RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B64 (2017), 175–194

点付き安定曲線上の休眠乍の数え上げ：研究報告
(Counting dormant opers on a pointed stable curve : a research announcement)

By

若林 泰央 (Yasuhiro WAKABAYASHI)*

Abstract

This article includes a partial explanation of the diversity of (dormant) opers (and their moduli) as well as a research announcement for some results of the paper titled "A theory of dormant opers on pointed stable curves—a proof of Joshi's conjecture—" (cf. [18]). First, we recall the notion of a projective structure (as well as an indigenous bundle) defined on a Riemann surface, which is equivalent to the notion of an $\mathfrak{sl}_2$-oper. Next, we give the definition of a dormant $\mathfrak{g}$-oper (for each semisimple Lie algebra $\mathfrak{g}$), which is defined on an algebraic curve in positive characteristic. Finally, we propose some results, concerning an explicit computation of the number of dormant opers on a sufficiently general curve.

§1. 序

本稿の目的は論文 "A theory of dormant opers on pointed stable curves—a proof of Joshi's conjecture—" (cf. [18]) で議論された、点付き安定曲線族上の（休眠）乍の定義及びそのモジュライに関するいくつかの結果について簡単に紹介することにある。

この和文記事において「乍（さ）」と呼んでいるものは、A. Beilinson-V. Drinfeld（cf. [2], Definition 3.1.3）により "oper" との呼び名で導入された概念を指している [1]。乍、もしく

Received April 23, 2015. Revised May 31, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 14H10, 14H60.
Key Words: *projective structure, indigenous bundle, pointed stable curve, oper, dormant oper, p-adic Teichmüller theory, p-curvature, spin network, fusion rule.*
Supported by the Grant-in-Aid for Scientific Research (KAKENHI No. 27-2721) and the Grant-in-Aid for JSPS fellows.
*Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro, Tokyo, 153-8914, Japan.
e-mail: wkbysh@ms.u-tokyo.ac.jp
[1] 後述するが、"oper" は "operator（＝作用素）" に因んでいる（operator の語根）為、対応する漢字「作」の初文としての「乍」を oper の和名とすることにした。

は半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対する $\mathfrak{g}$ 乍とは、代数曲線もしくは（穴開き）形式円盤上の然るべき可積分主束であり、代数曲線が複素数体 $\mathbb{C}$ 上のときは可積分系やループ群の表現論において中心的な対象として登場する。それらは一般化 KdV 階層の状態空間を構成するものとして [4] で扱われた然るべき接続であり、 [2] においては幾何的ラングランズ問題の文脈において（座標に依存しない記述のもと）導入された。乍はその名 “oper” の由来ともなっているように、($\mathfrak{g}$ が古典型のとき）或る種の直線束間の微分作用素と対応する等、多面的な表情を持っている。特に本稿の §2 では、$\mathfrak{sl}_2$ 乍と同値な概念であり、R. C. Gunning より [5] において扱われた（Riemann 面上の）「射影構造」及び「固有束」なる概念について触れる。

正標数の代数曲線における乍の理論は、望月新一氏により基礎付けられた p 進 Teichmüller 理論に端を発する。誤解を恐れず述べるならば、p 進 Teichmüller 理論とは正標数体上定義された双曲的代数曲線の「然るべき $\mathfrak{sl}_2$ 乍（＝固有束）を用いた」p 進持ち上げに関する理論である。他の文脈においても近年注目されつつあるが、それらの眼目はいずれにせよ、「(乍の下部）接続の p 曲率の研究」に集約される。(接続の p 曲率については §4.1 を参照されたい。）休眠乍（dormant oper）とは下部接続の p 曲率が零射となる乍のことを言い、定義からして正標数においてのみ考え得る数学的対象である。完全退化曲線上の休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍は 3 正則グラフを用いて組み合わせ論的な記述が可能であり（cf. 命題 5.3)、また、滑らかな代数曲線上の休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍は或る種の安定ベクトル束と対応付けられる（cf. 命題 5.1）など、様々な側面から捉えられる興味深い対象である。したがって、「休眠乍は一体どれくらい存在するのだろうか」という問いは基本的でかつ自然なものだろう。本稿の §6 では、その答えとなるような休眠乍の個数の明示的計算に関する結果について紹介する（cf. 定理 6.2；定理 6.3)。

§2. 位相閉曲面上の射影構造

一般的な状況のもとで乍の定義に触れる前に、先ず最も基本的な場合である「$\mathbb{C}$ 上定義された代数曲線上の $\mathfrak{sl}_2$ 乍」の場合について復習するところから始める。これは R. C. Gunning により導入された（cf. [5]）、Riemann 面上の「射影構造」及び「固有束」なる概念と一致するものである。

§2.1.

Σ を向き付け可能で連結な種数 $g>1$ の位相的閉曲面とする。Σ 上の複素構造とは、Σ の座標近傍系 [2]

$$\mathfrak{U}:=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha:U_\alpha\xrightarrow{\sim}V_\alpha)\}_{\alpha\in I}$$

（各 α に対し U_α は X の開集合、V_α は $\mathbb{C}$ の開集合、そして φ_α は同相写像）のうち以下の条件を満たすものが代表する（然るべき同値関係による）同値類 $[\mathfrak{U}]$ であった：

[2]座標近傍系の定義において「極大性」は仮定しない。

$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる任意の α, β に対し、座標変換 $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ は正則。

一つの複素構造を代表する座標近傍系は勿論たくさん存在し、それら一つ一つが構成する座標変換は様々な見た目をした正則写像である。ではその中で、定義可能な座標変換が尽く「或る種の代数的な対称性」のなかに収まるような特筆すべき座標近傍系として一体どのようなものが存在し、そしてそれらはどのくらいあるのだろうか。

§ 2.2.

例えば今、連結な種数 g コンパクト Riemann 面 X（$= \Sigma$ 上の複素構造）を固定する。古典的に良く知られる一意化定理より、（X は双曲型なので）上半平面 $\mathbb{H} := \{x + y \cdot \sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R}, y > 0\}$ $(\subseteq \mathbb{C})$ から X への正則被覆写像 $u_X : \mathbb{H} \to X$ が存在する [3]。この u_X を用いて定義される集合

$$\mathfrak{U}_{u_X} := \{(u_X(V), (u_X|_V)^{-1} : u_X(V) \xrightarrow{\sim} V) \mid V \text{ は } u_X|_V \text{ が単射となる } \mathbb{H} \text{ の開集合}\}$$

は X の複素構造を代表する座標近傍系の一つである。$\mathfrak{U}_{u_X}$ 内の座標近傍間の（定義可能な）座標変換は必ず $\mathbb{H}$ の或る自己同型を制限して得られるため、一次分数変換 $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ $\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})\right)$ として書き表される [4]。一般の座標近傍系が構成する座標変換は必ずしもこのように簡明な代数的函数により表されるわけではないため、これらは特別な対称性を持っていると言える。このような対称性を持つ座標近傍系を以下のように定義しよう。

定義 2.1. Σ 上の**射影座標近傍系**とは Σ の座標近傍系 $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ のうち、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in I$ に対して座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \xrightarrow{\sim} \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が（一意的に定まる）或る一次分数変換を $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ $(\subseteq \mathbb{C})$ へ制限した函数として書き表されるものをいう。

特に $\mathfrak{U}_{u_X}$ は Σ 上の射影座標近傍系であるため、Σ 上の射影座標近傍系全てからなる集合は空でない。この集合に次のような同値関係を定義する：

$$\mathfrak{U}_1 \sim \mathfrak{U}_2 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{U}_1 \cup \mathfrak{U}_2 \text{ が } \Sigma \text{ 上の射影座標近傍系}$$

この同値関係による各同値類 $[\mathfrak{U}]$ を Σ **上の射影構造**と呼ぶ。各射影構造 $[\mathfrak{U}]$ は複素構造、即ち Riemann 面 $X_{[\mathfrak{U}]}$ を定める（特に $X_{[\mathfrak{U}_{u_X}]} \cong X$）。$\Sigma$ 上の射影構造のうち、$X_{[\mathfrak{U}]}$ が Riemann 面 X と同型なものを X **上の射影構造**と呼ぶことにする。以下では、このよう

[3] u_X は X 上の基点の選択に準じて構成される。しかし、$\mathbb{H}$ の自己同型との合成の違いを除くならば、この u_X は基点の取り方に依らない。

[4] より強く、$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ の元により表される。そして、このような一次分数変換は一意的に定まる。

な X 上の射影構造全てからなる集合を $\mathcal{P}_X$ とおき、$\mathcal{P}_X$ が持つ自然な構造や対称性について確認しよう。

§ 2.3.

射影座標近傍系 $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \xrightarrow{\sim} V_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ と $\gamma \in \Gamma(X, \Omega_X^{\otimes 2})$ を取ろう。ここで、Ω_X は X 上の正則 1 次微分形式の層を表す。各 $\alpha \in I$ に対して或る V_α $(\subseteq \mathbb{C})$ 上の正則函数 h_α が存在して $\gamma|_{U_\alpha} = \varphi_\alpha^*(h_\alpha \cdot dz^{\otimes 2})$ となる。Schwarz 微分を $\mathcal{S}$ で表す、すなわち

$$f(z) \mapsto \mathcal{S}(f)(z) := \frac{2f'(z)f'''(z) - 3(f''(z))^2}{2(f'(z))^2}$$

とする。$\mathfrak{U}$ をより細かい座標近傍系に適宜取り替えることにより次が成り立つ（cf. [5], Corollary 1 の上の議論）：各 $\alpha \in I$ に対して V_α 上の正則函数 w_α で

$$h_\alpha = \mathcal{S}(w_\alpha)(z) \tag{2.1}$$

を満たすものが存在し（別の v_α が $h_\alpha = \mathcal{S}(v_\alpha)(z_\alpha)$ を満たす $\Longleftrightarrow$ 或る一次分数変換 A により $v_\alpha = A \circ w_\alpha$ となる）、$w_\alpha \circ \varphi_\alpha$ が座標近傍となる。すると、この座標近傍系 $\mathfrak{U}_\gamma := \{(U_\alpha, w_\alpha \circ \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ は射影座標近傍系となり、この同値類は $\mathfrak{U}$ の同値類と γ にしか依存しない。したがって、$([\mathfrak{U}], \gamma) \mapsto [\mathfrak{U}_\gamma]$ は well-defined な写像 $\mathcal{P}_X \times \Gamma(X, \Omega_X^{\otimes 2}) \to \mathcal{P}_X$ を定める。$\mathcal{P}_X$ の持つ性質として以下の主張は基本的かつ重要である。

定理 2.2 (cf. [5], Corollary 2)**.** 上で定義された写像は $\mathcal{P}_X$ 上の $\Gamma(X, \Omega_X^{\otimes 2})$ 作用を定め、これにより $\mathcal{P}_X$ は $\Gamma(X, \Omega_X^{\otimes 2})$ を随伴ベクトルとするアフィン空間となる。特に、$\mathcal{P}_X$ は自然に $3g-3$ 次元複素アフィン空間の構造を持つ。

§ 2.4.

それでは、この射影構造なる或る座標近傍系の情報を代数幾何的対象として記述することを考えよう。その対象物こそがまさに、§ 3 で導入する $\mathfrak{g}$ 乍の $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ の場合に他ならない。

X 上の射影座標近傍系 $\mathfrak{U} := \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ をとり、$\bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{P}^1$ ($\mathbb{P}^1$ は射影直線) に次のように同値関係を導入する：各 $u_\square \in U_\square, s_\square \in \mathbb{P}^1$（$\square = \alpha, \beta \in I$）に対して

$$(u_\alpha, s_\alpha) \sim (u_\beta, s_\beta) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset \text{ かつ } A_{\beta\alpha}(s_\alpha) = (s_\beta)$$

（ここで、$A_{\beta\alpha}$ は $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}|_{\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)}$ が定める一次分数変換を表す）。この同値関係で割った商

$$\mathcal{P}_{\mathfrak{U}} := \bigsqcup_{\alpha \in I} U_\alpha \times \mathbb{P}^1 / \sim$$

は Riemann 面 X 上の射影直線束となる。各 $\alpha \in I$ に対する U_α 上の自明な射影直線束 $U_\alpha \times \mathbb{P}^1$ には自明な（正則）接続が入るが、それらはこの同値関係に関して貼り合い $\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$

上の（正則）接続 $\nabla_{\mathfrak{U}}$ を構成する。このようにして決められた手続きに従い、$\mathfrak{U}$ から可積分射影直線束 $(\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}, \nabla_{\mathfrak{U}})$ を得る。

さらに各 α に対する合成射 $U_\alpha \overset{\varphi_\alpha}{\underset{\sim}{\to}} V_\alpha \hookrightarrow \mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{P}^1$ のグラフ $\sigma_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{P}^1$ は上で定義した同値関係に関して張り合い、$\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$ の大域切断 $\sigma_{\mathfrak{U}} : X \to \mathcal{P}_{\mathfrak{U}}$ を定義する。この切断を **Hodge 切断**と呼ぶ。$(\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}, \nabla_{\mathfrak{U}})$ の同型類と $\sigma_{\mathfrak{U}}$ の組は $\mathfrak{U}$ の同値類にしか依存しない。

定義 2.3. 可積分射影直線束 $(\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}, \nabla_{\mathfrak{U}})$ を**射影構造** $[\mathfrak{U}]$ **に付随するファイバー束**と呼ぶ。また、或る射影構造に付随するファイバー束と同型な X 上の可積分射影直線束を**固有束**と呼ぶ。

一つの固有束（の同型類）を誘導する射影構造は一意的に定まることが容易に確かめられるので、この対応 $[\mathfrak{U}] \mapsto (\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}, \nabla_{\mathfrak{U}})$ を介して射影構造の集合と固有束の同型類集合は同一視される。Riemann 面 X に対応する $\mathbb{C}$ 上の滑らかな固有代数曲線を X^{alg} とすると、$(\mathcal{P}_{\mathfrak{U}}, \nabla_{\mathfrak{U}})$ は X^{alg} 上の或る可積分射影直線束（これを**代数的固有束**と呼ぶことにする）の、（自然に存在する）局所環付き空間の間の射 $X \to X^{\mathrm{alg}}$ による引き戻しとして得られる。さらにこの代数的固有束は以下のように（$\mathbb{C}$ 上とは限らない）代数幾何的な特徴付けを持つ：

> X^{alg} **上の可積分射影直線束** $(\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}})$ **が代数的固有束である為の必要十分条件は、**$(*)$ **或る大域切断**[5] σ **が存在して** σ **に関する小平-Spencer 射**[6] $\mathcal{T}_{X^{\mathrm{alg}}/\mathbb{C}} \to \sigma^*(\mathcal{T}_{\mathcal{P}/X^{\mathrm{alg}}})$ **が同型となること、である。**

このような特徴付けにより X 上の射影構造は代数曲線 X^{alg} 上の「$\mathfrak{sl}_2$ 乍」（cf. 定義 3.1 (i)）と同値な概念であることがわかる。§3 以降では、§2.1 で投げかけた問いをさらに引き受けるかたちで、**正標数の**代数曲線上で良い対称性を持つ乍が一体どれくらい存在するのか考えたい。

§3. 点付き安定曲線族上の乍 (oper)

ここでは、一般的な状況のもとで「乍」なる概念について議論しよう。k を任意標数完全体とし、k 上定義された点付き安定曲線族上の乍及びそれらのモジュライスタックを導入する。$\mathbb{C}$ 上の滑らかな固有代数曲線の場合は [2] により定義されたものであり、ここに述べる定義は、（Fontaine-Illusie-Kato による）対数構造（のスタック版）、特に「log pole 付き微分加群」を用いた点付き安定曲線族への自然な一般化である。

---

[5] もちろんこれは固有束の Hodge 切断に対応するものである。

[6] 小平–Spencer 射の定義はここでは述べないが、本質的には定義 3.1 において定義される合成射 (3.5) のことである。

§ 3.1.

k 上の r 点付き種数 g 安定曲線（以下、(g,r) 型安定曲線）を分類するモジュライスタックを $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$、さらに

$$(f_{\mathfrak{tau}} : \mathfrak{C}_{g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}, \{\mathfrak{s}_i : \overline{\mathfrak{M}}_{g,r} \to \mathfrak{C}_{g,r}\}_{i=1}^r)$$

を $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の普遍的点付き安定曲線とする。ここで、$f_{\mathfrak{tau}} : \mathfrak{C}_{g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ はその半安定曲線、各 $\mathfrak{s}_i : \overline{\mathfrak{M}}_{g,r} \to \mathfrak{C}_{g,r}$ はその i 番目の標点を表す。$\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ には退化曲線を分類する無限遠因子から自然に対数構造が定まり、そして $\mathfrak{C}_{g,r}$ にはその無限遠因子の（$f_{\mathfrak{tau}}$ による）逆像と標点 $\{\mathfrak{s}_i\}_{i=1}^r$ との（因子としての）和から対数構造が定まる。得られた対数的スタックを各々$\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}^{\log}$、$\mathfrak{C}_{g,r}^{\log}$ と表す。

以下、$\mathfrak{Sch}_{/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}}$ を k 上の概型から $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ への k 上射すべてからなる圏とし、その対象 $s : S \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ を一つ固定する。特にこれは S 上の (g,r) 型安定曲線

$$\mathfrak{X}_{/S} := (f : X \to S, \{\sigma_i : S \to X\}_{i=1}^r)$$

を分類する。射 s、$s \times \mathrm{id}_{\mathfrak{C}_{g,r}}$ を通して $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}^{\log}$、$\mathfrak{C}_{g,r}^{\log}$ の対数構造を引き戻すことにより S、X $(= S \times_{\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}} \mathfrak{C}_{g,r})$ に各々対数構造を入れることにする。得られた対数スタックを $S^{\log}$、$X^{\log}$ と表すと、$X^{\log}$ は $S^{\log}$ 上対数的に滑らかである。特に対数的 1 次微分形式のなす層 $\Omega_{X^{\log}/S^{\log}}$ 及びその双対である対数的ベクトル場からなる層 $\mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}} := \Omega_{X^{\log}/S^{\log}}^{\vee}$ は直線束となる。

§ 3.2.

ここでは Lie 環に関する準備をする。$\mathbb{G}$ を k 上の連結な半単純代数群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とし、k 上定義された次のデータを固定する：

- $\mathbb{G}$ の極大トーラス $\mathbb{T}$；
- $\mathbb{T}$ を含む Borel 部分群 $\mathbb{B}$；
- $\mathbb{B}$ の $\mathbb{T}$ に関する単純ルート全てからなる集合 Γ の元 α に対する $\mathfrak{g}^\alpha$ の生成元 x_α。

ここで、$\mathbb{T}$ 及び $\mathbb{B}$ を固定することにより定まる正ルート、負ルートの集合を各々Σ^+ $(\subseteq \Gamma)$, Σ^- とし、各 $\alpha \in \Sigma := \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ に対して

$$\mathfrak{g}^\alpha := \left\{ x \in \mathfrak{g} \;\middle|\; \text{全ての } t \in \mathbb{T} \text{ に対して } \mathrm{ad}(t)(x) = \alpha(t) \cdot x \right\}$$

とおく。$\mathfrak{t}$, $\mathfrak{b}$ を各々$\mathbb{T}$, $\mathbb{B}$ の Lie 環とする（したがって $\mathfrak{t} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{g}$)。このとき、$\mathfrak{g}$ には自然な直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \Big(\bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{\beta \in \Sigma^-} \mathfrak{g}^\beta \Big)$$

（特に $\mathfrak{b} = \mathfrak{t} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Sigma^+} \mathfrak{g}^\alpha)$）が存在する。この直和分解を用いると、$\mathfrak{g}$ には次の 2 条件を満たすような一意的な降下フィルトレーション $\{\mathfrak{g}^j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ が定義される：

- $\mathfrak{g}^0 = \mathfrak{b}, \quad \mathfrak{g}^0/\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{t}, \quad \mathfrak{g}^1/\mathfrak{g}^2 = \bigoplus_{\alpha \in \Gamma} \mathfrak{g}^\alpha$;
- 任意の $j_1, j_2 \in \mathbb{Z}$ に対して $[\mathfrak{g}^{j_1}, \mathfrak{g}^{j_2}] \subseteq \mathfrak{g}^{j_1+j_2}$。

次に、以下のように $p_1, \check{\rho} \in \mathfrak{g}$ を定義しよう：

$$p_1 := \sum_{\alpha \in \Gamma} x_\alpha, \quad \check{\rho} := \sum_{\alpha \in \Gamma} \check{\omega}_\alpha,$$

ここで、$\check{\omega}_\alpha$ は α の基本コウェイトとする。このとき、各 $\alpha \in \Gamma$ に対し $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ の生成元 y_α が存在して次の性質を満たす：

$$p_{-1} := \sum_{\alpha \in \Gamma} y_\alpha \in \mathfrak{g}^{-1}$$

とおくと $\{p_{-1}, 2\check{\rho}, p_1\}$ が $\mathfrak{sl}_2$ トリプルになる。

以降では, §3 の終わりまで次の 3 条件 $(\mathrm{Char})_0$、$(\mathrm{Char})_p$、$(\mathrm{Char})_p^{\mathfrak{sl}}$ のうち少なくともどれか 1 つが成り立つと仮定する。

$(\mathrm{Char})_0$: $\mathrm{char}(k) = 0$;

$(\mathrm{Char})_p$: $\mathrm{char}(k) =: p > 2 \cdot h$、ただし h は $\mathbb{G}$ の Coxeter 数とする;

$(\mathrm{Char})_p^{\mathfrak{sl}}$: $\mathrm{char}(k) =: p > 0$ かつ $\mathbb{G} = \mathrm{PGL}_n$ $(n < p)$.

§ 3.3.

点付き安定曲線 $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $\mathfrak{g}$ 乍の定義を述べる (cf. 定義 3.1)。そのためにまず、以下のように表記の準備をしよう；任意の k 上代数群 $\mathbb{G}'$ と X 上の右 $\mathbb{G}'$ 主束 $\pi : \mathcal{E} \to X$ が与えられているとする。$\mathfrak{h}$ を左 $\mathbb{G}'$ 作用付き k ベクトル空間とするとき、相対アフィン空間 $\mathcal{E} \times^{\mathbb{G}'} \mathfrak{h}$ に対応する X 上のベクトル束を $\mathfrak{h}_\mathcal{E}$ と表す。また、$X^{\log}$ の対数構造を π を通して引き戻すことにより $\mathcal{E}$ に対数構造を入れ、その対数スタックを $\mathcal{E}^{\log}$ とする。$\mathcal{E}^{\log}$ の $S^{\log}$ 上の対数的ベクトル場の層 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{\log}/S^{\log}}$ の順像 $\pi_*(\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{\log}/S^{\log}})$ には自然に右 $\mathbb{G}'$ 作用が入るため、その $\mathbb{G}'$ 不変な切断からなる部分層を $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}^{\log}/S^{\log}} := (\pi_*(\mathcal{T}_{\mathcal{E}^{\log}/S^{\log}}))^{\mathbb{G}'}$ と表す。$\mathbb{G}'$ の Lie 環を $\mathfrak{g}'$ とおくと、π を微分することにより以下の短完全列を得る：

$$0 \longrightarrow \mathfrak{g}'_\mathcal{E} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}^{\log}/S^{\log}} \xrightarrow{\mathfrak{a}_\mathcal{E}^{\log}} \mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}} \longrightarrow 0. \tag{3.1}$$

さて、$\pi_\mathbb{B} : \mathcal{E}_\mathbb{B} \to X$ を X 上の右 $\mathbb{B}$ 主束とし、$\pi_\mathbb{G} : \mathcal{E}_\mathbb{G} \to X$ を $\pi_\mathbb{B}$ から（$\mathbb{B} \hookrightarrow \mathbb{G}$ による構造群の変換により）誘導される右 $\mathbb{G}$ 主束とする。（逆に言えば、この $\mathcal{E}_\mathbb{G}$ は右 $\mathbb{B}$ 主束 $\mathcal{E}_\mathbb{B}$ と右 $\mathbb{G}$ 主束の間の同型射 $i : \mathcal{E}_\mathbb{B} \times^\mathbb{B} \mathbb{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}_\mathbb{G}$ を持つ。このような組 $(\mathcal{E}_\mathbb{B}, i)$、もしくは簡単のため $\mathcal{E}_\mathbb{B}$ のみを言及して、$\mathcal{E}_\mathbb{G}$ の **Borel 還元**と呼ぶことにする。）X 上の自然な射 $\mathcal{E}_\mathbb{B} \to \mathcal{E}_\mathbb{G}$ はベクトル束の同型 $\mathfrak{g}_{\mathcal{E}_\mathbb{B}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\mathcal{E}_\mathbb{G}}$ を与えると同時に以下のような、$\mathcal{E}_\mathbb{B}$、$\mathcal{E}_\mathbb{G}$ 各々が

誘導する短完全列 (3.1) の間の射を与える

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathfrak{b}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}} \arrow[r] \arrow[d, "\iota_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}"'] & \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}^{\log}/S^{\log}} \arrow[r, "\mathfrak{a}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}^{\log}"] \arrow[d, "\widetilde{\iota}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}"'] & \mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathfrak{g}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}} \arrow[r] & \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}} \arrow[r, "\mathfrak{a}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}}^{\log}"'] & \mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

(射 $\iota_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}, \widetilde{\iota}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}$ は共に単射)。各 $\mathfrak{g}^j$ $(\subseteq \mathfrak{g})$ は $\mathbb{B}$ 作用で閉じているため、$\mathfrak{g}^j_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}$ $(j \in \mathbb{Z})$ は定義可能であり、$\{\mathfrak{g}^j_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ は $\mathfrak{g}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}$ $(\cong \mathfrak{g}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}})$ の降下フィルトレーションを定める。一方、 (3.2) は次のような合成された同型射をつくる：

$$\mathfrak{g}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}/\mathfrak{g}^0_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}}/\iota_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}/\widetilde{\iota}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}^{\log}/S^{\log}}). \tag{3.3}$$

この合成射を通して $\{\mathfrak{g}^j_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}\}_{j\leq 0}$ は $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}$ 上に以下の 2 条件を満たす降下フィルトレーション $\widetilde{\mathcal{T}}^j_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}$ $(j \leq 0)$ を誘導する：

- $\widetilde{\iota}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{b}}(\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}^{\log}/S^{\log}}) = \widetilde{\mathcal{T}}^0_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}$；
- 任意の $j \leq 0$ に対して (3.3) は部分商の間の同型射 $\mathfrak{g}^{j-1}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}/\mathfrak{g}^j_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{T}}^{j-1}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}/\widetilde{\mathcal{T}}^j_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}$ を誘導する。

各 $\mathfrak{g}^{-\alpha}$ $(\alpha \in \Gamma)$ は $\mathbb{B}$ 作用で閉じているため、自然な直和分解 $\mathfrak{g}^{-1}/\mathfrak{g}^0 = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma}\mathfrak{g}^{-\alpha}$ は以下の直和分解を誘導する：

$$\widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}/\widetilde{\mathcal{T}}^0_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}} = \bigoplus_{\alpha\in\Gamma}\mathfrak{g}^{-\alpha}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}}. \tag{3.4}$$

定義 3.1. (cf. [18], Definition 2.2.1[7])

(i) $\mathcal{E}^\spadesuit$ を次のような組とする：

$$\mathcal{E}^\spadesuit := (\pi_{\mathbb{B}} : \mathcal{E}_{\mathbb{B}} \to X, \nabla_{\mathcal{E}} : \mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}).$$

ここで $\mathcal{E}_{\mathbb{B}}$ は X 上の右 $\mathbb{B}$ 主束、$\nabla_{\mathcal{E}}$ を $\mathcal{E}_{\mathbb{B}}$ から誘導される右 $\mathbb{G}$ 主束 $\pi_{\mathbb{G}} : \mathcal{E}_{\mathbb{G}} \to X$ 上の S 対数的接続（つまり $\mathcal{O}_X$ 線型射であり $\mathfrak{a}^{\log}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}} \circ \nabla_{\mathcal{E}} = \mathrm{id}_{\mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}}}$ を満たす）とする。次の 2 条件が満たされるとき、$\mathcal{E}^\spadesuit$ を「$\mathfrak{X}_{/S}$ **上の** $\mathfrak{g}$ **乍**（$\mathfrak{g}$-oper on $\mathfrak{X}_{/S}$）」と呼ぶ。

- $\nabla_{\mathcal{E}}(\mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}}) \subseteq \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}$；
- 任意の $\alpha \in \Gamma$ に対して合成射

$$\mathcal{T}_{X^{\log}/S^{\log}} \xrightarrow{\nabla_{\mathcal{E}}} \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}} \twoheadrightarrow \widetilde{\mathcal{T}}^{-1}_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}}/\widetilde{\mathcal{T}}^0_{\mathcal{E}_{\mathbb{G}}^{\log}/S^{\log}} \twoheadrightarrow \mathfrak{g}^{-\alpha}_{\mathcal{E}_{\mathbb{B}}} \tag{3.5}$$

（最後の射は分解 (3.4) により得られる自然な射影）は同型射である。

[7] [18], Definition 2.2.1 ではより一般に、$\hbar \in \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ としたときの「$\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $(\mathfrak{g}, \hbar)$-oper」なる概念を定義している。この記事では $\hbar = 1$ の場合のみを扱うことにする。

(ii) $\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_{\mathbb{B}}, \nabla_{\mathcal{E}})$ 及び $\mathcal{F}^{\spadesuit} := (\mathcal{F}_{\mathbb{B}}, \nabla_{\mathcal{F}})$ を $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $\mathfrak{g}$ 乍とする。右 $\mathbb{B}$ 主束の同型射 $\mathcal{E}_{\mathbb{B}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathbb{B}}$ のうち、誘導される右 $\mathbb{G}$ 主束の同型射 $(\mathcal{E}_{\mathbb{B}} \times^{\mathbb{B}} \mathbb{G} =:)\ \mathcal{E}_{\mathbb{G}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}_{\mathbb{G}}\ (:= \mathcal{F}_{\mathbb{B}} \times^{\mathbb{B}} \mathbb{G})$ が S 対数的接続 $\nabla_{\mathcal{E}}, \nabla_{\mathcal{F}}$ と可換なものを $\mathcal{E}^{\spadesuit}$ から $\mathcal{F}^{\spadesuit}$ への（$\mathfrak{g}$ 乍としての）**同型**と呼ぶ。

特に $k = S = \mathrm{Spec}(\mathbb{C})$, $r = 0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, そして X が $\mathbb{C}$ 上滑らかなとき、§2 で論じた「代数的固有束」の特徴付けは「$\mathfrak{sl}_2$ 乍」の定義として読み替えることができる。実際、$(\mathcal{P}, \nabla_{\mathcal{P}})$ を代数的固有束とし、$(\mathcal{P}_{\mathrm{PGL}_2}, \nabla_{\mathcal{P}_{\mathrm{PGL}_2}})$ を対応する可積分 PGL_2 主束とすると、Hodge 切断 σ は $\mathcal{P}_{\mathrm{PGL}_2}$ の Borel 還元 $\mathcal{P}_{\sigma}$ を定める。さらに小平-Spencer 射の同型性は (3.5) の同型性のことであるから、$(\mathcal{P}_{\sigma}, \nabla_{\mathcal{P}_{\mathrm{PGL}_2}})$ は $\mathfrak{X}_{/\mathbb{C}}$ 上の $\mathfrak{sl}_2$ 乍となる。この対応により（代数的）固有束（の同型類）と $\mathfrak{sl}_2$ 乍（の同型類）は同一視される。

§ 3.4.

$\mathfrak{sl}_n$ 乍の場合は可積分ベクトル束の言葉で乍の定義を表現し直すことが出来る。そのことを見るために次のようなデータを考えよう：

$$(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n),$$

ただし、

- $\mathcal{F}$ は X 上の階数 n ベクトル束；
- $\nabla_{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{F}$ 上の接続 $\mathcal{F} \to \Omega_{X^{\log}/S^{\log}} \otimes \mathcal{F}$（つまり、任意の局所切断 $a \in \mathcal{O}_X$, $v \in \mathcal{F}$ に対して $\nabla_{\mathcal{F}}(a \cdot v) = da \otimes v + a \cdot \nabla_{\mathcal{F}}(v)$ を満たす [8]）；
- $\{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n$ は $\mathcal{F}$ のベクトル束からなる降下フィルトレーション

$$0 = \mathcal{F}^n \subseteq \mathcal{F}^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}^0 = \mathcal{F}$$

であり、次の条件を満たすとする：

- 各部分商 $\mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1}$ $(0 \leq j \leq n-1)$ は直線束；
- $\nabla_{\mathcal{F}}(\mathcal{F}^j) \subseteq \Omega_{X^{\log}/S^{\log}} \otimes \mathcal{F}^{j-1}$ $(1 \leq j \leq n-1)$；
- 各局所切断 $a \in \mathcal{F}^j$ に対して $\overline{a} \mapsto \overline{\nabla_{\mathcal{F}}(a)}$（$\overline{(-)}$ はそれぞれの商への像を表す）により定義される $\mathcal{O}_X$ 線型射

$$\mathfrak{ks}_{\mathcal{F}}^j : \mathcal{F}^j/\mathcal{F}^{j+1} \to \Omega_{X^{\log}/S^{\log}} \otimes (\mathcal{F}^{j-1}/\mathcal{F}^j)$$

は同型。

[8] ここでの接続の定義は、定義 3.1 (i) で現れる接続の定義とは一見異なって見える。しかし、[18], Remark 4.1.1 で論じられているように、ベクトル束 $\mathcal{F}$ 上の（ここでの定義による）接続と $\mathcal{F}$ に対応する GL_n 主束の（定義 3.1 (i) で現れる定義による）接続との間には自然な一対一対応が存在する。

このとき、自然な商 $\mathrm{GL}_n \to \mathrm{PGL}_n$ による構造群の変換を適用することにより $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}})$ は可積分 PGL_n 主束を定め、さらにフィルトレーション $\{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n$ はその PGL_n 主束の Borel 還元を与える。容易に確かめられるように、このように構成された Borel 還元と PGL_n 主束上の接続との組は $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $\mathfrak{sl}_n$ 乍となる。この $\mathfrak{sl}_n$ 乍を

$$(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)^{\spadesuit}$$

と表す。さらに上のようなデータ $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}}, \{\mathcal{F}^j\}_{j=0}^n)$ 全てからなる集合に然るべき同値関係（cf. [18], Definition 4.2.2）を定義すると、その商集合と $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $\mathfrak{sl}_n$ 乍の同型類集合は一対一対応する（cf. [18], Proposition 4.3.2）。

§ 3.5.

次に、 [18], Definition 2.9.2 で導入した、乍の半径（安定曲線の各標点上で課せられる然るべき境界条件）について定義を確認する [9]。$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{t}$ の $\mathbb{G}$, $\mathbb{W}$ (ただし、$\mathbb{W}$ は $(\mathbb{G}, \mathbb{T})$ の Weyl 群とする) による随伴作用の GIT 商をそれぞれ $\mathfrak{g}/\!\!/\mathbb{G}$, $\mathfrak{c}$（$:= \mathfrak{t}/\!\!/\mathbb{W}$）と書くと、(条件 $(\mathrm{Char})_0$, $(\mathrm{Char})_p$ もしくは $(\mathrm{Char})_p^{\mathfrak{sl}}$ を仮定しているので）自然な射 $\mathfrak{c} \to \mathfrak{g}/\!\!/\mathbb{G}$ は同型射となる。したがって、その逆射を用いて合成射

$$\chi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}/\!\!/\mathbb{G} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{c}$$

を得る。χ は商 $\mathfrak{g} \to [\mathfrak{g}/\mathbb{G}]$ を経由する。ここで、$[\mathfrak{g}/\mathbb{G}]$ は $\mathfrak{g}$ の $\mathbb{G}$ 作用による商スタック（各 k 上の概型 T に対し、T 上の右 $\mathbb{G}$ 主束 $\mathcal{F}$ と $R \in \Gamma(T, \mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$ の組 $(\mathcal{F}, R)$ による亜群を分類するスタック）を表す。結果として得られる射を

$$[\chi] : [\mathfrak{g}/\mathbb{G}] \to \mathfrak{c}$$

と表す。

定義 3.2 (cf. [18], Definition 2.9.2)**.**

(i) $r > 0$ と仮定し、$\mathcal{E}^{\spadesuit} := (\mathcal{E}_{\mathbb{B}}, \nabla_{\mathcal{E}})$ を $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $\mathfrak{g}$ 乍、$\rho := (\rho_i)_{i=1}^r$ を $\mathfrak{c}^{\times r}$（$=\mathfrak{c}$ の r 個直積）の k 有理点とする。任意の $i \in \{1, \cdots, r\}$ に対して、S 上の右 $\mathbb{G}$ 主束 $\sigma_i^*(\mathcal{E}_{\mathbb{G}})$

[9] $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のときは [11], Chap. I, § 1.2 で登場した「固有束（$= \mathfrak{sl}_2$ 乍）の半径」なる概念と（完全にではないが）一致し、乍における「半径」はこの一般化として名付けたものである。Riemann 面をマーキングに従ってパンツ分解した際の各構成要素がもつ境界の長さ（特にその円周 S^1 の半径）などを測ることにより、Teichmüller 空間に大域的座標が入る。これは、(後述の定理 3.3 からわかるように)「$(g, r) = (0, 3)$ のとき $\mathfrak{sl}_2$-oper は各標点における半径の情報で一意的に定まる」ことと対応する主張とみなせる。我々が当該境界条件を「半径」と呼んでいる妥当性はこの類似に基づいている。

と $(\mathcal{E}_{\mathbb{G}}, \nabla_{\mathcal{E}})$ の σ_i でのモノドロミー[10] $\mu_i^{(\mathcal{E}_{\mathbb{G}}, \nabla_{\mathcal{E}})} \in \Gamma(S, \mathfrak{g}_{\sigma_i^*(\mathcal{E}_{\mathbb{G}})})$ の組 $(\sigma_i^*(\mathcal{E}_{\mathbb{G}}), \mu_i^{(\mathcal{E}_{\mathbb{G}}, \nabla_{\mathcal{E}})})$ を分類する $[\mathfrak{g}/\mathbb{G}]$ の S 有理点と $[\chi]$ との合成射が ρ_i を経由するとき、$\mathcal{E}^{\spadesuit}$ を**半径** ρ **であるという**。

(ii) 便宜のため、($r = 0$ の場合も含め) $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の任意の $\mathfrak{g}$ 乍を**半径** $\emptyset$ **である**ということにする。

各 $\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \sqcup \{\emptyset\}$ に対して $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ を半径 ρ の $\mathfrak{g}$ 乍を分類するモジュライ函手とする。すなわち、$\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ とは反変函手

$$\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r} : \mathfrak{Sch}_{/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}} \to \mathfrak{Set}$$

($\mathfrak{Set}$ は集合の圏を表す) であり、各 $v \in \mathrm{ob}(\mathfrak{Sch}_{/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}})$ に対して「v が分類する安定曲線上の $\mathfrak{g}$ 乍のうち半径が ρ であるものの同型類集合」$\in \mathrm{ob}(\mathfrak{Set})$ を割り当てるものとする。$(\mathfrak{X}_{/S}, \mathcal{E}^{\spadesuit}) \mapsto \mathfrak{X}_{/S}$ により定まる忘却函手 $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r} \to \overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ を構造射とすることにより、$\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ を $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上のスタックとみなす。このモジュライ函手に関する表現可能性として以下が成り立つ (定理 2.2 の一般化)。

定理 3.3 (cf. [18], Theorem A)**.** 各 $\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \sqcup \{\emptyset\}$ に対して $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上相対的アフィン空間により表現され、その相対次元 D_ρ は

$$\begin{aligned} &\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \text{ のとき} \quad D_\rho = (g-1)\cdot \dim(\mathfrak{g}) + \frac{r}{2}\cdot(\dim(\mathfrak{g}) - \mathrm{rk}(\mathfrak{g})), \\ &\rho = \emptyset \qquad\quad \text{ のとき} \quad D_\rho = (g-1)\cdot \dim(\mathfrak{g}) + \frac{r}{2}\cdot(\dim(\mathfrak{g}) + \mathrm{rk}(\mathfrak{g}))) \end{aligned}$$

となる。特に $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ は $3g-3+r+D_\rho$ 次元の k 上幾何的連結で滑らかな Deligne-Mumford スタックにより表現される。

§ 4. 休眠乍 (dormant oper)

この § 4 では基礎体 k が正標数の場合にのみ定義され得る「良い対称性」を持つ乍とそのモジュライについて考える。

---

[10] モノドロミーの一般的な定義をここで述べる (cf. [18], Definition 1.6.1) 。X 上の可積分 $\mathbb{G}$ 主束 $(\pi : \mathcal{F} \to X, \nabla_{\mathcal{F}} : \mathcal{T}_{X^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}})$ が与えられているとする。随伴 "$\sigma_i^*(-) \dashv \sigma_{i*}(-)$" により $\sigma^*(\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}})$ の恒等射に対応する射 $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}} \to \sigma_*(\sigma^*(\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}}))$ と $\nabla_{\mathcal{F}}$ との合成射の像は $\sigma_*(\sigma^*(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}))$ ($\subseteq \sigma_*(\sigma^*(\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}}))$) に含まれる。得られた $\mathcal{T}_{X^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}} \to \sigma_*(\sigma^*(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}))$ に (再び随伴 "$\sigma_i^*(-) \dashv \sigma_{i*}(-)$"により) 対応する射 $\sigma^*(\mathcal{T}_{X^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}}) \to \sigma^*(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$ は大域切断 $\mu_i^{(\mathcal{F},\nabla_{\mathcal{F}})} \in \Gamma(S, \sigma^*(\Omega_{X^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}}) \otimes \sigma^*(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}}))$ を定める。$\sigma^*(\Omega_{X^{\mathrm{log}}/S^{\mathrm{log}}})$, $\sigma^*(\mathfrak{g}_{\mathcal{F}})$ は各々標準的に $\mathcal{O}_S$, $\mathfrak{g}_{\sigma^*(\mathcal{F})}$ と同型なので、$\mu_i^{(\mathcal{F},\nabla_{\mathcal{F}})}$ は $\Gamma(S, \mathfrak{g}_{\sigma^*(\mathcal{F})})$ の元と見なされ、これを $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}})$ **の** σ_i **でのモノドロミー**と呼ぶ。

§ 4.1.

ここでは、「p 曲率」なる概念について復習する（以下の説明にて触れる可積分主束の「曲率」及び「p 曲率」については [18], § 1, § 3 を参照されたい）。まずは k を引き続き任意標数の完全体、$T^{\log}$ を k 上の対数的概型、$Y^{\log}$ を $T^{\log}$ 上対数的に滑らかな対数的概型、$\mathbb{G}'$ を k 上代数群、そして $(\mathcal{F}, \nabla_{\mathcal{F}})$ を $Y^{\log}/S^{\log}$ 上の可積分 $\mathbb{G}'$ 主束とする。$\nabla_{\mathcal{F}}$ は（定義より）$\mathcal{T}_{Y^{\log}/T^{\log}}$ から $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\log}/T^{\log}}$ への射であるが、$\mathcal{T}_{Y^{\log}/T^{\log}}$ 及び $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\log}/T^{\log}}$ には自然に Lie 代数の構造（=Lie ブラケット $[-,-]$）が入る。接続 $\nabla_{\mathcal{F}}$ に対する曲率とはまさに

曲率＝ $\nabla_{\mathcal{F}}$ に関する $[-,-]$ 構造の可換性への障害

として定義されるものだった [11]。ただし、Y の T 上の相対次元が 1 ならば、任意の接続においてその曲率は 0（零射）となる。

では、次に k が標数 $p > 0$ の場合について考える。$\mathcal{T}_{Y^{\log}/T^{\log}}$ 及び $\widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\log}/Y^{\log}}$ には Lie ブラケットの構造に加えて所謂、p 冪構造と呼ばれる（標数 0 のときには定義されることのない）付加的構造 “$\partial \mapsto \partial^{(p)}$” (cf. [12], Proposition 1.2.1) が入る [12]。p 冪構造 $(-)^{(p)}$ を持つ Lie 代数は一般に p-Lie 代数と呼ばれるが、接続 $\nabla_{\mathcal{F}}$ に対する p 曲率とはまさに

p 曲率＝ $\nabla_{\mathcal{F}}$ に関する $(-)^{(p)}$ 構造の可換性への障害

として定義される。正確に定義すると、p 曲率とは次のようにして定まる $\mathcal{O}_Y$ 線形射のことである：

$$\begin{aligned} {}^p\psi^{(\mathcal{F},\nabla_{\mathcal{F}})} : F_Y^*(\mathcal{T}_{Y^{\log}/T^{\log}}) &\to \mathfrak{g}_{\mathcal{F}} \\ F_Y^*(\partial) &\mapsto (\nabla_{\mathcal{F}}(\partial))^{(p)} - \nabla_{\mathcal{F}}(\partial^{(p)}) \end{aligned}$$

（ここで、F_Y は $Y^{\log}$ の下部概型 Y の絶対 Frobenius 射を表す）。特に、曲率と p 曲率がともに零射となる接続は p-Lie 代数の構造を保つ射 $\mathcal{T}_{Y^{\log}/T^{\log}} \to \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{F}^{\log}/T^{\log}}$ であり、その意味において $\nabla_{\mathcal{F}}$ は「良い対称性を持つ」と言うことができる。

例 4.1. p 曲率が零射となる接続の例を挙げよう。簡単のため、$\mathbb{G}' := \mathrm{GL}_n$（もしくは $\mathbb{G}'$ が GL_n の部分群）のとき、つまり $\mathbb{G}'$ 主束がベクトル束と対応する場合について考える（一般の場合は [18], § 3.3 を参照）。

$Y_T^{(1)}$ を Y の T 上 Frobenius 捻り、そして $F_{Y/T} : Y \to Y_T^{(1)}$ を相対 Frobenius 射、そして $\mathcal{V}$ を $Y_T^{(1)}$ 上のベクトル束とする。このとき、$F_{Y/T}$ で引き戻した Y 上のベクトル束 $F_{Y/T}^*(\mathcal{V})$ の上には、部分層 $F_{Y/T}^{-1}(\mathcal{V})$ の任意の局所切断が水平となるような接続

$$\nabla_{\mathcal{V}}^{\mathrm{can}} : F_{Y/T}^*(\mathcal{V}) \to \Omega_{Y^{\log}/T^{\log}} \otimes F_{Y/T}^*(\mathcal{V})$$

が一意的に存在する。容易に確かめられるように、（対応する GL_n 主束上の）この接続の p 曲率は零射となる [13]。

[11] 実際、曲率は射 $\bigwedge^2 \mathcal{T}_{Y^{\log}/T^{\log}} \ni \partial_1 \wedge \partial_2 \mapsto [\nabla_{\mathcal{F}}(\partial_1), \nabla_{\mathcal{F}}(\partial_2)] - \nabla_{\mathcal{F}}([\partial_1, \partial_2]) \in \mathfrak{g}'_{\mathcal{F}}$ として定義される。

[12] $Y^{\log}$ が $T^{\log}$ 上相対的に自明な対数構造のときは $\partial^{(p)}$ は導分 ∂ の p 回合成と一致する。

[13] $Y^{\log}$ の対数構造が $T^{\log}$ 上相対的に自明なとき、$\mathcal{V} \mapsto (F_{Y/T}^*(\mathcal{V}), \nabla_{\mathcal{V}}^{\mathrm{can}})$ は、「$Y_T^{(1)}$ 上のベクトル束のなす圏」から「$Y^{\log}/T^{\log}$ 上の可積分ベクトル束のなす圏」への圏同値を誘導する。

§ 4.2.

以下、k は標数 $p > 0$ である（つまり条件 $(\mathrm{Char})_p$ もしくは $(\mathrm{Char})_p^{\mathfrak{sl}}$ を満たす）ことを仮定し、さらに $\mathbb{G}$ 及び § 3.2 にて固定した諸々のデータは全て $\mathbb{F}_p$ $(:= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ 上定義され得るものとする。

定義 4.2 (cf. [18], Definition 3.6.1). $S \in \mathrm{ob}(\mathfrak{Sch}_{/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}})$、そして $\mathfrak{X}_{/S}$ を S 上の (g,r) 型安定曲線とする。**$\mathfrak{X}_{/S}$ 上の休眠 $\mathfrak{g}$ 作 (dormant $\mathfrak{g}$-oper on $\mathfrak{X}_{/S}$)** とは $\mathfrak{X}_{/S}$ 上の $\mathfrak{g}$ 作 $\mathcal{E}^\spadesuit := (\mathcal{E}_\mathbb{B}, \nabla_\mathcal{E})$ のうち $\nabla_\mathcal{E}$ の p 曲率 ${}^p\psi^{(\mathcal{E}_\mathbb{G}, \nabla_\mathcal{E})}$ が零射となるものをいう。

休眠 $\mathfrak{g}$ 作を分類する $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$（$\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \sqcup \{\emptyset\}$）の部分函手を

$$\mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho,g,r} : \mathfrak{Sch}_{/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}} \to \mathfrak{Set}$$

と表すことにすると、$\mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ は $\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ の閉部分スタックとして表現される。さらに次の主張が示される。

定理 4.3 (cf. [18], Theorem C; [18], Theorem G). $(\mathrm{Char})_p$ を仮定し、$\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \sqcup \{\emptyset\}$ とする。

(i) $\mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上有限な Deligne-Mumford スタックで表現される。$r > 0$ のとき、自然な埋め込みからなる射

$$\coprod_{\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(\mathbb{F}_p)} \mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho,g,r} \to \mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\emptyset,g,r}$$

は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の同型射となる。また $r = 0$ のとき、$\mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\emptyset,g,0}$ は空でない。

(ii) 次の条件 $(**)$ を仮定する：$(**)$ 任意の $\rho' \in \mathfrak{c}^{\times 3}(\mathbb{F}_p)$ に対して $\mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho',0,3}$ は $\overline{\mathfrak{M}}_{0,3}$ $(= \mathrm{Spec}(k))$ 上不分岐である [14]。このとき、$\mathfrak{Op}^{\text{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ は $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上生成的エタールである。

§ 4.3.

ここでは、休眠 $\mathfrak{sl}_{p-1}$ 作の例を一つ挙げる（記号に関しては例 4.1 を参照)。(簡単のため）k を代数的閉であると仮定し、$\mathfrak{X}_{/k} := (X/k, \emptyset)$ を (標点のない) k 上固有かつ滑らかな種数 g (> 1) 代数曲線とする。X 上の局所完全形式からなる層を $\mathcal{B}$ $(\subseteq \Omega_{X/k})$ とすると、相対 Frobenius 射 $F := F_{X/k}$ が定める底空間の同相写像を通して $\mathcal{B}$ は $F_*(\Omega_{X/k})$ の部分 $\mathcal{O}_{X_k^{(1)}}$ 加群とみなせる。さらに $F^*(F_*(\Omega_{X/k}))$ は X 上の階数 p ベクトル束、そして $F^*(\mathcal{B})$ は $F^*(F_*(\Omega_{X/k}))$ の階数 $p-1$ 部分ベクトル束であることが確かめられる。また、$F^*(\mathcal{B})$ には以下のようにして降下フィルトレーション $\{F^*(\mathcal{B})^j\}_{j=0}^{p-1}$ を定義される：

[14] [18], Theorem G より $\mathfrak{g}$ が $\mathfrak{sl}_n$ $(2n < p)$, $\mathfrak{so}_{2l+1}$ $(4l < p)$, $\mathfrak{sp}_{2m}$ $(4m < p)$ と同型な場合、つまり § 6.2 で記述される条件 $(\mathrm{Char})_p^\dagger$ を満たすときは条件 $(**)$ が成り立つ。

$$F^*(\mathcal{B})^0 := F^*(\mathcal{B});$$
$$F^*(\mathcal{B})^1 := F^*(\mathcal{B}) \cap \mathrm{Ker}(\eta),$$
$$F^*(\mathcal{B})^j = \mathrm{Ker}(F^*(\mathcal{B})^j \overset{\nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{B}}}{\to} \Omega_{X/k} \otimes F^*(\mathcal{B})^{j-1} \twoheadrightarrow \Omega_{X/k} \otimes (F^*(\mathcal{B})^j / F^*(\mathcal{B})^{j-1})).$$

ただし、η とは $F_*(\Omega_{X/k})$ 上の恒等射と（随伴 “$F^*(-) \dashv F_*(-)$”により）対応する $\mathcal{O}_X$ 線型射 $F^*(F_*(\Omega_{X/k})) \to \Omega_{X/k}$ を表す。このとき、

$$(F^*(\mathcal{B}), \nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{B}}, \{F^*(\mathcal{B})^j\}_{j=0}^{p-1})^{\spadesuit}$$

は休眠 $\mathfrak{sl}_{p-1}$ 乍となる。さらに、 [6], Theorem A (ii) より、X（の Jacobi 多様体）が通常ならば、$\mathfrak{X}_{/k}$ 上の休眠 $\mathfrak{sl}_{p-1}$ 乍は同型の差を除いてこの休眠 $\mathfrak{sl}_{p-1}$ 乍に限られる。

§ 5. 休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍に関する性質

この § 5 では、休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍が他の数学的対象により記述されることについて説明する。以下、k を標数 $p > 2$ の代数的閉体、$\mathfrak{X}_{/k} := (X/k, \emptyset)$ を k 上の（標点のない）種数 g (> 1) 安定曲線とし、$\mathcal{O}p^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_2, \mathfrak{X}_{/k}}$ を $\mathfrak{X}_{/k}$ 上の休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍の同型類全てのなす集合とする。

§ 5.1.

まずはじめに X/k が滑らかな場合において、休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍と然るべき階数 2 安定ベクトル束との対応について述べる [15]。$\mathcal{V}$ を X 上の次数 0 階数 2 ベクトル束とする。このようなベクトル束の「安定性」を測る次のような数値的不変量 $\delta(\mathcal{V}) \in \mathbb{Z}$ を考えよう：

$$\delta(\mathcal{V}) := \max\{\deg(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z} \mid \mathcal{L} \text{ は } \mathcal{V} \text{ の階数 1 の部分ベクトル束}\}.$$

このとき、定義から明らかに、

$$\mathcal{V} \text{ が半安定（resp., 安定）} \Longleftrightarrow \delta(\mathcal{V}) \leq 0 \ (\text{resp., } \delta(\mathcal{V}) < 0)$$

が成り立つ。非分解な（=直線束に直和分解しない）$\mathcal{V}$ に対しては Riemann-Roch の定理を適用すれば容易に、$\delta(\mathcal{V}) \leq g-1$ が常に成り立つことが分かる。$\delta(\mathcal{V}) = g-1$ を満たすとき $\mathcal{V}$ を**極大非安定である**という。このとき、以下の命題が成り立つ。

命題 5.1 (cf. [13], Proposition 4.2)**.** 自然な全単射

$$\begin{pmatrix} F^*_{X/k}(\mathcal{G}) \text{ が極大非安定かつ} \\ \det(\mathcal{G}) \cong \mathcal{O}_{X^{(1)}_k} \text{ を満たす } X^{(1)}_k \text{ 上} \\ \text{の階数 2 ベクトル束 } \mathcal{G} \text{ の同型類集合} \end{pmatrix} \overset{\sim}{\to} \mathcal{O}p^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_2, X/k} \times (\text{テータ指標全ての集合})$$

[15] § 5.1 の結果は一般の n $(< p)$ に対する休眠 $\mathfrak{sl}_n$ 乍の、或る種の階数 n 安定ベクトル束による記述へと一般化され得る。

が存在する [16]。この対応は

$$\mathcal{G} \mapsto ((F^*_{X/k}(\mathcal{G}), \nabla^{\mathrm{can}}_{\mathcal{G}}, \{F^*_{X/k}(\mathcal{G})^{\mathrm{HN},j}\}_{j=0}^2)^{\spadesuit}, F^*_{X/k}(\mathcal{G})^{\mathrm{HN},1})$$

により与えられる。ここで、$\{F^*_{X/k}(\mathcal{G})^{\mathrm{HN},j}\}_{j=0}^2$ は $F^*_{X/k}(\mathcal{G})$ の Harder-Narasimhan（降下）フィルトレーションを表す。

§ 5.2.

次に X が k 上の完全退化曲線（=全ての既約成分 Y $(\subseteq X)$ が有理的であり、正規化 $\widetilde{Y} \to Y$ による特異点集合の逆像がちょうど 3 点からなる安定曲線）の場合において、休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍を組み合わせ論的対象により記述しよう。

まずは準備段階として、$(0,3)$ 型の点付き安定曲線 $\mathfrak{P}_{/k}$（$=$ 3 標点 0, 1, ∞ 付き射影直線 $\mathbb{P}^1$）上の休眠乍の組み合わせ論的記述について考える。$\dim(\mathfrak{sl}_2) = 3$, $\mathrm{rk}(\mathfrak{sl}_2) = 1$ なので、命題 3.3 において $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ かつ $(g, r) = (0, 3)$ のときは、任意の $\rho \in \mathfrak{c}^{\times 3}(k)$ に対して $D_\rho = 0$ となる。つまり、$\mathfrak{P}_{/k}$ 上の乍の同型類はその半径により一意的に決まり、$\mathfrak{P}_{/k}$ 上の乍の同型類集合と $\mathfrak{c}^{\times 3}(k)$ は一対一対応する。すると、この対応のもとで休眠乍を分類する $\mathfrak{c}^{\times 3}(k)$ の部分集合は

$$\{(\rho_a, \rho_b, \rho_c) \in \mathfrak{c}^{\times 3}(k) \mid a,\, b,\, c \text{ は条件 } (\mathrm{i})^{p-2}_{a,b,c} \text{ かつ } (\mathrm{ii})_{a,b,c} \text{ を満たす非負整数の三つ組} \}$$

と一致することが知られている（cf. [11], Introduction, Theorem 1.3）。ただし、各非負整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、

$$\rho_m := \begin{pmatrix} \overline{m + \frac{p+1}{2}} & 0 \\ 0 & \overline{-m - \frac{p+1}{2}} \end{pmatrix} \in \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p) \ (\subseteq \mathfrak{c}(k))$$

と定義し、条件 $(\mathrm{i})^{l}_{a,b,c}$（l は非負整数）及び $(\mathrm{ii})_{a,b,c}$ を次のように定める：

$(\mathrm{i})^{l}_{a,b,c}$： $a + b + c \leq l;$

$(\mathrm{ii})_{a,b,c}$： $a + b \leq c, \quad b + c \leq a, \quad c + a \leq b.$

ではこの事実を適用して、完全退化曲線 $\mathfrak{X}_{/k}$ の場合について考えよう。$\mathfrak{X}_{/k}$ の双対グラフ $G_{\mathfrak{X}_{/k}}$ は有限 3 正則グラフになるが、この手続き $\mathfrak{X}_{/k} \mapsto G_{\mathfrak{X}_{/k}}$ により完全退化曲線と有限 3 正則グラフは（適切な意味で）一対一対応する。いま、$G = (V, E, i)$ を $\mathfrak{X}_{/k}$ の双対グラフを表す有限 3 正則グラフとする。ただし、

- V は G の頂点（$=$ X の既約成分）集合；
- E は G の辺（$=$ X の結節点）集合；

[16] テータ指標とは、直線束 $\mathcal{L}$ のうち $\mathcal{L}^{\otimes 2} \cong \Omega_{X/k}$ を満たすものの同値類のこととする。

- $i : E \to V^{[2]}$ （$V^{[2]}$ は濃度 2 の V 上の多重集合 [17] の集合）は写像であり、任意の $v \in V$ に対して

$$E_v := v \text{ を端点とする辺（重複度込み）からなる多重集合}$$

の濃度が 3 になるもの、とする。

定義 5.2. l を非負整数とする。G **上の** l**-スピンネットワーク**とは写像 $s : E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ のうち、任意の $v \in V$ に対し（$E_v := [e_1, e_2, e_3]$ として）条件 $(\mathrm{i})^l_{s(e_1),s(e_2),s(e_3)}$ かつ $(\mathrm{ii})_{s(e_1),s(e_2),s(e_3)}$ が満たされるものとする。G 上の l-スピンネットワーク全てのなす集合を $\mathcal{S}pin_{G,l}$ と表す。

以下で二つの写像 $\xi_G, \xi_{\mathfrak{X}_{/k}}$ を導入しよう。まず始めに、G 上の各 $(p-2)$-スピンネットワーク $s : E \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して $(\rho_{s(e)})_{e\in E} \in \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)^E$ を割り当てる写像を

$$\xi_G : \mathcal{S}pin_{G,p-2} \to \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)^E$$

としよう。容易に確かめられるように、この写像は単射である。

次に $\widetilde{X} = \coprod_{v\in V} \mathbb{P}_v$ を X の正規化（従って任意の $v \in V$ に対して $\mathbb{P}_v$ は射影直線と同型）、そして各 $v \in V$ に対して $n_v : \mathbb{P}_v \to X$ を自然な射とする。適当に多重集合 E_v の元に順序を入れることにより、$\mathfrak{P}_v := (\mathbb{P}_v, E_v)$ を $(0,3)$ 型安定曲線と見なすことが出来る。$\mathfrak{X}_{/k}$ 上の休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍 $\mathcal{E}^{\spadesuit}$ が与えられたとき、各 $v \in V$ に対して n_v で引き戻すことにより、$\mathfrak{P}_v$ 上の休眠 $\mathfrak{sl}_2$ 乍 $\mathcal{E}^{\spadesuit}_v$ を得る。さらに、各結節点 $e \in E$ に対して $i(e) = [v_1, v_2]$ とすると、$\mathcal{E}^{\spadesuit}_{v_1}$ と $\mathcal{E}^{\spadesuit}_{v_2}$ の e が定める各々の標点における半径は一致する。この半径を ρ_e と書くことにすると、対応 $\mathcal{E}^{\spadesuit} \mapsto (\rho_e)_{e\in E}$ は写像

$$\xi_{\mathfrak{X}_{/k}} : \mathcal{O}p^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{X}_{/k}} \to \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)^E$$

を定める。上で説明した $\mathfrak{P}_{/k}$ 上の休眠乍に関する事実を適用して次が得られる：

命題 5.3 (cf. [11], Introduction, Theorem 1.3 (2); [9], Theorem 3.9)**.** 写像 $\xi_{\mathfrak{X}_{/k}}$ は単射であり、その像と写像 ξ_G の像は一致する。したがって、$\mathcal{E}^{\spadesuit} \mapsto \xi_G^{-1}(\xi_{\mathfrak{X}_{/k}}([\mathcal{E}^{\spadesuit}]))$ なる対応により、一対一対応

$$\mathcal{O}p^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_2,\mathfrak{X}/k} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}pin_{G,p-2}$$

を得る。

§6. 休眠乍の一般的個数の為の明示公式

乍の構造（＝Borel 還元＋然るべき横断性）を持つ主束は一般に無限個存在し（cf. 定理 3.3）、一方で p 曲率が零射となる主束もまた無限個存在する（cf. 例 4.1）。しかし、定

[17] 多重集合に関する一般論及び表記については [15] を参照されたい。

理 4.3(i) で述べたように、両方の性質を持つもの（＝休眠乍）は有限個しか存在しない。では、一般的な代数曲線に対して、そのような休眠乍なる「良い対称性を持つ」乍は一体どのくらいあるのだろうか。各 $\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \sqcup \{\emptyset\}$ に対して

$$\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r})\ (\geq 0)$$

を $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}$ の $\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ 上の生成的次数とする。もし $\mathfrak{g}$ が定理 4.3(ii) で述べた条件 $(**)$ を満たすならば、（$\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}$ は生成的エタールなので）この値はまさに「一般的な (g,r) 型安定曲線の上に存在する休眠 $\mathfrak{g}$ 乍の個数」に他ならない。以下では、この生成的次数の値に関して知られている結果について述べる。ちなみに、定理 4.3 (i) より、$\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(k) \backslash \mathfrak{c}^{\times r}(\mathbb{F}_p)$ ならば $\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}) = 0$ となるため、$\rho \in \mathfrak{c}^{\times r}(\mathbb{F}_p) \sqcup \{\emptyset\}$ の場合を調べればよい。また、§4.3 にて述べたことにより、$\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{\mathfrak{sl}_{p-1},\emptyset,g,0}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}) = 1$ が分かる。

§ 6.1.

各 ρ から非負整数 $\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz}\ldots}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r})$ を割り当てる函数は、「擬フージョン則」と呼ぶことにする或る種の分解性質を持つことを後述の命題 6.1 にて述べる。この「擬フージョン則」（cf. [18], Definition 6.4.1）とは、（共形場理論などで馴染みのある）いわゆる「フージョン則」（cf. [1], §5）の条件を弱めた概念として定義される。フージョン則の場合と同様、所望の函数値を擬フージョン則に付随するフージョン環の情報により具体的に記述することを可能にさせるものである。

I は対合 $\lambda \mapsto \lambda^*$ $(\lambda \in I)$ が与えられている有限集合とする。I により生成される自由可換モノイドを $\mathbb{N}^I$ とし、その各元を和の形 $\sum_{\alpha \in I} n_\alpha \alpha$ （$n_\alpha \in \mathbb{N}$）で表すことにする。$\alpha \leftrightarrow 1\alpha$ により、I を $\mathbb{N}^I$ の部分集合とみなす。各 $\sum_{\alpha \in I} n_\alpha \alpha \in \mathbb{N}^I$ に対して $\mathrm{aug}(\sum_{\alpha \in I} n_\alpha \alpha) := \sum_{\alpha \in I} n_\alpha \in \mathbb{N}$ とし、各整数 l に対して

$$\mathbb{N}^I_{\geq l} := \{x \in \mathbb{N}^I \mid \mathrm{aug}(x) \geq l\}\ (\subseteq \mathbb{N}^I)$$

と定める。I の対合を線形的に拡張することにより $\mathbb{N}^I$ 及び $\mathbb{N}^I_{\geq l}$ の対合 $x \mapsto x^*$ が定まる。**I 上の擬フージョン則**とは写像 $N : \mathbb{N}^I_{\geq 3} \to \mathbb{Z}$ のうち以下の 2 条件を満たすものとする：

- 任意の $x \in \mathbb{N}^I_{\geq 3}$ に対して $N(x^*) = N(x)$；
- 任意の $x, y \in \mathbb{N}^I_{\geq 2}$ に対して $N(x+y) = \sum_{\lambda \in I} N(x+\lambda) \cdot N(y+\lambda^*)$ が成り立つ。

§ 6.2.

さてここで、 $\mathfrak{g}$ に関して以下の条件 $(\mathrm{Char})^\dagger_p$ を仮定しよう（とくに、$\mathfrak{g}$ は条件 $(**)$ を満たす)：

$(\mathrm{Char})^\dagger_p$ ： $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{sl}_n$ $(2n < p)$、$\mathfrak{so}_{2l+1}$ $(4l < p)$、もしくは $\mathfrak{sp}_{2m}$ $(4m < p)$ のいずれかと同型;

そして、$I := \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)$ 上の対合を、$\mathfrak{g}$ 上の (-1) 倍写像 $\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{g}$ から誘導されるものとして定めよう。このとき、以下の命題が成り立つ。

命題 6.1 (cf. [18], Theorem 7.10.1)**.**

$$N_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots} : \mathbb{N}_{\geq 3}^{\mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)} \to \quad \mathbb{Z}$$
$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i \mapsto \deg(\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},(\rho_i)_{i=1}^r,0,r}^{\mathrm{Zzz}\ldots}/\overline{\mathfrak{M}}_{0,r}) \tag{6.1}$$

は well-defined な $\mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)$ 上の擬フージョン則となる。

この結果を適用することにより、 [18], §7 で展開される擬フージョン則の一般論に従い、$N_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ に付随するフージョン環 $\mathfrak{F}_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ を得る。つまり、$\mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)$ を基底とする自由アーベル群 $\mathbb{Z}^{\mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)}$ 上に

$$\alpha \cdot \beta := \sum_{\lambda \in \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)} N_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}(\alpha + \beta + \lambda^*)\lambda$$

($\alpha,\, \beta \in I$) を満たすような可換かつ結合的（しかし一般には非単位的）な積構造が一意的に定まるが、この環に単位元を添加して得られる環を $\mathfrak{F}_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ と書くことにする。

定理 6.2 (cf. [18], Theorem F)**.** $\mathfrak{F}_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ から実数体 $\mathbb{C}$ への環準同型全てからなる集合を $\mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}, \mathbb{C})$ と表し、$\mathcal{C}as := \sum_{\lambda \in \mathfrak{c}(\mathbb{F}_p)} \lambda \cdot \lambda^*$ とする。このとき、$2g - 2 + r > 0$ を満たす任意の正整数の組 (g, r) 及び任意の $\rho = (\rho_i)_{i=1}^r \in \mathfrak{c}^{\times r}(\mathbb{F}_p) \sqcup \{\emptyset\}$ に対して、次の等式が成り立つ：

$$\deg(\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}^{\mathrm{Zzz}\ldots}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{g},p}^{\mathrm{Zzz}\ldots}, \mathbb{C})} \chi(\mathcal{C}as)^{g-1} \cdot \prod_{i=1}^{r} \chi(\rho_i).$$

特に $r = 0$ (したがって $g > 1$) のとき次の等式が成り立つ：

$$\deg(\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\emptyset,g,0}^{\mathrm{Zzz}\ldots}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}) = \sum_{\chi \in \mathrm{Hom}(\mathfrak{F}_{\mathfrak{g},p}^{\mathrm{Zzz}\ldots}, \mathbb{C})} \chi(\mathcal{C}as)^{g-1}. \tag{6.2}$$

したがって $\mathfrak{F}_{p,\mathfrak{g}}^{\mathrm{Zzz}\ldots}$ の環構造が (然るべき意味で) 具体的に分かれば、$\deg(\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}^{\mathrm{Zzz}\ldots}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r})$ の値は明示的に計算することができる。最後に、$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の場合において $\deg(\mathfrak{Op}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}^{\mathrm{Zzz}\ldots}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r})$ の値を明示的に計算した結果を以下に述べる（これは Kirti Joshi 氏により [7] において提示された予想を肯定的に解決したものである)：

定理 6.3 (cf. [18], Theorem H)**.** $p > n \cdot \max\{g-1, 2\}$ ならば次の等式が成り立つ：

$$\deg(\mathfrak{Op}_{\mathfrak{sl}_n,\emptyset,g,0}^{\mathrm{Zzz}\ldots}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}) = \frac{p^{(n-1)(g-1)-1}}{n!} \cdot \sum_{\substack{(\zeta_1,\cdots,\zeta_n) \in \mathbb{C}^{\times n} \\ \zeta_i^p = 1,\ \zeta_i \neq \zeta_j (i \neq j)}} \frac{(\prod_{i=1}^n \zeta_i)^{(n-1)(g-1)}}{\prod_{i \neq j}(\zeta_i - \zeta_j)^{g-1}}. \tag{6.3}$$

特に $n=2$ のとき [18] 次の等式が成り立つ：

$$\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_2,\emptyset,g,0}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}) = \frac{p^{g-1}}{2^{2g-1}} \cdot \sum_{\theta=1}^{p-1} \frac{1}{\sin^{2g-2}(\frac{\pi\cdot\theta}{p})}.$$

この定理は定理 6.2 とは独立に得られることに注意されたい。定理 6.3 を示す為の鍵となっているのは、定理 4.3 (ii)（と脚注）で主張した $\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_n,\emptyset,g,0}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,0}$ の生成的エタール性である。実際、滑らかな固有代数曲線 X/k 上の休眠 $\mathfrak{sl}_n$ 乍を分類するモジュライ空間は（X の Frobenius 捻り $X^{(1)}_k$ 上の）然るべき相対 Grassmann 多様体と同型であることがわかる。生成的エタール性によりそれは、$W(k)$ (:=k の Witt 環) 上定義された代数曲線（つまり $X^{(1)}_k$ の $W(k)$ 上への変形）上の然るべき「$W(k)$ 上平坦な」相対 Grassmann 多様体へと変形される。従って $\mathbb{C}$ 上の相対 Grassmann 多様体の Gromov-Witten 不変量に関する既知の計算結果（Vafa-Intriligator 公式) を適用することで所望の明示的公式 (6.3) を得る。

一方で、$\mathfrak{F}^{\mathrm{Zzz...}}_{p,\mathfrak{sl}_n}$ の環構造（つまり、各 $\rho\in\mathfrak{c}^{\times 3}(\mathbb{F}_p)$ に対する $\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{sl}_n,\rho,0,3}/\overline{\mathfrak{M}}_{0,3})$ の値）を具体的に理解することができれば、定理 6.2 を適用して定理 6.3 の別証明が得られるだろう。しかし、これら 2 つの明示的計算へのアプローチがどのような関連性を持っているのか今の段階ではよく分かっていない。そして §5.2 で議論した様な休眠 $\mathfrak{sl}_n$ 乍の組み合わせ論的記述の実現、もしくは $\mathfrak{sl}_n$ 以外の $\mathfrak{g}$ における $\deg(\mathfrak{Op}^{\mathrm{Zzz...}}_{\mathfrak{g},\rho,g,r}/\overline{\mathfrak{M}}_{g,r})$ の明示的計算など、今後取り組むべき課題は尽きない。

§7. 謝辞

本稿を終えるにあたり、「代数的整数論とその周辺 2014」報告集への原稿掲載の機会を与えて頂いた編集委員の方々、そして本稿の査読を引き受けてくださり、内容に関して大変有意義なコメント及びアドバイスをしてくださった（編集委員の方を含む）方々には深く感謝の意を表したい。今回紹介した諸結果が論じられている論文 [18] を書き上げる際にお世話になった方々への感謝の念は尽きることが無い。特に、Kirti Joshi 氏が予想として提示した公式 (6.3) の美しさは筆者の数学研究の方向性を定め、その予想を解く為に費やされた博士後期課程は（苦しいながらも）とても実り多いものであった。また、筆者の大学院時代の指導教員である望月新一氏と出逢い、教えを請うことができたことは筆者の人生を彩る大きな喜びである。望月氏の数学に関わる哲学と深遠な洞察を正しく理解する為には、筆者の努力と能力が依然として不十分なままであることは情けない限りである。そして、星裕一郎氏の温かい励ましや（数学にとどまらない）アドバイスは今でも筆者の心の支えである。もはやその恩を何らかのかたちで返そうとしても、決して返し尽くせないほど大きなものとなっている。

[18] 簡単な議論（cf. [18], §0.3）により、$p>2\cdot\max\{g-1,2\}$ の場合のみならず $p>2$ ならばこの等式は成り立つことが分かる。

参考文献

[1] A. Beauville, Conformal Blocks, Fusion Rules, and the Verlinde formula. *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry, Israel Math. Conf. Proc.* **9** Bar-Ilan Univ., Ramat Gan (1996).

[2] A. Beilinson, V. Drinfeld, "Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves." Available at: http://math.uchicago.edu/ mitya/langlands/hitchin/BD-hitchin.pdf

[3] A. Beilinsion, V. Drinfeld, Opers. *arXiv: math. AG/0501398v1*, (2005).

[4] V. G. Drinfeld, V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries types. *Journal of Soviet Mathematics* **30** (1985), pp. 1975-2035.

[5] R. C. Gunning, Special coordinate covering of Riemann surfaces. *Math. Ann.* **170** (1967), pp. 67-86.

[6] Y. Hoshi, A note on dormant opers on rank $p-1$ in characteristic p. *RIMS Preprint* **1822** (2015)

[7] K. Joshi, The degree of the dormant operatic locus. *arXiv: math. AG/1311.4359* (2013).

[8] N. M. Katz, Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of Turrittin. *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math.* **39** (1970), pp. 175-232.

[9] F. Liu, B. Osserman, Mochizuki's indigenous bundles and Ehrhart polynomials. *J. Algebraic Combin.* **26** (2006), pp. 125-136.

[10] S. Mochizuki, A theory of ordinary p-adic curves. *Publ. RIMS* **32** (1996), pp. 957-1151.

[11] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller theory.* American Mathematical Society, (1999).

[12] A. Ogus, *F-Crystals, Griffiths Transversality, and the Hodge Decomposition.* Astérisque **221**, Soc. Math. de France, (1994).

[13] B. Osserman, Mochizuki's crys-stable bundles: A lexicon and applications. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **43** (2007), pp. 95-119.

[14] M. Raynaud, Sections des fibrés vectoriels sur une courbe. *Bull. Soc. Math. France* **110** (1982), pp. 103-125.

[15] D. Singh, A. M. Ibrahim, T. Yohanna, J. N. Singh, An overview of the applications of multisets. *Novi Sad J. Math.* **37** (2007), pp. 73-92.

[16] Y. Wakabayashi, An explicit formula for the generic number of dormant indigenous bundles. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **50** (2014), pp. 383-409.

[17] Y. Wakabayashi, Spin networks, Ehrhart quasi-polynomials, and combinatorics of dormant indigenous bundles. *RIMS Preprint* **1786** (2013).

[18] Y. Wakabayashi, A theory of dormant opers on pointed stable curves —a proof of Joshi's conjecture—. *arXiv: math. AG/1411.1208v3*, (2014).