は平面状態から円筒状態までとなる。ケース 2 は、回転軸を折紙平面の上方向 (山折り側) にオフセットした場合であり、ケース 1 と同様、限界開角度 θ_L は端部カット角度 γ となる。

ケース 3 は、回転軸芯を折紙平面の下方向 (谷折り側) にオフセットした場合であり、平面状態から折畳状態まで、隣接棒材と衝突することなく展開することができる。図 4 に示した厚板折紙と同じく、開角度 θ を任意に設定可能である。ケース 4 は、ケース 3 の棒材の材端を延長加工し、角度 γ をもたせたものである。この場合、開角度の限界値 ($\theta_L = \gamma$) で棒材同士が接触するため、展開可能範囲は折畳状態から円筒状態までになる。

3-2. 不安定モード

タイプ A5 機構について、平面状態、円筒状態、折畳状態における自由度および不安定モードを求める。図 8 は、平面状態における解析モデルを示す。単位は任意であるので省略する。6 方向の剛体変位を拘束するため、6 個の変位 (節点 11 における X, Y, Z 方向, 節点 15 における Z 方向, 節点 31 における Y, Z 方向) を拘束する。表 2 のケース 1 (オフセット量 $h=0$)、および、ケース 3 (オフセット値 $h=0.2$ とした場合) について計算した結果を表 3 に示す。

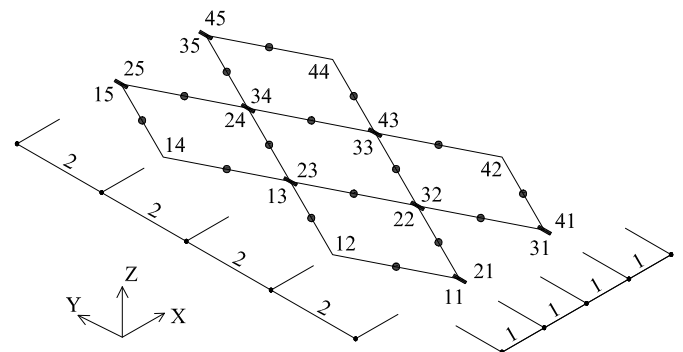


図 8 タイプ A5 機構の解析モデル (平面状態)

表 3 タイプ A5 機構の自由度

	平面状態	円筒状態	折畳状態
ケース 1 ($h=0$)	9	1	11
ケース 3 ($h=0.2$)	4	1	1

注) ケース 1 の折畳状態は棒材が空間上の同じ位置に重なっているという実際にはあり得ない架空の状態であるため、自由度が大きい。

ケース 1 の円筒状態は、2 節の計算結果 (表 1) と同じモデルであり、1 自由度である。平面状態では、9 自由度であり、図 9 に示す 9 個の不安定モードが存在する。図 9(a) は目的の展開モード (図の数値は鉛直方向変位の比率) である。図 9(b) は、谷折り線を軸にして蛇腹のように折れ曲がる 3 個の分岐モード (図に示す a, b, c は独立した鉛直変位) であり、ヒンジ接合のみが回転し、ねじり回転接合は全く回転しないモードである。図 9(c) は、中央を軸として逆対称に変形す

る分岐モードである。図 9(d)は、境界節点 (11,15,31,35) が各々独立に、図 8 に示した全体座標 X 軸まわりに回転する分岐モードであり、これらの節点に直接接合された棒材がその部材軸まわりに回転し、全体のジオメトリー (節点位置) は変化しない。折畳状態では、11 自由度 (2 個の剛体変位を含む) であるが、棒材の大きさを無視した本解析におけるこの状態は、棒材が空間上の同じ場所に重なっているという架空の状態であるため、この状態の分岐モードについての考察は割愛する。

回転軸をオフセットしたケース 3 は、円筒状態で 1 自由度を維持し、平面状態での自由度は 9 から 4 に、折畳状態では 11 から 1 に減少している。平面状態の 4 個の不安定モードは、目的の展開モード 1 個と蛇腹モード 3 個である。ヒンジ接合のオフセットにより展開方向が拘束され、図 9(c),(d)の 5 個の分岐モードが消失した。

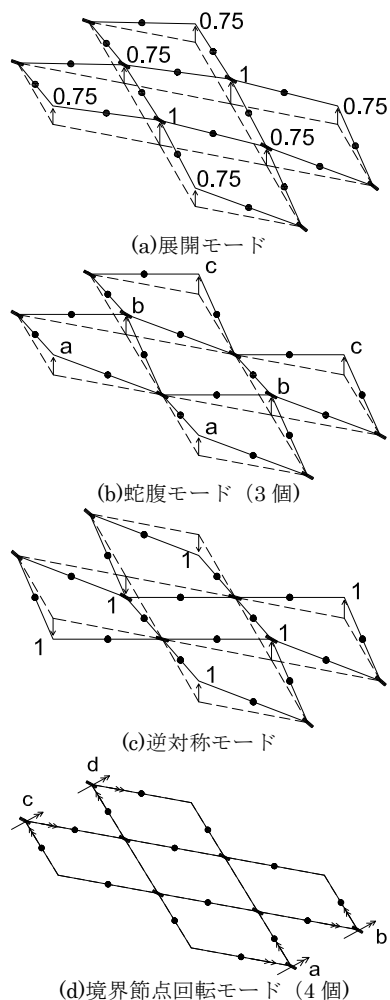


図 9 タイプ A5 機構の不安定モード (平面状態)

写真 1 は、縮小模型により確認した展開過程を示す。折畳状態から平面状態までは、2 箇所の節点の強制変位により変形する 1 自由度の機構であることを確認した。写真 1 (d)は、平面状態での分岐モードの一つ (蛇腹モード) である。平面状態では多自由度であるので、平面状態から展開する場合は、分岐経路ではなく、円筒状態に向かう展開経路へ変形するように制御する必要がある。蛇腹モードは、図 9(b)から見てとれるように、ヒンジ接合が反対方向に回転できないよ

うなディテールとするとともに、中間節点 (図 8 の節点 12, 14, 42, 44) が下方向に移動できないようにサポートすることで防ぐことができる。

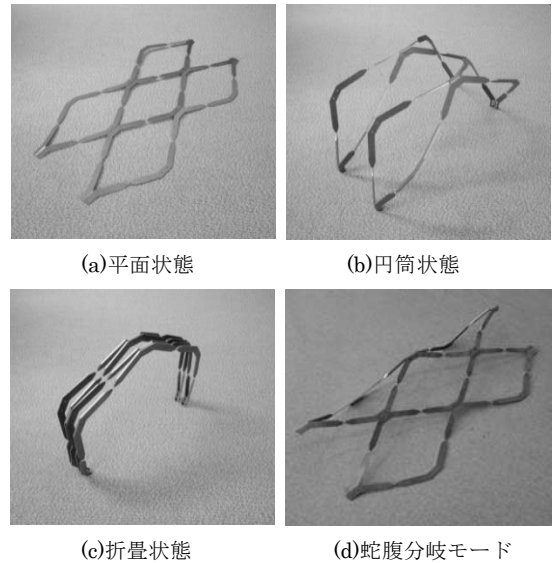


写真 1 縮小模型による展開状態

4. 結

ヨシムラ折り剛体折紙パターンに山折り線の上に棒材を配置したラチスシェル形状の展開型骨組構造を提案した。ヨシムラ折りパネル構造は多自由度であるが、提案する骨組機構は、対称な円筒形に変形するよう交点にヒンジ接合を追加して変形方向を拘束することで 1 自由度となっている。

展開性能は、詳細な不安定モード計算により確認しており、ヒンジ接合の回転軸位置と棒材端形状を設定することにより、展開可能範囲を設定できること、平面状態における分岐モードを減少させられることを示した。

剛体折紙を拡大して作成するパネル構造の場合、構造体となる剛強なパネル部材が必要となるが、提案する骨組構造では断熱材などを組み込んだ仕上げパネルを骨組に設置することで全体を軽量化することができる。設置現場で容易に組み立てることができるシステムであり、移動式シェルターなどの用途で利用することができる。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 26420557 の助成を受けた。ここに記して謝意を表す。

参考文献

- 1) 日本機械学会: JSME テキストシリーズ 機構学, 2007
- 2) 高塚真央, 大森博司: 新しい展開構造物の提案とその理論解析, 日本建築学会構造系論文集, 第 75 巻, 第 654 号, pp.1567-1576, 2010.8
- 3) 川口健一, 佐藤拓人: シザーズ骨組みを用いた展開式球形シェルの製作に関する基礎的研究, 日本建築学会技術報告集, 第 22 巻, 第 50 号, pp.53-56, 2016.2
- 4) Inoue F: Development of adaptive construction structure by variable geometry truss, Robotics and Automation in Construction, In-Tech Education and Publishing, pp.253-272, 2008
- 5) Pinero E P: Three dimensional reticular structure, United States Patent,

No.3185164, 1965

- 6) Foster GC, Krishnakumar S: A class of transportable demountable structures, Int J Space Structures, Vol.87, pp.129-137, 1986
- 7) Gattas JM, Wu W, You Z: Miura-base rigid origami: Parameterizations of first-level derivative and piecewise geometries, J Mechanical Design, Vol.135(11), 111011, 2013
- 8) 館知宏: 剛体折紙メカニズム, 日本ロボット学会誌, Vol.34, No.3, pp.184-191, 2016
- 9) 徳永孝平, 末廣香織: 剛体折り木質パネル架構のデザイン開発, 日本建築学会九州支部研究報告集, pp.665-668, 2012.
- 10) De Temmerman N: Design and Analysis of Deployable Bar Structures for Mobile Architectural Applications, Ph. D. dissertation, Vrije Universiteit Brussel, 2007
- 11) 津田勢太, 大崎 純, 菊川翔平, 寒野善博: 部分剛接合骨組の安定性評価とメカニズムの解析, 日本建築学会構造系論文集, Vol. 78, No. 686, pp.791-798, 2013.4
- 12) Ohsaki M, Tsuda S, Miyazu Y: Design of linkage mechanisms of partially rigid frames using limit analysis with quadratic yield functions, Int J Solids and Structures, Vol.88-89, pp.68-78, 2016
- 13) MATLAB Ver.7.7 User's Guide, MathWorks, 2010

表 A1 機構の自由度と不静定次数の計算

機構タイプ	A2	A3	A4	A5
$n+h$	491	451	186	90
m	612	612	192	96
r	480	450	185	89
$n+h-r$	11	1	1	1
$m-r$	132	162	7	7

[2017 年 6 月 5 日原稿受理 2017 年 8 月 7 日採用決定]

付録. 釣合行列の特異値分解による機構判定

文献[11]による釣合行列の特異値分解による機構判定方法の概要と、本稿 2-3 節で行った計算結果を下記にまとめる。

全部材の材端断面力（各部材につき、軸力、ねじりモーメント、両材端の 2 方向曲げモーメントの計 6 成分）を並べたベクトルを $\mathbf{F}$ とし、拘束されていない自由度に対応する外力ベクトルを $\mathbf{P}$ とする。部分的に材端力を解放した構造物全体の釣合い式は以下のように表現できる。

$$\mathbf{B}\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{A1})$$

ここで、 $\mathbf{C}$ は釣合い行列であり n 行 m 列（ n ：節点変位自由度数， m ：全部材の端部断面力数＝部材数×6）， $\mathbf{H}$ は材端断面力の指定条件をまとめた行列（断面力を 0 に指定する成分が 1，それ以外が 0 の行ベクトルを並べた行列）であり，材端力の解放総数を h とすると h 行 m 列である。

ランク r の行列 $\mathbf{B}$ ($n+h$ 行 m 列) は以下のように特異値分解することができる。

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{\Omega}\mathbf{R}^T \quad (\text{A2})$$

ここで、 $\mathbf{R}$ は右特異ベクトルを並べた行列（ m 行 m 列）， $\mathbf{S}$ は左特異ベクトルを並べた行列（ $n+h$ 行 $n+h$ 列）， $\mathbf{\Omega}$ は最初の r 個の対角成分が非零の特異値で，他は 0 の行列（ $n+h$ 行 m 列）である。

$\mathbf{R}$, $\mathbf{S}$ は直交行列であるので， $r < m$ の場合には式(A3)を満たす $m-r$ 個の右特異ベクトル $\mathbf{R}_i$ ($i = r+1, \dots, m$) が得られ， $r < n+h$ の場合には式(A4)を満たす $n+h-r$ 個の左特異ベクトル $\mathbf{S}_j$ ($j = r+1, \dots, n+h$) が得られる。

$$\mathbf{B}\mathbf{R}_i = \mathbf{0} \quad (\text{A3})$$

$$\mathbf{B}^T\mathbf{S}_j = \mathbf{0} \quad (\text{A4})$$

式(A3)を満たす $\mathbf{R}_i$ は，外力がない状態で存在する非ゼロの自己釣合い断面力モードであり， $m-r$ は不静定次数である。式(A4)を満たす $\mathbf{S}_j$ は，部材が変形することなく存在する非ゼロの変位モードであり， $n+h-r$ は不安定次数である。

2-3 節で計算した機構タイプ A2, A3, A4, A5 における上記の各値を表 A1 にまとめて示す。