デカルトと数学

河野勝彦

目次

1. はじめに

あの少しでも疑いうる知識を偽としようという決意のもとに行われる形而上学的懐疑の道行きにおいて、最初にあらわれてくる確実な知識は、「思惟する我が存在する」ということであった。ところで、ラ・フレーシュの学院から世間という大きな書物の中へ出て、青年期の後半を旅行や宮廷や軍隊を見てあるき、また様々な体験に自分を試しながら、「真なるものを偽なるものから分かつすべを学ぼう」① という強い熱望を抱きつつ放浪をつづけていたデカルトが、最初に見い出したものは、数学の真理であった。それはオランダにおいてベークマンとの交わりを通して得られたのであり、デカルト22才（1618年）のときのことであった。1619年4月、デカルトはベークマンに「私はあなたを私の研究の推進者であり、私の研究の一番の作り主として敬いたいと思います。といいますのも、実にあなたは私の眠りを呼び醒してくださった唯一のお方であり、あなただけが、私の記憶からほとんど逃れていた知識を呼び戻してくださったからであり、まじめな仕事から全く離れた私の精神をよりよい思惟へと連れ戻してくださったからであります」② と書き送っている。ラ・フレーシュの学院時代のことを回想しながら、方法序説第一部でデカルトは数学について「私はとりわけ数学が気に入っていた。それの推理の確実性と明証性とのゆえに。しかし当時はまだそれのほんとうの用途をさとってはいなかった。そしてそれが機械的技術にのみ役だてられていることを思っては、その基礎がこのようにしっかりして動かぬものであるにもかかわらず、いままでその上にもっと高い建物をだれも建てなかったことをふしぎに思っていた」③ と語っている。ベークマンとの解逅を通してデカルトは、かってこの数学に対して抱いていた確実性の感想をとりもどしたのである。

この間のベークマンとの交わりにおいて、デカルトが問題としたのは、「物体の落下の問題」

「容器中の液体の圧力の問題」「音楽論」そして「純粋数学の探究」等であった。④ そこでは、機械的技術にのみ役立てられた数学ではなく、自然研究の基礎として数学が使われているのである。純粋数学の探求については、デカルトは「角の三等分の問題」「三次方程式の三つのタイプの問題」の解を見い出した。しかし何よりも我々の注意をひくのは、デカルトの個々の問題に対する解の見事さよりも、彼の普遍的な認識への焦がれるような熱望である。数学の完全な体系をうち立てようとする彼の野心は、１６３７年の方法序説の三試論の中の一つである「幾何学 Géométrie」に結実されることになるのであるが、１６１９年、２３才にしてはやくも彼はその決意とある程度の見透しとを語っている。「私は、連続量であれ非連続量であれ、任意の種類の量について提出されうるすべての問題を一般的に、しかもその本性に従って解くことを可能にする、新しい基礎をもった学問を作り出したいと思う。算術においてある問題が有理数によって解かれ、他の問題がただ根数nombres sourdsによってのみ解かれ、またある問題が想像imaginées（虚数）されるがしかし解かれることが出来ないように、同様に、私は連続量についても、ある問題は直線か円周のみによって解かれ、あるものは円とは違った曲線、しかもただ一つの運動によって生じる曲線（円を描く普通のコンパスと同様に正しく、同様に幾何学的であると私の考える、新しいコンパスの助けによって描くことが出来る曲線）によってしか解かれることが出来ず、また最後に他の問題は互いに異った運動によって生じさせられ、それらの間にいかなる依存関係もない円積曲線quadratrice のような単に想像的imaginaires な曲線によってしか解かれないということを証明したいと思う。そして、少くともこれらの線によって解かれないようなものは想像しえないと思う。しかし私は、どの問題がこれこれの仕方で解かれ、他の仕方では解けないのかを示し、幾何学においてはもはや発見すべきいかなるものも残っていないようにしたいと思う。これは際限のない仕事であり、ひとりの人間にできることではないことは確かなことである。信じられぬくらい野心的な計画である。しかし私は、この学問の不明瞭な混沌の中に何かしらある光を見てとっているし、この光の助けによって、最も厚い闇をもうちはらうことが出来ると思う。」⑤

これは、１６３７年の「幾何学」において全面的に展開されるデカルトの数学の核心が未熟な形ではあれ、既に形成されていることを示している。そのデカルトの数学は、幾何学と代数学とを統一した解析幾何学として数学史の中で位置づけられている。我々はそのデカルトの数学の性格と、彼の哲学の中での数学の位置がいかなるものかを見てゆくことにしよう。

さて、デカルトは数学から出発したのであるが、彼の目指すところは、１６１９年１１月の夢の啓示にも明らかなように、諸学の体系を自分一人で完成させることであった。その際、数学はその新しい学問の構築にとってなくてはならない「方法」を案出するための手立てとなっており、またこの方法の確立が逆にデカルトに数学の改革、解析幾何学の発見を可能にすることになるのである。我々は、デカルトの方法を簡単に追いつつ、その方法が彼の幾何学とどのように密接に結びついているかを見てみよう。

2. 方法

数学から出発したデカルトは、その数学の反省の中から、除々に諸科学に通用する普遍的な「真理発見の方法」を形成していった。まだ霊的な予感に充ちた青年期の「思索私記 Cogitatione Privatae」においてデカルトは、恐らく数学の問題についてであろうが次のように語っている。「若い日、巧妙な発見を味わうために、私は、私が作者の書物によらず独力で発見することが出来ないかどうか調べてみた。それ以来、除々に私は、あるきまった規則に従って私が取り扱っているのに気づいた。」①この内容は「精神指導の規則」の規則第10則の冒頭の部分で語られていることである。そこでデカルトは、自分が「真理発見に大いに役立つ確実な規則をば長い経験によって見出した」②といっている。

その真理発見に大いに役立つ確実な規則とは、解析analysis ということである。確実で不可疑な数学に研究の喜びを見い出したデカルトではあったが、その数学がその真理をいかに発見するかという方法を少しも教えてくれず、ただ見い出された成果しか与えてくれないことに大いに不満を持つようになった。昔の数学者は、彼らが数学の真理を見い出すために用いた方法を秘密にしておいて、その成果だけを提示して人々を驚かしたのである。このようにデカルトは次第に考えるようになった。③そして、その方法による成果を説明する総合synthesisの方法に対して、秘密にされた発見の方法が分析analysis の方法であることに気づくのである。この分析－解析の方法が、昔の幾何学者のパッポスや、算術学者のディオファントス、またアラビアを経て伝えられた代数学 Algebra の中に使われていることを見い出したのである。もっとも、そこに用いられている解析の方法は、充分満足のいくものではなかったろうが、デカルトはそれを彼なりに、諸学の真理発見の方法へと整備していったのである。

それは、方法序説第二部の四つの規則、或いは、規則論第5、第6、第7則に簡潔な形でまとめられている。すなわち、明晰・判明なものしか真としないという基本姿勢のもとに、問題を秩序づけ、複雑なものを単純なものに分割し、最も単純なものから始めて、段階を踏んで、最も複雑なものの認識にまで上向してゆき、最後に見落されたものがなかったかを秩序に従って吟味することである。そしてこれを行うのが、知性による直観 intuition と演繹deduction である。

こうしてデカルトは、「真理発見の方法」を見い出すのであるが、しかし、ここに一つの逆転が出てくる。それは、この打ち固められた方法から、逆にこれまでの数学を批判し、数学の新しい改革を行うとともに、この方法に則った新しい学問観 ＝ 普遍数学を展開するのである。デカルトに云わせると、それまでの数学はデカルトがそれを通じて除々に完成させてきたこの方法を実際には不充分にしか実現させていないのである。

デカルトの方法の中心は、その方法の主要な秘密すなわち解析について説明している規則論第6則の「最も単純な事物を複雑な事物から区別しかつ秩序正しく探究するためには、いくつかの真理を他の真理から直接的に演繹して成り立ったところの、事物の系列の一つ一つについて、何が最も単純であるか、どんな風に他のすべてのものがこの単純者から、或いはより多く、或いは

より少く、或いは等しく、隔たっているかを観察すべきである」[4]ということである。最も単純なものの直観と、この単純なものから、二つ又は三つ又は多くの推論を通じて演繹される事物の系列が形成される。ここで演繹とは、「必然的」な結合といわれ、「必然的というのは、或るものが他のものの概念の中に或る不判明な仕方で含まれていて、従って、それらが互いに他から離れていると判断する時はそれらのいずれをも判明に把握し得ない」[5]結合のことである。この例としてあげられるのは、「形」と「延長」の関係で、延長は形の概念の中に或る不判明な仕方で含まれているという。また他の例は、「4と3の和が7」という結合である。「7なる数はその中に或る不判明な仕方で3と4の二数を含ませずしては判明に考えられないから」[6]という。

デカルトの演繹について我々は、規則論の短かい記述によっては充分にその内容をつかみかねるところがある。演繹ということで規則論の別のところであげている例は、「演繹はただ次のようにのみ行われる、すなわち、或いは言葉から物を、或いは結果から原因を、或いは原因から結果を、或いは似たものから似たものを、或いは部分から部分または全体そのものを演繹する」[7]ということであるが、これは具体的な「問題」を解く段階で提示される規則であって、言葉の不明瞭さに困難が存する問題の場合、まず言葉の批判から始めるべきだということ、また、「或るものについて、それが存在するか否か、或いはそれが何であるか、を探ねる場合はいつも、結果から原因を求めて」[8]ゆくことを勧めるのである。また演繹は、第6則の、単純な本質を自己の中に含むところの「絶対的なもの」── 例えば、独立的・原因・単純・普遍・一・相等・類似・垂直・etc── と、その単純な本質を分有し、絶対的なものに関係づけられかつ或る系列によって絶対的なものから演繹されることが出来るものであり、しかも関係 respectus を自らの概念の中に含むところの相対的なもの ── 例えば、依存的・結果・複合的・個別的・多・不等・不同・斜め・etc ── の対置においてその例がみられる。[9]

デカルトのいう演繹の最も単純な例は、数学の領域に求められる。それは例えば、3・6・12・24・48・etc の数列が連比をなすことを演繹するために、6が3の2倍ということから、6の2倍、12の2倍、24の2倍、etc を求めていって、その数列が連比をなすことを演繹するというのである。[10]それは、様々な量の間の比例関係を明らかにするのに用いられるのである。この量的な比例関係を演繹によって明らかにすること(これは純粋数学の問題を解く時に常に用いられる)と、先にみられたように、必らずしも量的な関係ではなく、概念間の内包的な定義の順序に帰されるような演繹の例が指摘される。この二種類の演繹をデカルトは規則論において必らずしも明確に区別して述べるのではなく、よく云われるように、知性の明晰・判明な直観という心理主義的な規定によって、演繹の連鎖を説明するのである。ところで、デカルトの方法が、数学ないし数学的自然学と、形而上学や物語り的な自然学において同一であったか否かについての問題に対して、この演繹の二つの性格は大きなヒントになると思われる。

方法を具体化した普遍数学が、秩序 ordo と計量的関係 mensura とを一般的に研究する学問と規定されるとき、上に述べた演繹の二つの性格がそのまま表われているようにみえる。規則第14則でデカルトは、「同じ類の存在の間に存しうるすべての関係が秩序と計量的関係」に

帰着することを述べたあと、この秩序と計量的関係をそれぞれ、秩序にあっては「一は他にそれ自身で結びつくのであって、計量的関係におけるように第三者を介してではない」[11]といい、「ＡとＢとの間に存する秩序が何であるかを、両項のほか何も考えずに知るけれども、二と三との間に存する量的比が何であるかを、或る第三者すなわち両者の共通の尺度であるところの単位を考えないでは知る」[12]ことは出来ないといって、区別している。この秩序と計量的関係の説明は、演繹の二つの性格にそれぞれ合致するのである。つまり、秩序はどちらかというと、演繹の第一の性格、すなわち、概念間の内包的な定義の順序を示し、計量的関係は量的な比例を指しているのである。この対応は方法序説でも同様であって、そこでは、前者が「関係」rapports であり、後者は「比例」proportions である。[13]もちろん、この秩序と計量的関係、或いは、関係と比例は、別々に研究されるものではない。しかし、数学や数学的な自然学では、計量的関係・比例が主要には研究され、物語り的な自然学や形而上学においては、量的な比例関係は姿を消して、秩序や関係が研究されるのである。全学問領域に通ずる普遍的な方法であるデカルトの方法が、他方で、数学と、実際の自然学、形而上学の間で方法上の違いがあると疑われる理由は、上に見たように、演繹自身の中に二つの性格があるからなのである。しかし何よりも方法の主要な秘密である分析＝解析という点では、デカルトの方法は一貫しているのである。

3. 普遍数学

普遍数学、或いは真の数学 Vera Mathesis とは、秩序 ordo 或いは計量的関係 mensura を一般的に研究する学問であり、その計量的関係が数や図形や星や音 etc において求められるとき、この普遍数学の部分をなすところの数論・幾何学・星学・音楽・etc の学問になるという。[1]

ところで、この普遍数学は、その技術的な操作として、対象である秩序、或いは一般的な計量的関係を、通常の数学が対象としている線や記号において表示し、しかも、そのことが「幾何学的解析と代数とのあらゆる長所を借り、しかも両者のあらゆる欠点を矯正することになる」[2]というとき、我々は、数学史上の発見とされるところの、代数学と幾何学とを合一させた解析幾何学と、普遍数学との関係がいかなるものか見定め難くなる。両者は違うものなのか、それとも、結局は同じものなのか。しかも、規則論の第二部・第１３則以降の諸規則は、「幾何学」の内容とだぶってくるのである。また、ミローも云っているように、[3]第４則の方法についての解説を読んでいると、デカルトが方法について語っているのか、数学について語っているのか、しばしば見わけがつかなくなるのである。

しかし、デカルトはこの普遍数学と純粋数学＝解析幾何学をはっきりと区別していた。デカルトは、最初に数学（＝数論や幾何学）のもつ確実性に魅かれ、その研究をベークマンとの出会いを通じて行う中で、普遍的な方法を形成していった。そして、この方法を形成する過程は、同時に、それまでの数学を批判し、この新しい方法によって、数学の問題を解き、またそれを改良する過程でもあったのであろう。デカルトは、彼の方法を見い出したあと、なるほど彼の方法は全

学問の真理発見に通用する方法ではあったが、用心深い彼は、まず最も単純、最も容易な研究である純粋数学から始めて、除々により高い学問に移ってゆこうとしたのである。そうしてこの方法がもたらす満足について、デカルトは、「私の精神がその対象をいよいよ明晰に判明に考える習慣を少しずつ獲得してゆくと感じたことであり、また、その方法をなんらかの特殊な問題にかぎったのでないゆえに、それを代数の問題に用いた場合と同様に有効に、他の学問の問題にも用いうると期待できたこと」④だと序説で語っている。

規則論の最初の１２の規則からなる第一部は、それ自身明晰・判明であるために直観によって認識される「単純な命題」について述べており、次の１２の規則からなる（しかし実際には９しかない）第２部は、直観によって認識された単純な本質から演繹される「完全に理解される問題」についての諸規則を述べ、最後の第三部は、我々がそれの複合的であることを経験するところの諸本質を前提している「不完全にしか理解されない問題」（自然学の問題）を取り扱う筈であった。⑤ところで、普遍数学はともすれば、第二部にのみ限られるように見えるが、第一部や第三部の内容もこの普遍数学の方法を教えるものであって、「規則論」全体が普遍数学（＝方法）をなすと考えるべきである。しかしもちろん、第二部は、様々な対象から抽象されて得られた秩序と計量的関係を一般的に扱う普遍数学の、数学的な手続きによる問題解決の方法を述べた部分ではある。第二部を述べるにあたって、デカルトは、繰り返し読者に、数論と幾何学の研究を好むことを期待している。その理由は、「ここに示そうとする規則の使用は、他のすべての種類の問題に於けるよりも、上の二つの学問の習得において、はるかに容易だからであり、上の二つの学問の習得には、ここに示そうとする規則を使用するだけで充分だから」⑥であるといっている。他の学問、たとえば自然学の真理を発見するためには、この上に、さらに第三部の諸規則も必要になるのであるが、数学の問題を解くにはこの第二部の規則だけで充分なのである。なぜなら、純粋数学（数論と幾何学）は「純粋な単純な対象」⑦だけを取り扱うからである。しかしデカルトは、この第二部の諸規則が、数学の問題を解くためだけではなく、「より高き智慧の獲得にとっても極めて大きい」⑧効果をもたらすといい、そして、「数学の問題はほとんどこの方法に習熟するためにのみ学ばれるべきである」⑨といっている。

先にも述べたように、普遍数学のこの第二の部分は、精神の直観によってではなく、単純な本質からの演繹によって知識を得る方法が述べられている。その方法はそのまま、純粋数学の方法になるべきである。しかし、デカルトにとって、通常の数学はその方法に合致しないところがあり、その点で、普遍数学のこの部分を展開することは、同時に通常の数学を改良してゆく過程でもあった。そして、その改良は、数学の歴史の上で、極めて実り豊かなものとなるのである。

４．「規則論」における数学の改良

規則第１４則において、デカルトはそれまでの数論や幾何学が「多くのあいまいな、よく理解されていない原理によって、曇らされているので、我々は今後、折にふれてその改善に努めるであろう」①と述べている。その改善の対象となる原理とは、数論において、数を、知性によって

だけでなく想像力によってもあらゆる主体から抽象されているものと考えることであり、また幾何学はおいて、最初に線を幅を持たぬもの、面を深さをもたぬものと規定しておきながら、後になって、線から面を構成する考え方である。② 例えば、ユークリッド「原論」第一巻の定義のところで、「一、点とは部分をもたぬものである」「二、線とは幅のない長さである」「三、線の端は点である」「五、面とは長さと幅のみをもつものである」「六、面の端は線である」と云われているが、デカルトに云わせると、これらの言明は、知性と想像力を間違って使用することからくる言明になるのである。なる程、知性によって把えられた延長は、具体的な物体的存在から抽象されていて、線について幅や深さなしに長さのみを考えることは出来るけれども、想像力の方は長さ・幅・深さを伴った「事物の真の観念」を形成するのである。「我々は想像力の助けを利用することが出来るし、利用すべきであることを、よく注意しなければならない。何故ならこの場合、知性は厳密にただ言葉の意味することがらのみに注意しているけれども、想像力の方は事物の真の観念を形成」③ するのである。

デカルトにおいて、「延長とは、長さ・幅・深さを有するすべてのもの」である。従って、「我々が形を取り扱う時は、延長をもつ主体を、しかも、ただ形をもつものとしてのみ考えられた主体を、取り扱うのだと考えよう。また物体を取り扱う時は、長さ・幅・深さをもつものとしての延長体を取り扱うのだと考えよう。面を取り扱う時は、やはり延長体をば、長さと幅とをもつものとして、且つ深さを否定するのではなく、唯度外視して考えよう。線の場合は、同じ延長体を、ただ長さをもつものとして。点の場合には、同じ延長体を、それが存在者であるということのほかのすべてを度外視して、考えよう」④ とデカルトは自分の立場を説明する。

幾何学におけるこのような考え方の改善は、一体何を意味しているのであろうか？点から線を、線から面を、そして面から立体を構成する考え方は、求積の考え方につながるものであるが、デカルトにとって、このような考え方は知性の抽象した哲学的存在（真の物体的存在ではない）を現実の存在として誤って判断することに起因することなのである。幾何学におけるこのような考え方は、デカルトの時代に、ケプラーとともに積分学の発展に尽したカヴァリエリの考えにもみられる。カヴァリエリは「線は大きさのない点の運動により、面は幅のない線の運動により、立体は厚さのない面の運動によって生じ、これらの要素はこれ以上分割できない窮極の成分である。そして、これらの極微な要素の無限個の和によって長さ・面積・体積が求められる」⑤ といっている。また「平面図形は平行な糸でおられた織物、立体はうすい紙を積み重ねた書物のようなものである」⑥ といって、面積を平行弦の和と考えている。今日の積分の考えではこの弦に幅を考えて、その幅を0に収束させた極限をとるのであるが、カヴァリエリでは、弦は長さのみあって、幅のないものと考えているのである。

デカルトにとって、このような求積の考え方は、極めてあいまいなものを原理とした考えであって、「極微」の要素とか、「無限」については、なまはんかに手をつけることのできない概念だったのである。デカルトが上の改善によって得た成果は、求積とは関係なくて、それとは全く別の方面でのものであった。それは幾何学の成立以来ずっと幾何学が背負ってきた重いくびきを

断ち切るような改善であって、この改善がまさにデカルトをして、近代数学の改革者の位置に立たせ、解析幾何学の発見に導いた根本といってもよいであろう。

その改常が何にあるかについて、デカルト自身、次のように語っている。「この考察は幾何学に大なる光をもたらす。というのは、ほとんどすべての人が幾何学において三種の数量quantitasすなわち線・面・物体を考えるという誤りに陥っているからである。実際既に述べたように、線および面は真に物体と区別されたものとして表象せられず、また線と面相互についてもそうなのである。しかし三者が、単純に、知性によって抽象されたものとして考えられる場合でも、それらが数量の相異なる種 species だとはいえない。」⑦

ギリシャの数学史をみると、それまでのエジプトやバビロニアにおいて発展した数計算が量の理論にとってかわられ、幾何学の圧倒的な優位の中で、代数計算の方は自律的な発展をすっかり中止していた。計算に出てくる要素は、いつでも幾何学的に表示されていなければならず、幾何学的な次元を伴った量でなければならなかった。一次の量を直線、二次の量を平面、三次の量を立体、四次以上の量については、例えば、五次を表わすには平面の立体の量と呼んだ。そして、同じ種類の量の間でしか演算は行えず、そのため極めて繁雑なものであった。⑧デカルトのすぐ前の時代のフランシスクス・ビエタ（１５４０〜１６０３）においても、このことは基本的に変らず、数と量の間に乗りこえることの出来ない溝を残していた。

これに対しデカルトは、あらゆる数量を長さの数量、すなわち、実数と同じものとして扱うという根本的改革を行なったのである。規則第１４則の結びの部分でデカルトは次のように結論している。「命題をば、他のあらゆる質料から分離すべきであると同じく、また幾何学者たちがそういう命題を問う時に取り扱うところの図形からも、分離すべきである。そしてそのような命題の研究のため我々の保留すべきものは、直線と直角とより成る面、または直線、のみである ―― 直線をもまた我々は図形と呼ぶ、何故なら上述の如く、面に劣らず直線もまた、真の延長体を想像するのに役立つからである。そうして最後に、この図形によって、或いは連続量muItitudoを、或いは数 numerus を明示すべきである。そしてすべての関係の差異を明示するに、人間の力ではこれ以上に単純なものは見出せないのである。」⑨

ここに言われていることは、すべての量の同次性をいった上で、問題を解くために、再度、その量的関係を図形に描いて外部感覚（視覚）に呈示し、我々の思惟をより容易に、判明にすることである。もちろん、デカルトは図形の助けを借りずに、純粋に代数的な手続きのみによって、問題を解くことができたであろうが、しかし実際にデカルトが常に説くところは、図形によって、すなわち作図によって問題を解く方法なのである。⑩ギリシアの数学は、おそらくピタゴラスの数論に対して、$\sqrt{2}$というような通約不能数の発見によって作図的な解法に向っていったが、⑪デカルトの問題の解法もまた、このギリシア以来の流れの中にあくまでとらわれていたのである。つまり、代数方程式をデカルトは、代数的な計算によってではなく、幾何学的な作図による解法によって解いたのである。ギリシアの数学とデカルトの数学の違う点は、前者は数と量を区別し、量についても幾何学的な種別を考えていたのに対し、デカルトにおいては、あらゆる量を直線の

長さで現わすことによって、実数体と直線上の線分の長さ全体のつくる体とが同型であることが明らかにされたことである。このことによってデカルトは、空間に座標を設けることによって、代数的な関係を図形に表現することができ、逆にまた図形を数の間の関係によって表わすことができたのである。そこにおいては、図形はもはや異った機能をもたされていた。ギリシア人にあっては、幾何学的な図形は実在的な意味をもたされていたが、デカルトにおいては、図形は、単に方程式、代数的な関係を表わすためのものでしかないのである。こうして、代数学と幾何学の統一としての近代的な解析幾何学が成立するのである。

5．解析幾何学

上にたどってきた真理発見の方法とその方法に則った改革が、デカルトの実際の数学的な仕事の中でいかに結実されているか、また逆に、実際の数学的な仕事がこの方法の有効性と限界をいかに示しているかを見てゆくことにしよう。

１６３７年の「幾何学」第一巻のはじめには、規則論で述べられた方法と数学上の改革がそのまま繰り返されている。すなわち、(1)記号の利用（第１６則）、(2)未知数と既知数を区別せず、相互の依存関係を見い出すこと（第１７則）、(3)四則計算の図形による表示法（第１８則）、(4)未知数と同じ数だけの方程式を見い出すこと（第１９則）、(5)見い出された方程式を簡単にするために可能な限り除法を行え（第２０則）、(6)方程式が複数ある場合には、唯一つの方程式に帰着させよ（第２１則）、(7)a^2、b^3 は面積や体積を表わす量としてではなく、単なる長さを表わしているということ、という規則論の諸規則をこの「幾何学」で説明した上で、デカルトは、これらの諸規則を使用することによって、ギリシア以来の幾何学の問題をより秩序正しく解けるだけでなく、ギリシア幾何学の制約を越えることを可能にすることを証明するのである。すなわち、パッポスの問題についてこのことを証明するのである。

パッポス「数学集成」第７巻に書かれてあるこの問題とは、ユークリッド、アポロニウス以来の問題であったが、デカルトはその問題を次のように要約している。「３本、４本、またはそれ以上の直線が位置に関して与えられたとする。まず１点から与えられた角をなす同数の線をひき、線が３本しかない場合は、この点からひいた線のうち２本に囲まれた矩形が第３の線による正方形と与えられた比をもつようにする。４線の場合は、残る２線による矩形との比をとる。５線の場合は、３線によって作られた平行六面体が残る２線と他の与えられた線とによって作られた平行六面体と与えられた比をもつようにする。６線の場合は、３線によって作られた平行六面体が他の３線による平行六面体に対して与えられた比をもつようにする。７線の場合は、４線を掛け合わせて作られるものが他の３線と別の与えられた線との乗法によって作られたものにたいして与えられた比をもつようにする。８線の場合は、４線の相乗積が他の４線の相乗積に対して与えられた比をもつようにする。こうして、この問題は何本の線にでも拡張されうる。そして、常に無限個の異なる点が問題の条件を満足しうるから、それらの点がすべてその中に見い出されるべき線を知り、それを描くことが要求される。」①

パッポスの前のアポロニウスの段階では、線が２本の場合はこの点が描く軌跡は、平面軌跡すなわち直線か円であり、３本および４本の場合には立体軌跡すなわち３種の円錐曲線の軌跡を描き、５線・６線の場合は、線 linea と呼ばれる別の種類の曲線の軌跡を描くということがわかっていたが、線が６本を越える場合には、それらの各々に対してある一点から引かれた直線の数が４本以上掛け合わされることになり、彼らが幾何学的な意味づけをもって理解していた３次元を越え出てしまうため、それらの間の量の比を把握出来ないとされていた。これに対し、パッポスは、基本的にこの制約に縛られながらも、違った仕方で、すなわち、掛け合わされる線の数が４本以上になっても、二本ずつ比をとってゆき、それらの比を合成することによって、与えられた線がいかに多くとも、ある点が、その点からのそれぞれの線に対してひかれた線の互いの相乗積が一定の比になるような、そういう点であるかどうかを決定できるというのである。[②]

デカルトはこの問題を１６３１年、ゴリウスから提出されて、[③]６週間をかけて解いた。上のパッポスに対してデカルトは、「与えられた線が３本ないし４本しかないときには、それらの点が描く線が３種の円錐曲線の一つであるとはいっても、そのうちのどの曲線であるかを決めようとも、描こうともしておらず、また問題がより多くの線に関して提出されたとき、これらすべての点が見い出されるべき線を説明しようともしていない」[④]と不満を述べたあと、自分の方法によってこの問題にアプローチするのである。

デカルトの解法は、規則論に示された規則そのものの実践である。掛け合わされる直線のうち、基準にとられた一つの直線を２個の未知数Ｘ・Ｙで表わし、他の直線の長さを全てそのＸとＹを基準とする比で表わし、それらの直線の相乗積の比が与えられた値に等しいと置くことによって、方程式を立てるのである。デカルトはこの方程式を満足するＸ・Ｙの値の無数の組みによって、求ゆる点の軌跡を得ることが出来るという。この方法だと与えられた直線が無限に多くなっても、この点の軌跡を求めることが出来るというのである。こうしてデカルトは、ギリシア以来の数学の持っていた制約を越えるとともに、近代的な解析幾何学を基本的に確立するのである。

6. デカルト解析幾何学の限界

ところで、デカルトをこのような見事な成果に導いた方法は、しかし同時に次に述べるような限界を持っていた。それは、曲線の分類に対する彼の考えの中に現われている。ギリシア数学は、曲線を三種類、すなわち、平面曲線、立体曲線、そして線の三つに分類し、前二者を幾何学的曲線といって数学の中に取り入れ、第三の線と呼ばれる曲線を機械的曲線と云ってこれを数学で扱う曲線から区別した。しかし先の解析幾何学の発明によってデカルトは、この第三番目の線と呼ばれる曲線の間にも、様々な段階と種別を設けて、一部を除いてこの曲線をも、幾何学の対象、幾何学的曲線の中に取り入れたのである。それは方程式に対応する曲線を、方程式の次数によって種別化することを通じて可能となったのである。そして、この方程式として立てられない曲線が、デカルトにとって、数学から除外される曲線、すなわち、機械的曲線と呼ばれるようになるのである。[①]

しかし、何故、一方が方程式として立てられ、他方がそうされないのであろうか。あらゆる曲線が「２本またはそれ以上の線が互いに他によって動かされ、それらの交点」によって、描かれるといって、全く新しく運動の概念を幾何学の中に導入しながら、デカルトはその理由を次のように述べている。「ひとつの連続的な運動、または互いに連係していて最後の運動が先だつ諸運動によって完全に規制されるような多数の運動によって描かれる」[②]曲線については、「常にそれらの線の測り方について精密な知識をもちうる」[③]ので、この曲線のすべての点を、ある直線（座標）に対する関係を表わす方程式で表わすことが出来るのである。しかし、「精密に測りうるいかなる関係ももたない別々の二つの運動によって描かれる」[④]曲線は、それらの二つの運動の間に何ら連係がないために、云わば、勝手に描かれて、方程式として表わすことは出来ないのである。この例としてデカルトは、螺線や円積曲線をあげている。

つまり、デカルトが幾何学的と呼びうる線は、正確 precis で厳密 exact な比例の関係によって、把握できる線のことである。それに対し、幾何学から排除される機械的な曲線とは、二つの直線の交点の軌跡としてその曲線が描かれるとき、その二つの直線の運動の速さが不可通約的 incommensurables であるために、正確な比例を得ることが出来ず、方程式としてその曲線を表わすことが出来ないのである。この機械的曲線といわれるものは、後にライプニッツによって、幾何学的曲線が代数曲線と呼ばれたのに対して、超越曲線と呼ばれて正統に数学の中に市民権を獲得することになるのである。デカルトの方法では、この超越曲線を取り扱うことは出来ない。しかし、実際に、螺線や円積曲線、また求積問題は、数学の問題であり、デカルト自身も手をつけざるを得なかった問題である。にもかかわらず、デカルトの方法は、この問題を解くことが出来なかった。１６３８年のサイクロイドの面積や、[⑤]それに対して接線を引く問題や、[⑥]１６３９年のド・ボーヌの問題、[⑦]すなわち、接線に与えられた条件から原曲線を求める、逆接線の問題はデカルトによって見事に解かれている。しかしデカルトは、これを解析幾何学の方法、規則論の方法によって解いてはいない。ド・ボーヌ宛の手紙の中で、デカルトは、この曲線が互いに不可通約的な速さによって運動する二つの直線の交点によって描かれることを証明したあと、「この線は、私が機械的でしかないものとして、私の幾何学から排除したものの中に属している。このことは、私が用いたもう一つの方法によってはこの曲線を見い出すことが出来なかったということに私がもはや驚かない理由である。というのは、その方法は、幾何学的な曲線にしか及ばないからである」[⑧]と語っている。

それでは、解析幾何学の方法ではない、新たに考えられた方法とはいかなるものであろうか。ド・ボーヌの問題を解くためにデカルトは、「無限」の概念に頼っている。求める点が、無限の極限をとることによって、ほとんど正しい近似値として得られるといっている。また、円を直線上に一回転させて、最初に円周と直線が接していた点の描く曲線＝サイクロイドと直線とで囲まれた部分の面積が円の３倍であることを証明する時も、「無限」に訴えている。そして、この機械的な曲線であるサイクロイドの接線を決定するとき、デカルトは、それが、円を回転させるのでなく、無限の辺をもった多角形を回転させて描かれた軌跡と考えることによって、接線が直線

との瞬間的な接触点と接点を結ぶ直線を接点において直角に切断する直線であることを証明するが、ここでも「無限」がその方法の武器となっているのである。そこで、デカルトが「無限」をどう考えていたかが、興味ある問題として、我々の研究の対象となる。

7. 無限について

周知のように、デカルトは無限 infini と無際限 indefini を区別する。「正当に無限と呼ぶのは、その全ての部分において限界を認めないものだけであり、その意味では神のみが無限である。それに対し、ある面においてのみ終りがないものを、無際限と呼ぶ。というのは、その全ての部分において、終りや限界をもたないのではないからであり、それは、例えば、想像された空間の拡がりとか、数の加算とか、量の部分への分割性などである。」① デカルトは、無限を把握 comprendre することは出来ないが、いかなる限界も持たないものとして明晰・判明に理解 entendre することは出来るという。もちろん、無際限についても限界がないという点でそれは同様であろう。延長の無限分割はどこまでも分割され続けるという仕方でしか理解されないのである。

数学で出てくる無限は、デカルトの区別からすると、無際限ということになる。そしてこの無限は、明晰・判明には把握されないのであり、ただ理解されるだけである。その理解は、デカルトが正当に彼の解析幾何学にとり入れられるほど正確で厳密なものではない。②

機械的な曲線に属するサイクロイドの接線をデカルトは無限の極限をとることによって見い出したのであるが、幾何学的な曲線である円錐曲線に対する接線を決定する時、デカルトはフェルマと違って、少しもこの極限 limite の概念には依存していない。「幾何学」の中で述べられている接線を引く方法は、単に方程式の重根を求めることによって、極めて正確に求められるものであった。フェルマの方法は、微分法につながる「極大と極小の研究のための方法」を接線決定に応用したものであった。④ 1638年にメルセンヌを介して、フェルマとの間にこの接線決定の方法をめぐって論争が展開されるとき、デカルトは、フェルマの方法が、(1)デカルトの接線の方法、すなわち、二点で交わるのではなく一点で接するということを前提にすべきである、(2)それぞれの曲線のもつ特性によって方法が変わってくるので、普遍性がない、の二点を論拠とするが、⑤ 実際にデカルトが反対したものは、フェルマの方法自身、すなわち、等しくないものを、その極限をとることによって、等しいと置く「最大・最小の方法」にあるに違いないとヴィユマンは云っている。⑥ 方程式はあくまで、厳密な同値性をもつべきなのである。

無限や極限について、デカルトは正当にそれを理解し、その概念による問題の解決を一応正しいものと認めてはいたであろう。しかし、それを知性によって代数的な確かさとしては把握できず、想像的なところがあったのである。これは、実際には正しいものを、学問的にはとり込めないという点で、デカルト自身の方法の限界を示すものであった。

8. おわりに

我々は、デカルトが、その生涯において、はじめに数学的確実性に出会い、その確実性の根拠とその方法を反省することによって、普遍的な真理発見の方法＝普遍数学を確立したこと、この方法に則って数学を改善し、見事に近代的な解析幾何学を発明したこと、にもかかわらず、なお実際の数学的な課題がこの方法によっては把えられなかったこと、その点でこの方法の普遍性に問題があること、を見てきた。

デカルトの数学が、独創性の極めて薄いものであり、どちらかというと、近代によりも古代ギリシアの数学に結びついていると唱えるミローの評価は、①デカルトのこの方法の限界に支えられた意見であろう。確かに、彼の解析幾何学は、ギリシア以来の伝統の中で生じたものであり、その性格を作図の操作において色濃く持っている。サイクロイドにみられる求積にしても、アルキメデスの「取り尽し法」とほとんど同じ方法なのである。しかし、解析幾何学について云うと、やはり「次元」に対する考え方の革新は極めて大きなものであり、代数記号の改良とともに、評価はおろそかに出来ないであろう。また「無限」の扱いについても、デカルトの哲学を知っている我々にしてみると、妥当なものと思えるのである。明断・判明なもののみを真としようというデカルトの真理観はここでも貫徹されているのである。

ところで、数学者として出発し、このように大きな成果をもたらしたデカルトではあったが、既に、１６３０年にはこの数学の研究に対する魅力をほとんど失っていた。その年のメルセンヌへの手紙の中でデカルトは、「私は数学にとても飽きており、今ではそれをそれほど尊重していないので、それを解く労をとることはもはや出来ません」②と述べている。確かに、それ以後も数学の研究は続けているし、１６３７年の「幾何学」の中心的な部分を占めるパッポスの問題が、１６３１年にゴリウスによって提示された問題であることからみても、この間の数学研究が小さなものではないことは明らかである。しかし、すでに純粋数学の研究はデカルトの心中を離れつつあったことは確かであり、１６３９年のド・ボーヌの問題を最後に再び数学の問題を手にすることはないのである。

もちろん、これは単に興味の対象が移っていったとみることも出来るだろう。既に基本的な視点を築きあげた以上、もはやそれに長くとどまる必要はなく、それよりもこの確立された数学を使って、実際の自然研究に向うことが次の問題だとみることも出来るだろう。しかし、私には、むしろ、デカルトの数学の性格からの、つまり上に示した限界からの、ある意味で必然的な帰結として、デカルトが数学から離れ、自然学や形而上学へとすすまざるを得なかったのではないかと思われる。このことを立証するには、もっと全面的な研究が要求されるし、特に、デカルト自然学と数学の関係が解明される必要がある。しかしさしあたって我々は、初期に展開された「数学的な自然学」と「世界論」以後の「物語り的（記述的）自然学」というデカルト自然学の二つの性格の孕む問題が、デカルト数学の完成とともに後者の自然学がより主要には展開されるというパラドキシカルな事実とともに、このデカルト数学そのものの限界の中にあるといっていいだろう。その限界とは、有限な量の比例の理論にとどまって、無限や極限を明断・判明なものとして数学の領域において把握しえなかったということである。自然学の問題の多くがこの数学の限

界を越えたところにある結果、それにもかかわらず、明晰・判明な認識を自然の領域で確保しようとしたデカルトは、もはや純粋数学の領域を離れて、形而上学というもう一つのより強い確証をもつ根拠に支えられた自然学を展開するにいたるのである。

注

はじめに

① AT．Ⅵ．P．10

② 1619年4月23日　ベークマン宛の手紙

AT．X．P162～3

③ AT．V1．P．8

④ G．milhaud; Descartes Savant P．26

⑤ 1619年3月26日　ベークマン宛の手紙

AT．X．P．156～158

方法

① AT．X．P．214

② AT．X．P．403

③ AT．X．P．376～377

④ AT．X．P．381

⑤ AT．X．P．421

⑥ AT．X．P．421

⑦ AT．X．P．428

⑧ AT．X．P．434

⑨ AT．X．P．381～382

⑩ AT．X．P．384

⑪ AT．X．P．451

⑫ AT．X．P．451

⑬ AT．V1P．20

普遍数学

① AT．X．P．378

② AT．V1．P．20

③ milhaud．P．69

④ AT．V1．P．21

⑤ AT．X．P．399

⑥ AT．X．P．442

⑦ AT．X．P．365

⑧ AT．X．P．442

⑨ AT．X．P．442

「規則論」における数学の改良

① AT．X．P．442

② AT．X．P．446

③ AT．X．P．445

④ AT．X．P．446

⑤ 武隈良一、数学史、培風館、P．96

⑥ 同上

⑦ AT．X．P．448〜449

⑧ ブルバキ、数学史、東京図書　P．69

⑨ AT．X．P．452

⑩ このことは、1619年のCogitatione privatae以来、一貫してかわらない。

⑪ ブルバキ　P．32

解析幾何学

① AT．VI．P．379〜380

② AT．VI．P．378

③ AT．I．P．254

④ AT．VI．P．380

デカルト解析幾何学の限界

① AT．VI．　Geometrie 第2巻

② AT．VI．P．390

③ 同上

④ 同上

⑤ 1638年3月27日、メルセンヌへの手紙
AT．II．P．134

⑥ 1638年8月23日、メルセンヌへの手紙
AT．II．P．307

⑦ 1639年2月20日　ド・ボーヌへの手紙

AT. Ⅱ. P. 510

⑧ 1639年2月20日　ド・ボーヌへの手紙

AT. Ⅱ. P. 517

無限について

① AT. 1X. P. 89〜90

② 1630月4月15日　メルセンヌへの手紙の中でデカルトは、無限について、次のように語っている。「あなたは、もし無限な線があるなら、その線は無限のピエーと無限のトワの数を持つのであり、従って無限のピエーの数は、無限のトワの数より6倍大きいであろうとおっしゃる。— 私はそのことを全て認めます。— 従って、このトワの無限の数の方は、無限ではないのである。— 私はその結論を否定します。— しかし、一つの無限は、他の無限よりより大きいことはあり得ない。なぜそうでないのか？どこに誤りがあるのか？　主要には、例えば6による掛け算が無限と少しも関係のない有限な関係である今の場合のように、有限な関係において、単により大きい場合だからである。そしてさらに、もし我々が理解することが出来るならそれは無限であることを止めるのだから、いかなる理由であなたは、一つの無限が他の無限より大きいかどうかを判断するのか？」

③ AT. V1. P. 418

④ 武隈良一、数学史、P. 108〜9

⑤ 1638年1月. メルセンヌへの手紙

AT. 1. P. 486

⑥ VuiIlemin ; Mathcmatiques et Metaphysique chez Descartes P. 62

① MiIhaud P. 226

② 1630年4月15日. メルセンヌへの手紙

〔哲学（哲学）博士課程三回生〕