RIMS Kôkyûroku Bessatsu
B64 (2017), 209–216

3 次元超特異アーベル多様体の mass 公式についての研究報告 (Mass formula for supersingular abelian varieties of dimension three, a research announcement)

By

呼子 笛太郎 (Fuetaro YOBUKO)*

Abstract

The Eichler-Deuring mass formula says that the weighted number of isomorphism classes of supersingular elliptic curves over an algebraically closed field of characteristic p is expressed as a simple polynomial in p. In 2009, C.-F. Yu and J.-D. Yu generalized this formula for supersingular abelian surfaces. In this paper, we show a mass formula for supersingular abelian three-folds of a-number equal to two. This is a short version of [11].

§ 1. 導入

本稿では一般次元の超特異 (supersingular) アーベル多様体に対して、Eichler-Deuring mass 公式 [2] の高次元版と呼ばれるものを定義し、さらに、3 次元で a-number が 2 である場合に mass 公式の計算結果を紹介する。なお本稿は [11] の研究報告であり、計算の詳細については [11] を参照。

以下 p を素数とし、k を標数 p の代数閉体とする。k 上の超特異楕円曲線の同型類は有限個であり、その個数は楕円曲線の自己同型群の大きさだけ重みをつければ、次のように非常に単純な式で表すことができる:

$$\sum_{E:\text{超特異楕円曲線}} \frac{1}{\#\mathrm{Aut}(E)} = \frac{p-1}{24}.$$

これを Eichler-Deuring mass 公式という。E を k 上の超特異楕円曲線とすると、$\mathrm{End}(E)\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ は p と ∞ でのみ分岐する定値四元数環になる。Deuring は k 上の超特異楕円曲線の同型類の個数とこの四元数環の類数が等しいことを証明し、それ以前に Eichler がこの類数

Received April 1, 2015. Revised February 8, 2016.
2010 Mathematics Subject Classification(s): 11G10, 14G17, 14K10.
Key Words: *supersingular abelian variety, mass formula.*
*Institute of Mathematics, Tohoku University. Aoba, Sendai, 980-8578, Japan.
e-mail: soratobumusasabidesu@gmail.com

© 2017 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

を計算していたのであった。

さてこの mass 公式の超特異アーベル多様体に対する高次元化を考えたい。アーベル多様体が超特異 (supersingular) であるとは、超特異楕円曲線の直積に同種であるときを言う。さらに超特別 (superspecial) であるとは、超特異楕円曲線の直積に同型であるときを言う。Λ を g 次元主偏極超特別アーベル多様体の同型類のなす集合とする。Λ は有限集合である。Eichler-Deuring mass 公式の最初の高次元化は橋本-伊吹山 [4], Ekedahl[3] による次の定理である。

定理 1.1.

$$\sum_{(A,\eta)\in\Lambda}\frac{1}{\#\mathrm{Aut}(A,\eta)}=\frac{(-1)^{\frac{g(g+1)}{2}}}{2^g}\prod_{k=1}^{g}\zeta(1-2k)\prod_{k=1}^{g}\{p^k+(-1)^k\}.$$

ただし ζ は Riemann ζ 関数である。

同様の計算を超特別とは限らない超特異アーベル多様体に対して考えたい。しかし 2 次元以上ならば次元を固定しても、主偏極超特異アーベル多様体の同型類は無限集合 (そのモジュライは正の次元) になるので、すべての主偏極超特異アーベル多様体の同型類全体を渡って $\sum 1/\#\mathrm{Aut}(A,\eta)$ と定義することはできない。そこで本稿では [10] に倣い、一般の超特異アーベル多様体に対して mass を定義することから始める。

§ 2. 定式化

[10] に従い、高次元の超特異アーベル多様体に対し mass を定義する。$\mathcal{S}_g$ を k 上の主偏極超特異アーベル多様体のモジュライ空間とする。$x_0=(A_0,\eta_0)\in\mathcal{S}_g(k)$ に対し、

$$\Lambda(x_0)=\{(A,\eta)\in\mathcal{S}_g(k);(A_0,\eta_0)[p^\infty]\simeq(A,\eta)[p^\infty]\}$$

と定める。

命題 2.1. $\Lambda(x_0)$ は有限集合である。

証明. これは代数群の類数の有限性より従う [1, Prop. 1]。ここではより幾何学的な証明を与える。これは [8, Prop. 5.1] の特別な場合である。

$\Lambda(x_0)$ は $\mathcal{S}_g$ の閉集合である。適当にレベル構造をつけて、普遍族 $(\mathcal{U},\eta)\to\mathcal{S}_g$ が存在すると仮定する。E を超特異楕円曲線とする。このときあるスキーム $\mathcal{P}$ と全射 $\mathcal{P}\to\mathcal{S}_g$ が存在して、偏極アーベルスキームの間の同種写像

$$\psi\colon(E^g\times\mathcal{P},\eta'\times\mathcal{P})\to(\mathcal{U},\eta)\times_{\mathcal{S}_g}\mathcal{P}$$

が存在する (§3)。ただし η' は E^g の適当な偏極であり、ψ の次数は $p^{\frac{1}{2}g(g-1)}$ である。$m=\frac{1}{2}g(g-1)$ とおく。圏 Sch/k 上の反変関手 $Gr_{E^g,m}$ を $T\in Sch/k$ に対し、

$$Gr_{E^g,m}(T)=\{\text{局所自由有限部分群スキーム } G\subset E^g_T \text{ s.t. } \mathrm{rank}(G/T)=p^m\}$$

を対応させることで定義すると、これは k 上の固有スキームで表現可能である。表現するスキームも $Gr_{E^g,m}$ で表すことにする。T を $\mathcal{P} \times_{\mathcal{S}_g} \Lambda(x_0)$ の既約成分の一つとする。$\ker(\psi_T) \subset E_T^g$ は $Gr_{E^g,m} \times T \to T$ の切断を与えている。$\ker(\psi_T)$ が定値的であれば $(\mathcal{U}, \eta) \times_{\mathcal{S}_g} T$ も定値的になり、$\Lambda(x_0)$ が 0 次元であることが分かる。$Gr_{E^g,m}(k)$ の部分集合 Ψ を

$$\Psi = \{G \in Gr_{E^g,m}(k); \exists \phi\colon E[p^\infty]^g \to A_0[p^\infty] \text{ s.t. } \ker(\phi) = G\}$$

と定めると、これは有限集合になることが証明できる ([8, Lemma 1.10])。考えている切断は、各ファイバー上で Ψ に値をとるので、T の既約性よりこの切断は定値的である。 □

$x_0 = (A_0, \eta_0) \in \mathcal{S}_g(k)$ に対して、$\Lambda(x_0)$ の mass を次のように定める:

$$\mathrm{Mass}(\Lambda(x_0)) := \sum_{(A,\eta) \in \Lambda(x_0)} \frac{1}{\#\mathrm{Aut}(A, \eta)}.$$

従って、$x_0 \mapsto \mathrm{Mass}(x_0) := \mathrm{Mass}(\Lambda(x_0))$ により超特異軌道 (supersingular locus) 上の関数

$$\mathrm{Mass}\colon \mathcal{S}_g(k) \to \mathbb{Q}$$

を定めたことになる。楕円曲線の場合は、すべての $x \in \mathcal{S}_1(k)$ に対して $\Lambda(x) = \mathcal{S}_1(k)$ となるので、mass 関数は $\frac{p-1}{24}$ に値をとる定数関数である。

より一般に任意の超特別点 $x \in \mathcal{S}_g(k)$ に対し、$\Lambda(x) = \Lambda$ となる。従って橋本-伊吹山、Ekedahl による結果はこの mass 関数の超特別点における値を決定したものであると解釈できる。超特別アーベル多様体は最も退化した超特異アーベル多様体であるので、我々の目的はより一般的な超特異点に対し、mass 関数の値を求めることであると言える。

超特別とは限らない超特異アーベル多様体の様子を調べるために、アーベル多様体に a-number という不変量を導入する。k 上のアーベル多様体 A に対し、その a-number を $a(A) = \dim_k \mathrm{Hom}(\alpha_p, A)$ と定める。ただし α_p は k 上の加法群 $\mathbb{G}_a$ の相対フロベニウス写像の核である。すなわち $\alpha_p = \mathrm{Ker}(F\colon \mathbb{G}_a \to \mathbb{G}_a)$ である。g 次元の超特異アーベル多様体 A に対して $1 \le a(A) \le g$ であり、さらに $a(A) = g$ となることと A が超特別であることは同値である。今定めた a-number により超特異軌道の分割が得られる:

$$\mathcal{S}_g = \mathcal{S}_g^{a=1} \sqcup \mathcal{S}_g^{a=2} \sqcup \cdots \sqcup \mathcal{S}_g^{a=g}.$$

ただし $\mathcal{S}_g^{a=i}$ は a-number が i である超特異点からなる $\mathcal{S}_g$ の局所閉部分集合である。

§3. 超特異軌道

我々の目的は mass 関数を出来るだけ具体的に記述することであるが、超特異軌道 $\mathcal{S}_g$ は非常に複雑なので、この目的にはあまり適していないと言える。よって $\mathcal{S}_g$ を上手く近

似し、なおかつ具体的に記述できるような多様体が欲しい。そこでF. Oort等により定義された偏極旗型商 (polarized flag type quotient) のモジュライを導入する [5], [6]。

以下超特異楕円曲線 E を一つ固定する。η を E^g 上の偏極で $\mathrm{Ker}(\eta) = E^g[F^{g-1}]$ を満たすものとする。

定義 3.1. η に関する偏極旗型商とは、同種写像の列

$$(A_{g-1}, \eta_{g-1}) \xrightarrow{\rho_{g-1}} (A_{g-2}, \eta_{g-2}) \xrightarrow{\rho_{g-2}} \cdots \xrightarrow{\rho_2} (A_1, \eta_1) \xrightarrow{\rho_1} (A_0, \eta_0)$$

で、次を満たすものとする。

1. $(A_{g-1}, \eta_{g-1}) = (E^g, \eta)$,
2. 各 $0 < i < g$ に対し $\mathrm{Ker}(\rho_i) \simeq \alpha_p^i$,
3. 各 $0 < i < g$ と $0 \le j \le [\frac{i}{2}]$ に対し $\mathrm{Ker}(\eta_i) \subset \mathrm{Ker}(F^{i-j} \circ V^j)$.

条件より、上の η_0 は主偏極になる。従って、$((A_{g-1}, \eta_{g-1}) \xrightarrow{\rho_{g-1}} \cdots \xrightarrow{\rho_1} (A_0, \eta_0)) \mapsto (A_0, \eta_0)$ により射 $\mathcal{P}_{g,\eta} \to \mathcal{S}_g$ が定まる。ただし、$\mathcal{P}_{g,\eta}$ は η に関する g 次元偏極旗型商のモジュライ空間である。[6] の主定理の一つが次の定理である。

定理 3.2. 自然な射

$$\coprod_{\eta} \mathcal{P}_{g,\eta} \to \mathcal{S}_g$$

は全射で、generic に有限射である。ただし和は $\mathrm{Ker}(\eta) = E^g[F^{g-1}]$ をみたす E^g 上の偏極 η の同型類全体を走るものとする。

この射と mass 関数との合成 $\mathcal{P}_{g,\eta} \to \mathcal{S}_g \to \mathbb{Q}$ も Mass で表すことにする。この $\mathcal{P}_{g,\eta}$ が超特異軌道 $\mathcal{S}_g$ を近似する多様体である。次に 2 次元及び 3 次元の場合の $\mathcal{P}_{g,\eta}$ の具体的記述について述べておく。

§ 3.1. $g = 2$

2 次元の場合、$\mathcal{P}_{2,\eta} \simeq \mathbb{P}^1$ である。これは Moret-Bailly 族と呼ばれるものである [7]。M_1 を p-可除群 $E[p^\infty]^2$ に付随する Dieudonné 加群とすると、関係式 $F^2 = -p$ により定まる M_1 の $W(\mathbb{F}_{p^2})$-構造により、$\mathbb{P}^1$ に $\mathbb{F}_{p^2}$-構造が定まる。

J. D. Yu と C. F. Yu は 2009 年に次を示した [10]。

定理 3.3. $x \in \mathbb{P}^1(k) = \mathcal{P}_{2,\eta}(k)$ に対して、

$$\mathrm{Mass}(x) = \frac{1}{5760} \begin{cases} (p-1)(p^2+1) & x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2}) \text{ のとき}, \\ p^2(p^2-1)^2 & x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^4}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2}) \text{ のとき}, \\ (p^2-1)\#\mathrm{PSL}_2(\mathbb{F}_{p^2}) & \text{その他}. \end{cases}$$

定理の状況で $x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2})$ となることは、x が超特別であることと同値である。従って、この場合は定理 1.1 において $g=2$ を代入して得られる。彼らは a-number が 1 の場合を新たに計算し、mass 関数により $\mathcal{S}_2^{a=1}$ がさらに 2 つに分割されることを発見した。

§ 3.2. $g=3$

C を $\mathbb{P}^2$ 内で $X_1^{p+1}+X_2^{p+1}+X_3^{p+1}=0$ で定義されるフェルマー曲線とする。$\mathcal{P}_{3,\eta}$ は C 上の $\mathbb{P}^1$-束と同型である [5]:

$$\mathcal{P}_{3,\eta} \simeq \mathbb{P}_C(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)).$$

より詳しく、C 自身も長さ 1 の同種写像 $(A_2,\eta_2) \to (A_1,\eta_1)$ のモジュライ空間となり、構造射 $\pi\colon \mathbb{P}_C(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)) \to C$ は $((A_2,\eta_2) \to (A_1,\eta_1) \to (A_0,\eta_0)) \mapsto ((A_2,\eta_2) \to (A_1,\eta_1))$ というモジュライ解釈に対応している。

この曲面 $\mathbb{P}_C(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$ と、(A_0 の)a-number との関係についてまとめておく [6, Section 9.3.]。

命題 3.4. 次の状況で $x \in \mathbb{P}_C(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$ は旗 $(A_2,\eta_2) \to (A_1,\eta_1) \to (A_0,\eta_0)$ に対応しているとする。

- $\pi\colon \mathbb{P}_C(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1)) \to C$ の切断 T で次を満たすものが存在する：

$$x \in T \Rightarrow a(A_0)=3.$$

- $y \in C(k)$ に対し、$y \in C(\mathbb{F}_{p^2}) \Leftrightarrow \forall x \in \pi^{-1}(y), a(A_0) \geq 2.$
- $x \notin T, \pi(x) \notin C(\mathbb{F}_{p^2}) \Leftrightarrow a(A_0)=1.$

§ 4. 主定理

[10] によれば mass 関数により、最も一般的な a-number 軌道 $\mathcal{S}_2^{a=1}$ が二つに分割されることが観察された。同様の現象が中間の a-number (すなわち $a \neq 1, g$) においても起きているのかどうかについて考察したい。

$(A,\eta) \in \mathcal{S}_3^{a=2}$ を一つ選ぶ。$x \in \mathbb{P}_C(\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(1))$ を、この主偏極超特異アーベル多様体を代表する旗（に対応するモジュライの点) とする。命題 3.4 より、$\pi(x) \in C(\mathbb{F}_{p^2})$ で $x \in \pi^{-1}(\pi(x)) \simeq \mathbb{P}^1$ である。a-number が 2 である 3 次元超特異アーベル多様体に対する mass 関数の計算結果が次である：

定理 4.1. $p \neq 2$ とする。上の状況で $\mathrm{Mass}(x)$ は

$$\frac{1}{2^3}\zeta(-1)\zeta(-3)\zeta(-5)\begin{cases}(p-1)(p^2+1)(p^6-1) & x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2}) \text{ のとき}, \\ p^2(p-1)(p^2-1)(p^6-1) & x \in \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^4}) \setminus \mathbb{P}^1(\mathbb{F}_{p^2}) \text{ のとき}, \\ \frac{1}{2}p^2(p-1)(p^4-1)(p^6-1) & \text{その他}\end{cases}$$

となる。

注. $p=2$ の場合及び a-number が 1 である 3 次元超特異アーベル多様体に対する計算も行った [11]。例えば最も generic な $x\in\mathcal{S}_3$ に対する mass は

$$\mathrm{Mass}(x)=\frac{1}{2^{11}\cdot 3^4\cdot 5\cdot 7}p^{15}(p^2-1)(p^4-1)(p^6-1)$$

となる。

以下証明の概略を述べる。まず我々が定めた mass が、ある数論的な mass と一致することについて述べる。証明は [9] 参照。偏極アーベル多様体 $x_0=(A_0,\eta_0)$ に対し、G_{x_0} を付随する $\mathbb{Z}$ 上の自己同型群スキームとする。すなわち、可換環 R に対してその R 値点全体が

$$G_{x_0}(R)=\{g\in(\mathrm{End}(A)\otimes_{\mathbb{Z}}R)^{\times};gg^{\dagger}=1\}$$

となるものである。ただし $g\mapsto g^{\dagger}$ は η_0 に付随する Rosati 対合である。このとき基点つき集合の間の同型

$$\Lambda(x_0)\simeq G_{x_0}(\mathbb{Q})\backslash G_{x_0}(\mathbb{A}_f)/G_{x_0}(\hat{\mathbb{Z}})$$

が存在する。開コンパクト部分群 $U\subset G_{x_0}(\mathbb{A}_f)$ に対して、

$$\mathrm{Mass}(G_{x_0};U)=\sum_{i=1}^{h}\frac{1}{\#(G_{x_0}(\mathbb{Q})\cap c_iUc_i^{-1})}$$

と定める。ただし $c_1,\cdots,c_h$ は $G_{x_0}(\mathbb{Q})\backslash G_{x_0}(\mathbb{A}_f)/U$ の完全代表系である。上の全単射において、$x=(A,\eta)\in\Lambda(x_0)$ に対応する両側剰余類が、$c\in G_{x_0}(\mathbb{A}_f)$ で代表されているとすると、$\mathrm{Aut}(A,\eta)\simeq G_{x_0}(\mathbb{Q})\cap cG_{x_0}(\hat{\mathbb{Z}})c^{-1}$ となるので、等式

$$\mathrm{Mass}(\Lambda(x_0))=\mathrm{Mass}(G_{x_0};G_{x_0}(\hat{\mathbb{Z}}))$$

が成り立つ。

開コンパクト部分群 $U_1,U_2\subset G_{x_0}(\mathbb{A}_f)$ に対し、その相対指数を $\mu(U_2/U_1)=[U_2:U_1\cap U_2][U_1:U_1\cap U_2]^{-1}$ と定めると

$$\mathrm{Mass}(G_{x_0};U_1)=\mu(U_2/U_1)\mathrm{Mass}(G_{x_0};U_2)$$

となる。

超特異点 $x_0=(A_0,\eta_0)\in\mathcal{S}_3$ に対して、その上の旗

$$(E^3,\eta)=(A_2,\eta_2)\to(A_1,\eta_1)\to(A_0,\eta_0)$$

をとる。上の二つの同種写像の合成射により、同型 $G_{(E^3,\eta)}(\mathbb{A}_f)\simeq G_{x_0}(\mathbb{A}_f)$ を得る。さらに $G_{x_0}(\hat{\mathbb{Z}})$ はこの同型を通して、$G_{(E^3,\eta)}(\mathbb{A}_f)$ の開コンパクト部分群とみなすことができる。従って上で述べたことより、

$$\mathrm{Mass}(\Lambda(x_0))=\mu(G_{(E^3,\eta)}(\hat{\mathbb{Z}})/G_{x_0}(\hat{\mathbb{Z}}))\mathrm{Mass}(\Lambda(E^3,\eta))$$

となる。E^3 は超特別なので定理 1.1 より値が決定されているので、あとは相対指数

$$\mu(G_{(E^3,\eta)}(\hat{\mathbb{Z}})/G_{x_0}(\hat{\mathbb{Z}})) = \mu(G_{(E^3,\eta)}(\mathbb{Z}_p)/G_{x_0}(\mathbb{Z}_p))$$

を計算すればよい。

以下この相対指数 μ の計算方針について述べる。$M_i(i=0,1,2)$ を p-可除群 $A_i[p^\infty]$ の反変 Dieudonné 加群とする。同種写像の列 $A_2 \to A_1 \to A_0$ に対応して、包含関係 $M_2 \supset M_1 \supset M_0$ が存在する。G を Dieudonné 加群 $\mathrm{Frac}(W) \otimes_W M_2$ の自己同型群とする。ただし W は k 上の Witt 環である。G' を G の元のうち、偏極 $\eta = \eta_2$ を保つもの全体のなす部分群とする。さらに Dieudonné 部分加群 $N \subset \mathrm{Frac}(W) \otimes_W M_2$ に対し、

$$G(N) = \{g \in G; g(N) \subset N\}$$

とし、$G'(N) = G(N) \cap G'$ とする。よって $N = M_i$ のときは $G(M_i) = \mathrm{Aut}(M_i), G'(M_i) = \mathrm{Aut}(M_i, \eta_i)$ となる。したがって相対指数 μ は

$$\mu = \frac{[G'(M_2) : G'(M_2) \cap G'(M_0)]}{[G'(M_0) : G'(M_2) \cap G'(M_0)]}$$

と表すことができる。$a(M_0) = 2$ であることより $a(M_1) = 3$ であることが証明できる。従って M_0 の自己同型は M_1 の自己同型に拡張することができる。さらに M_1 の自己同型が M_2 まで拡張できる必要十分条件は、自己同型が $FM_2 \subset M_1$ を保つことである。以上より

$$\mu = \frac{[G'(M_2) : G'(M_2) \cap G'(M_1)][G'(M_1) : G'(M_1) \cap G'(M_0)]}{[G'(M_1) : G'(M_1) \cap G'(FM_2)]}$$

となることがわかる。今 M_2, M_1 ともに a-number が 3 なので、$G(M_2)$、$G(M_1)$ 共に $\mathrm{GL}_3(\mathrm{End}(E[p^\infty]))$ と同型になり、上に現れた三つの指数の計算を行列の計算に帰着させることができる。以上が計算方針である。

注. 超特異とは限らない $x = (A, \eta) \in \mathcal{A}_g(k)$ に対して、その中心的葉層 (central leaf) $C(x)$ と同種葉層 (isogeny leaf) $I(x)$ が定義される [8]。さらに命題 2.1 と同様の証明により、$C(x) \cap I(x)$ は有限集合であることが分かる。x が超特異点ならば $C(x) \cap I(x) = \Lambda(x)$ である。従って、

$$x_0 \mapsto \sum_{(A,\eta) \in C(x_0) \cap I(x_0)} \frac{1}{\#\mathrm{Aut}(A, \eta)}$$

により、我々の mass 関数を超特異とは限らない Newton 階層 (Newton stratum) に拡張することができる。この関数の具体的な計算や、そもそもこの mass 関数が数論的な意味づけを持つのかどうかが今後の研究課題の一つである。

参考文献

[1] Chai, C.-L., *Every ordinary symplectic isogeny class in positive characteristic is dense in the moduli*, Invent. Math. **121** (1995), pp. 439-479.

[2] Deuring, M., *Die Typen der Multiplikatorenringe elliptischer Funktionenkörper*, Abh. Math. Sem. Hansischen Univ. **14** (1941), pp. 197-272.

[3] Ekedahl, T., *On supersingular curves and abelian varieties*, Math. Scand. **60** (1987), pp. 151-178.

[4] Hashimoto, K., and Ibukiyama, T., *On class numbers of positive definite binary quaternion hermitian forms*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo **27** (1980), pp. 549-601.

[5] Katsura, T. and Oort, F., *Supersingular abelian varieties of dimension two or three and class numbers*, Algebraic geometry, Sendai, 1985, Adv. Stud. Pure Math., **10**, NorthHolland, Amsterdam (1987), pp. 253-281.

[6] Li, K.-Z. and Oort, F., *Moduli of supersingular abelian varieties*, Lecture Notes in Mathematics, **1680**. Springer-Verlag, Berlin, (1998).

[7] Moret-Bailly, L., *Familles de courbes et de variétés abéliennes sur* $\mathbb{P}^1$, Astérisque **86** (1981), pp. 109-140.

[8] Oort, F., *Foliations in moduli spaces of abelian varieties*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), pp. 267-296.

[9] Yu, C.-F., *On the mass formula of supersingular abelian varieties with real multiplications*, J. Australian Math. Soc., **78** (2005), pp. 373-392.

[10] Yu, C.-F. and Yu, J.-D., *Mass formula for supersingular abelian surfaces*, J. Algebra, **322** (2009), pp. 3733-3743.

[11] Yobuko, F., *Mass formula for supersingular abelian varieties of dimension three*, in preparation.